1 Champ électrostatique créé par des charges ponctuelles

L'espace est rapporté à un repère $(Oxyz)$.

1) On considère quatre charges ponctuelles positives q placées sur les axes Ox et Oy, aux points $A(a,0)$, $B(-a,0)$, $C(0,a)$ et $D(0,-a)$.

a) Déterminer directement le champ électrostatique $\overrightarrow{E}(M)$ en un point $M(0,0,z)$ situé sur l'axe Oz. On mettra le résultat sous la forme $\overrightarrow{E}(M) = E(z)\,\overrightarrow{u_z}$ et on déterminera $E(z)$ en fonction de q, a et ε_0.

b) Calculer le potentiel électrostatique $V(M)$ créé par ce système de charges en $M(0,0,z)$. Retrouver alors le résultat précédent.

c) Que vaut $\overrightarrow{E}(O)$? Le justifier à l'aide d'une étude des symétries

2) Trois charges électriques ponctuelles q, $2q$ et q sont situées sur l'axe Oy, respectivement aux points de coordonnées $(0,a)$, $(0,0)$ et $(0,-a)$. Soit $M(x,0)$ un point situé sur l'axe Ox. On pose :

$$\overrightarrow{E}(M) = E(x)\,\overrightarrow{u}$$

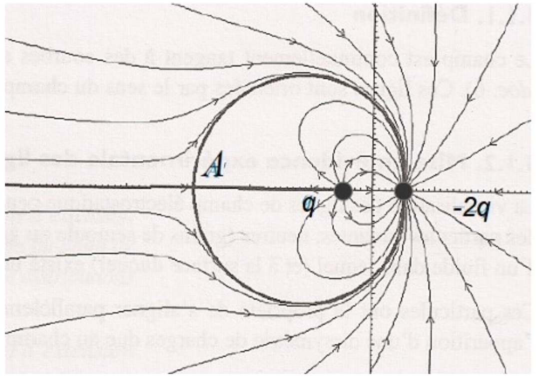
où $\overrightarrow{u}$ est un vecteur unitaire. Déterminer $\overrightarrow{u}$ grâce à une étude des symétries, puis calculer $E(x)$ en fonction de q, a, ε_0 et x.

2 Lignes de champ

Dans le plan Oxy, deux charges ponctuelles $+q$ et $-2q$ sont placées respectivement aux points $A_1(-a,0)$ et $A_2(a,0)$.

1) Déterminer l'expression du potentiel électrostatique créé par les charges en un point $M(x,y)$ du plan (Oxy) ; on exprimera le potentiel en fonction de x, y, q, ε_0 et a.

2) La figure ci-dessous donne le tracé de quelques lignes de champ. Sont-elles compatibles avec les symétries de cette distribution de charge ?



3) Déterminer l'expression du champ électrostatique $\overrightarrow{E}(A)$ au point A de coordonnées $(x_A,0)$ représenté sur la figure ci-dessus, en fonction de x_A, a, q et ε_0. Sachant que ce champ électrostatique est nul en A, déterminer l'abscisse $x_A < 0$ de ce point en calculant numériquement le rapport x_A/a.

3 Surfaces équipotentielles de deux charges ponctuelles

L'espace étant rapporté à un repère $(Oxyz)$, on place une charge ponctuelle q positive en O et une charge ponctuelle négative $-\lambda q$ en $A(a>0,0,0)$ où λ est un réel strictement positif.

1) Déterminer l'expression du potentiel électrique en un point $M(x,y,z)$ (on prendra $V=0$ à l'infini).

2) Quelle est la nature géométrique de la surface équipotentielle $V=0$ lorsque $\lambda = 1$?

3) Montrer que $\lambda \neq 1$, cette surface équipotentielle $V = 0$ est une sphère dont on déterminera les coordonnées du centre $C(x_c, y_c, z_c)$ et le rayon R.

4) La Figure 1 page suivante donne la trace des surfaces équipotentielles dans le plan (Oxy). L'équipotentielle $V = 0$ est en gras. Donner l'allure des lignes de champ. Évaluer les valeurs de λ et a sachant que les coordonnées des points A et B, exprimées en cm, sont $A(6, 0)$ et $B(12, 0)$. Vérifier la cohérence du résultat.

4 Étude de symétrie

Soient deux plaques carrées identiques, parallèles (l'une en face de l'autre), de surface S, d'épaisseur négligeable et situées respectivement en $z = -a/2$ et $z = +a/2$.

