

TD n°8 Champ et potentiel électrostatique

1 Équilibre de deux boules chargées

En un point d'un plafond, on attache deux fils identiques de longueur $L = 50$ cm. Aux deux extrémités de ces fils sont liées deux petites boules de même masse $m = 10$ g, qui portent la même charge électrique q et se trouvent en équilibre à une distance $a = 10$ cm l'une de l'autre.

Quelle est la charge électrique de chaque boule ? (Intensité de la pesanteur $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$)

2 Champ électrostatique créé par des charges ponctuelles

L'espace est rapporté à un repère $(Oxyz)$.

- 1) On considère quatre charges ponctuelles positives q placées sur les axes Ox et Oy , aux points $A(a, 0)$, $B(-a, 0)$, $C(0, a)$ et $D(0, -a)$.
 - a) Déterminer directement le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ en un point $M(0, 0, z)$ situé sur l'axe Oz . On mettra le résultat sous la forme $\vec{E}(M) = E(z) \vec{u}_z$ et on déterminera $E(z)$ en fonction de q , a et ε_0 .
 - b) Calculer le potentiel électrostatique $V(M)$ créé par ce système de charges en $M(0, 0, z)$. Retrouver alors le résultat précédent.
 - c) Que vaut $\vec{E}(O)$? Le justifier à l'aide d'une étude des symétries

- 2) Trois charges électriques ponctuelles q , $2q$ et q sont situées sur l'axe Oy , respectivement aux points de coordonnées $(0, a)$, $(0, 0)$ et $(0, -a)$. Soit $M(x, 0)$ un point situé sur l'axe Ox . On pose :

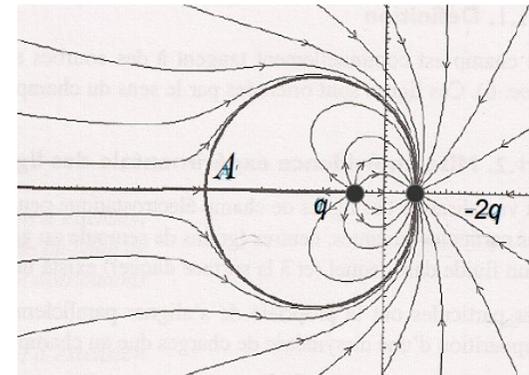
$$\vec{E}(M) = E(x) \vec{u}$$

où \vec{u} est un vecteur unitaire. Déterminer \vec{u} grâce à une étude des symétries, puis calculer $E(x)$ en fonction de q , a , ε_0 et x .

3 Lignes de champ

Dans le plan Oxy , deux charges ponctuelles $+q$ et $-2q$ sont placées respectivement aux points $A_1(-a, 0)$ et $A_2(a, 0)$.

- 1) Déterminer l'expression du potentiel électrostatique créé par les charges en un point $M(x, y)$ du plan (Oxy) ; on exprimera le potentiel en fonction de x , y , q , ε_0 et a .
- 2) La figure ci-dessous donne le tracé de quelques lignes de champ. Sont-elles compatibles avec les symétries de cette distribution de charge ?



- 3) Déterminer l'expression du champ électrostatique $\vec{E}(A)$ au point A de coordonnées $(x_A, 0)$ représenté sur la figure ci-dessus, en

fonction de x_A , a , q et ε_0 . Sachant que ce champ électrostatique est nul en A , déterminer l'abscisse $x_A < 0$ de ce point en calculant numériquement le rapport x_A/a .

4 lignes du champ magnétique terrestre

On admet qu'en un point M repéré par ses coordonnées sphériques (r, θ, φ) , l'expression du champ magnétique terrestre $\vec{B}(M)$ dans la base locale sphérique est :

$$\vec{B}(M) = -\frac{\mu_0 m_T}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \vec{u}_r + \sin \theta \vec{u}_\theta)$$

où $m_T > 0$ est une constante appelé moment magnétique terrestre et μ_0 la perméabilité magnétique du vide ($\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$).