Les deux plaques sont uniformément chargées, la plaque supérieure portant une charge $+Q$ et l'autre une charge $-Q$.

1) Donner la relation liant Q aux densités surfaciques σ_1 et σ_2 de charge de chaque face.

2) À l'aide d'une étude des symétries, donner l'allure (direction et coordonnées dont il dépend) du champ électrostatique :

- a) En tout point de l'axe Oz.
- b) En tout point du plan (Oxy).

3) Soit $M(x, y, z)$ un point quelconque. Montrer que la composante $E_z(x, y, z)$ est une fonction paire de z et que les composantes $E_x(x, y, z)$ et $E_y(x, y, z)$ sont des fonctions impaires de z.

4) Montrer de même que $E_x(x, y, z)$ est une fonction impaire de x.

5 Champ créé par un fil

À l'aide du théorème de Gauss calculer le champ électrostatique créé en tout point M de l'espace par un fil rectiligne portant une densité linéique de charge λ uniforme. En déduire le potentiel électrostatique $V(M)$ en convenant que $V = 0$ à la distance $r = R$ du fil.

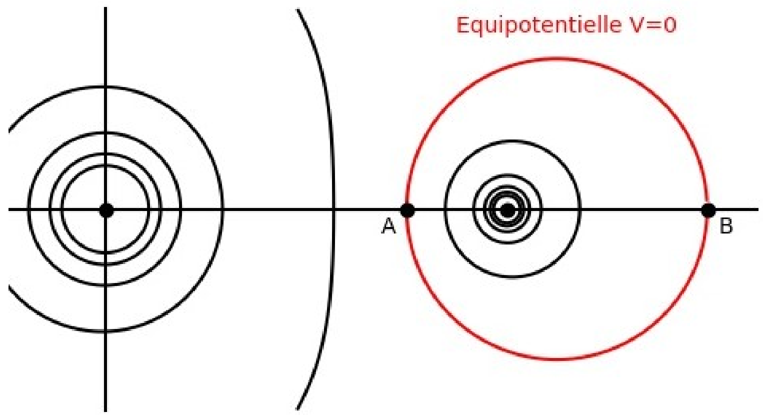


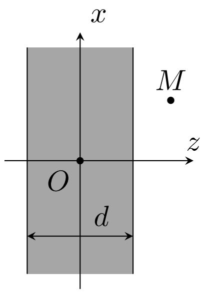
FIGURE 1 – Figure de l'exercice 3

6 Champ créé par une sphère

Une sphère de centre O et de rayon R porte une charge sur sa surface avec une densité surfacique σ uniforme. On pose $r = OM$. Déterminer grâce au théorème de Gauss le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ créé par cette distribution en tout point interne ou externe à la sphère. Calculer le potentiel $V(M)$ associé tel que $V = 0$ lorsque $r \longrightarrow +\infty$.

7 Champ électrostatique créé par une tranche

1) Des charges sont uniformément réparties avec une densité volumique de charge $\rho > 0$ constante dans une tranche d'épaisseur d (limitée par les plans $z = -d/2$ et $z = d/2$ et supposée infinie dans les autres directions).



Montrer en utilisant les symétries que le champ électrostatique est nul sur le plan $z = 0$.

2) Préciser la direction et le sens du champ électrostatique en un point $M(x, y, z)$ tel que $z \neq 0$.

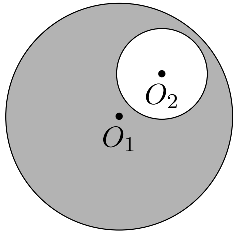
3) Tracer les lignes de champ électrique à l'intérieur de la tranche.

4) Déterminer le champ électrique en un point $M(x, y, z)$ à la distance $z > 0$ du centre de la tranche à l'aide du théorème de Gauss. Que peut-on dire du champ en son symétrique M' de cote $-z$?

5) Reprendre ce calcul en utilisant une équation locale de l'électrostatique.

8 Champ électrique dans une cavité

On considère une boule uniformément chargée de densité volumique de charge ρ, de centre O_1 et de rayon R_1, dans laquelle existe une cavité creuse de centre O_2 et de rayon R_2 telle que représentée sur la figure ci-dessous.



1) À l'aide du théorème de superposition montrer que le champ électrostatique dans la cavité est uniforme et donner son expression en fonction de ρ, ε_0 et du vecteur $\overrightarrow{O_1O_2}$.

2) Tracer les lignes du champ électrostatique dans la cavité.

9 Densité non uniforme

Un cylindre infini de rayon R possède une charge volumique $\rho(P)$ non uniforme mais à symétrie cylindrique. En tout point P de la distribution, de coordonnées (r_P, θ_P, z_P), on a :

$$\forall\, r_P \in [0, R],\ \ \rho(P) = \rho_0 \exp\left(-\frac{r_p}{R}\right)$$

À l'aide du théorème de Gauss, déterminer le champ électrique $\overrightarrow{E}(M)$ à la distance r de l'axe Oz en distinguant les cas $r < R$ et $r > R$.

10 Distribution de charges entre deux sphères concentriques

On donne en coordonnées sphériques :

$$\mathrm{div}(a(r)\,\overrightarrow{u_r}) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\, a(r)\right)$$

On considère une charge totale q négative répartie dans le volume situé entre deux sphères concentriques de rayons R_1 et R_2. On appelle $\rho(r)$ la densité volumique de charges entre R_1 et R_2, supposée à symétrie sphérique. Le champ électrostatique se met sous la forme :

$$\overrightarrow{E}(M) = k\,(r - R_1)\,\overrightarrow{u_r} \quad \text{pour} \quad R_1 \leqslant r \leqslant R_2$$

avec k constante.

1) Déterminer la densité volumique de charge $\rho(r)$ en fonction de k, r, R_1 et ε_0.

2) Déterminer k en fonction de q, ε_0, R_1 et R_2.

3) Déterminer le champ électrostatique en tout point de l'espace.

4) En déduire le potentiel électrostatique en tout point de l'espace. On posera $V(R_1) = 0$.

11 Calcul de densités de charges

On donne en coordonnées sphériques :

$$\mathrm{div}(a(r)\,\overrightarrow{u_r}) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,a(r)\right)$$

Un champ électrique à symétrique sphérique $\overrightarrow{E}(M) = E(r)\,\overrightarrow{u_r}$ a pour expression (r étant la distance au point O) :

$$E(r) = E_0 \text{ constante si } r < a \quad \text{et} \quad E(r) = 0 \text{ si } r > a$$

Ce champ est créé en partie par une distribution volumique de charges de densité ρ.

1) Déterminer ρ en tout point de l'espace.

2) Montrer qu'il existe nécessairement une densité surfacique de charge σ sur une surface à préciser et donner son expression.

12 Plasma

On donne en coordonnées sphériques : $\Delta\,a(r) = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\dfrac{\mathrm{d}a(r)}{\mathrm{d}r}\right)$

On étudie un milieu électriquement neutre, constitué de cations portant une charge électrique e et d'électrons libres de charge $-e$, porté à une température T (plasma ; en général T est de l'ordre de plusieurs milliers de K). On place une petite boule (supposée ponctuelle) de charge électrique q dans ce plasma, en un point O considéré comme l'origine des coordonnées. Celle-ci modifie la répartition des ions et des électrons. Les densités particulaires (nombre de particules par unité de volume) à la distance r de O sont alors données par :

$$n_{\text{ions}} = n_0 \exp\left(-\frac{eV(r)}{k_BT}\right) \quad \text{et} \quad n_{\text{e}} = n_0 \exp\left(+\frac{eV(r)}{k_BT}\right)$$

où n_0 est une constante. Les expressions précédentes constituent la loi de Boltzmann, k_B étant la constante de Boltzmann et T la température du plasma. $V(r)$ est le potentiel électrique qui existe à la distance r de O (avec la convention $V = 0$ à l'infini).

1) Exprimer la densité volumique de charges $\rho(r)$ qui existe à la distance r de O en fonction de e, n_{ions} et n_e. En donner une expression approchée lorsque $eV(r) \ll k_BT$.

2) À l'aide d'une équation locale de l'électrostatique, établir une équation différentielle vérifiée par $V(r)$.

3) En posant $F(r) = rV(r)$, trouver l'équation différentielle satisfaite par F. En donner la solution générale et montrer que l'on peut introduire une longueur caractéristique L_D, appelée *longueur de Debye*, qui caractérise l'évolution spatiale de $V(r)$.

4) Déterminer les deux constantes intervenant dans la solution générale $V(r)$ et donner l'expression de ce potentiel en fonction de q, ε_0, r et L_D.