On montre qu'une ligne de ce champ magnétique est l'ensemble des points M dont les coordonnées sphériques (r, θ, φ) sont liées par les deux équations :

$$r = r_0 \sin^2 \theta \quad \text{et} \quad \varphi = \varphi_0$$

où $r_0 > 0$ et $\varphi_0 \in [0, 2\pi[$ sont des constantes caractéristiques de la ligne de champ.

- 1) Tracer l'allure de la ligne de champ précédente. On fera un schéma en perspective dans le repère $(Oxyz)$, puis dans le plan contenant Oz et faisant un angle φ_0 avec l'axe Ox . Que représente r_0 sur ces schémas? En choisissant un point M de cette ligne de champ, indiquer le sens de $\vec{B}(M)$ en ce point.
- 2) Calculer l'intensité du champ magnétique sur une ligne de champ, c'est à dire $\|\vec{B}\|$, en fonction de l'angle θ uniquement et des constantes r_0 , μ_0 et m_T . En désignant par B_0 la valeur de cette intensité dans le plan équatorial magnétique (plan défini par $\theta = \pi/2$), écrire $\|\vec{B}\|$ sous la forme $\|\vec{B}\| = B_0 \times f(\theta)$. Exprimer B_0 en fonction de m_T , r_0 , μ_0 et expliciter la fonction $f(\theta)$.

- 3) Pour quelle valeur θ_m l'intensité du champ magnétique est-elle minimale? Représenter schématiquement le graphe de $\|\vec{B}\|$ en fonction de θ en précisant le domaine de variation de cet angle.

5 Surfaces équipotentielles de deux charges ponctuelles

L'espace étant rapporté à un repère $(Oxyz)$, on place une charge ponctuelle q positive en O et une charge ponctuelle négative $-\lambda q$ en $A(a > 0, 0, 0)$ où λ est un réel strictement positif.

- 1) Déterminer l'expression du potentiel électrique en un point $M(x, y, z)$ (on prendra $V = 0$ à l'infini).
- 2) Quelle est la nature géométrique de la surface équipotentielle $V = 0$ lorsque $\lambda = 1$?
- 3) Montrer que $\lambda \neq 1$, cette surface équipotentielle $V = 0$ est une sphère dont on déterminera les coordonnées du centre $C(x_c, y_c, z_c)$ et le rayon R .
- 4) La Figure 1 page suivante donne la trace des surfaces équipotentielles dans le plan (Oxy) . L'équipotentielle $V = 0$ est en gras. Donner l'allure des lignes de champ. Évaluer les valeurs de λ et a sachant que les coordonnées des points A et B , exprimées en cm, sont $A(6, 0)$ et $B(12, 0)$. Vérifier la cohérence du résultat.

6 Étude de symétrie

Soient deux plaques carrées identiques, parallèles (l'une en face de l'autre), de surface S , d'épaisseur négligeable et situées respectivement en $z = -a/2$ et $z = +a/2$.

Les deux plaques sont uniformément chargées, la plaque supérieure portant une charge $+Q$ et l'autre une charge $-Q$.

- 1) Donner la relation liant Q aux densités surfaciques σ_1 et σ_2 de charge de chaque face.
- 2) À l'aide d'une étude des symétries, donner l'allure (direction et coordonnées dont il dépend) du champ électrostatique :
 - a) En tout point de l'axe Oz .
 - b) En tout point du plan (Oxy) .
- 3) Soit $M(x, y, z)$ un point quelconque. Montrer que la composante $E_z(x, y, z)$ est une fonction paire de z et que les composantes $E_x(x, y, z)$ et $E_y(x, y, z)$ sont des fonctions impaires de z .
- 4) Montrer de même que $E_x(x, y, z)$ est une fonction impaire de x .

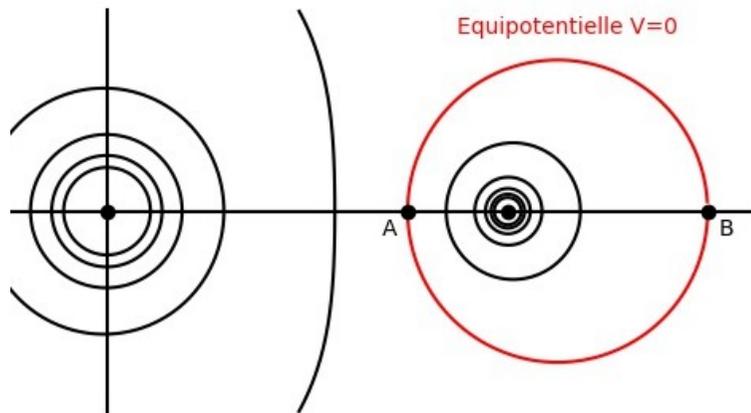


FIGURE 1 – Figure de l'exercice 5

7 Champ créé par un fil

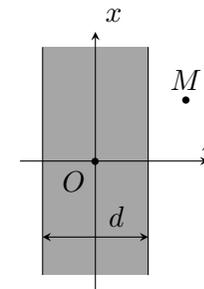
À l'aide du théorème de Gauss calculer le champ électrostatique créé en tout point M de l'espace par un fil rectiligne portant une densité linéique de charge λ uniforme. En déduire le potentiel électrostatique $V(M)$ en convenant que $V = 0$ à la distance $r = R$ du fil.

8 Champ créé par une sphère

Une sphère de centre O et de rayon R porte une charge sur sa surface avec une densité surfacique σ uniforme. On pose $r = OM$. Déterminer grâce au théorème de Gauss le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ créé par cette distribution en tout point interne ou externe à la sphère. Calculer le potentiel $V(M)$ associé tel que $V = 0$ lorsque $r \rightarrow +\infty$.

9 Champ électrostatique créé par une tranche

- 1) Des charges sont uniformément réparties avec une densité volumique de charge $\rho > 0$ constante dans une tranche d'épaisseur d (limitée par les plans $z = -d/2$ et $z = d/2$ et supposée infinie dans les autres directions).



Montrer en utilisant les symétries que le champ électrostatique est nul sur le plan $z = 0$.

- 2) Préciser la direction et le sens du champ électrostatique en un point $M(x, y, z)$ tel que $z \neq 0$.
- 3) Tracer les lignes de champ électrique à l'intérieur de la tranche.
- 4) Déterminer le champ électrique en un point $M(x, y, z)$ à la distance $z > 0$ du centre de la tranche à l'aide du théorème de Gauss. Que peut-on dire du champ en son symétrique M' de cote $-z$?
- 5) Reprendre ce calcul en utilisant une équation locale de l'électrostatique.
- 6) On place maintenant une particule de masse m et de charge $-q$ négative au point M de façon à ce que $-d/2 < z < d/2$ à tout instant. Quel sera son mouvement?

10 Distribution de charges entre deux sphères concentriques

On donne en coordonnées sphériques :

$$\operatorname{div}(a(r) \vec{u}_r) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 a(r))$$

On considère une charge totale q négative répartie dans le volume situé entre deux sphères concentriques de rayons R_1 et R_2 . On appelle $\rho(r)$ la densité volumique de charges entre R_1 et R_2 , supposée à symétrie sphérique. Le champ électrostatique se met sous la forme :

$$\vec{E}(M) = k(r - R_1) \vec{u}_r \quad \text{pour} \quad R_1 \leq r \leq R_2$$

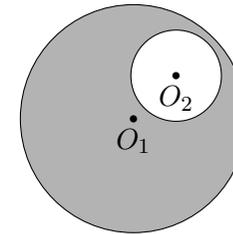
avec k constante.

- 1) Déterminer la densité volumique de charge $\rho(r)$ en fonction de k, r, R_1 et ε_0 .

- 2) Déterminer k en fonction de q, ε_0, R_1 et R_2 .
- 3) Déterminer le champ électrostatique en tout point de l'espace.
- 4) En déduire le potentiel électrostatique en tout point de l'espace. On posera $V(R_1) = 0$.

11 Champ électrique dans une cavité

On considère une boule uniformément chargée de densité volumique de charge ρ , de centre O_1 et de rayon R_1 , dans laquelle existe une cavité creuse de centre O_2 et de rayon R_2 telle que représentée sur la figure ci-dessous.



- 1) Montrer que le champ électrostatique dans la cavité est uniforme et donner son expression en fonction de ρ, ε_0 et du vecteur $\vec{O_1O_2}$.
Indication : penser au théorème de superposition
- 2) Tracer les lignes du champ électrostatique dans la cavité.

12 Densité non uniforme

Un cylindre infini de rayon R possède une charge volumique $\rho(P)$ non uniforme mais à symétrie cylindrique. En tout point P de la distribution, de coordonnées (r_P, θ_P, z_P) , on a :

$$\forall r_P \in [0, R], \quad \rho(P) = \rho_0 \exp\left(-\frac{r_P}{R}\right)$$

À l'aide du théorème de Gauss, déterminer le champ électrique $\vec{E}(M)$ à la distance r de l'axe Oz en distinguant les cas $r < R$ et $r > R$.

13 Calcul de densités de charges

On donne en coordonnées sphériques :

$$\operatorname{div}(a(r) \vec{u}_r) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 a(r))$$

Un champ électrique à symétrie sphérique $\vec{E}(M) = E(r) \vec{u}_r$ a pour expression (r étant la distance au point O) :

$$E(r) = E_0 \text{ constante si } r < a \text{ et } E(r) = 0 \text{ si } r > a$$

Ce champ est créé en partie par une distribution volumique de charges de densité ρ .

- 1) Déterminer ρ en tout point de l'espace.
- 2) Montrer qu'il existe nécessairement une densité surfacique de charge σ sur une surface à préciser et donner son expression.

14 Plasma

$$\text{On donne en coordonnées sphériques : } \Delta a(r) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{da(r)}{dr} \right)$$

On étudie un milieu électriquement neutre, constitué de cations portant une charge électrique e et d'électrons libres de charge $-e$, porté à une température T (plasma ; en général T est de l'ordre de plusieurs milliers de K). On place une petite boule (supposée ponctuelle) de charge électrique q dans ce plasma, en un point O considéré comme l'origine des coordonnées. Celle-ci modifie la répartition des

ions et des électrons. Les densités particulières (nombre de particules par unité de volume) à la distance r de O sont alors données par :

$$n_{\text{ions}} = n_0 \exp\left(-\frac{eV(r)}{k_B T}\right) \quad \text{et} \quad n_e = n_0 \exp\left(+\frac{eV(r)}{k_B T}\right)$$

où n_0 est une constante. Les expressions précédentes constituent la loi de Boltzmann, k_B étant la constante de Boltzmann et T la température du plasma. $V(r)$ est le potentiel électrique qui existe à la distance r de O (avec la convention $V = 0$ à l'infini).

- 1) Exprimer la densité volumique de charges $\rho(r)$ qui existe à la distance r de O en fonction de e , n_{ions} et n_e . En donner une expression approchée lorsque $eV(r) \ll k_B T$.
- 2) À l'aide d'une équation locale de l'électrostatique, établir une équation différentielle vérifiée par $V(r)$.
- 3) En posant $F(r) = rV(r)$, trouver l'équation différentielle satisfaite par F . En donner la solution générale et montrer que l'on peut introduire une longueur caractéristique L_D , appelée *longueur de Debye*, qui caractérise l'évolution spatiale de $V(r)$.
- 4) Déterminer les deux constantes intervenant dans la solution générale $V(r)$ et donner l'expression de ce potentiel en fonction de q , ε_0 , r et L_D .