D'après une partie du sujet Mines Ponts MP 2015

Un aspect fondamental de la gravitation est le principe d'équivalence. Introduit par Galilée au début du XVII$^{\text{ème}}$ *siècle alors qu'il étudiait la chute des corps, il fut le point de départ du développement de la théorie de la gravitation. Un peu moins d'un siècle plus tard, Newton fut le premier à décrire l'interaction gravitationnelle par une formule. Il en déduisit la version la plus élémentaire du "principe d'équivalence" : la trajectoire d'un corps tombant en chute libre ne dépend ni de sa structure, ni de sa composition. Autrement dit les masses d'inertie et pesante sont égales.*

L'expérience d'Eötvös

1.– Qu'appelle-t-on "principe d'inertie" en mécanique ? Énoncer le principe fondamental de la dynamique dans un référentiel galiléen. La grandeur caractéristique du mobile étudié dans cette expression porte, ici et dans la suite, le nom de *masse inerte* m_i.

2.– Expliciter la force de gravitation entre deux points matériels. On introduira le paramétrage nécessaire sur un schéma. La grandeur caractéristique des points matériels intervenant dans cette expression porte le nom de *masse grave* ou *masse pesante*.

Quantifier les déviations possibles au principe d'équivalence faible suppose que l'on puisse considérer les masses inertielle m_i et grave (ou pesante) m comme pouvant être différentes. Les premières mesures précises des écarts relatifs entre masses inertielle et grave, ont été obtenues par comparaison des périodes de deux pendules simples de masse et de composition différentes ; cette méthode, d'abord décrite par Galilée, a été menée à bien par Newton (1686) ou encore Bessel (1826) et a conduit à des valeurs d'écarts relatifs compris entre 10^{-3} et 10^{-5}. L'invention du pendule de torsion par Etövös autour de 1888, permit d'augmenter fortement la sensibilité.

I – Mesure du coefficient de torsion du pendule

L'expérience d'Eötvös utilise un pendule de torsion. Dans le dispositif simplifié, représenté sur la Figure 1, deux sphères appelées S_1 et S_2, homogènes de nature différente et de même masse pesante m ont leurs centres d'inertie placés aux extrémités d'une barre rigide, de masse M et de longueur $2L$, suspendue en son centre à un fil de quartz très fin, de constante de torsion C. On note m_{i1} et m_{i2} les masses inertielles respectives de S_1 et de S_2. La barre est libre de tourner autour de l'axe Oz en tordant plus ou moins le ruban de suspension. On suppose que la barre reste tout le temps de l'expérience dans le plan orthogonal à l'axe Oz.

Le dispositif est placé de sorte qu'à l'équilibre, la barre soit normale au plan méridien à la latitude λ. Sa position est alors repérée par réflexion d'un faisceau lumineux sur un miroir plan, fixé au milieu de la barre, à l'aide d'une lunette. On note $\mathscr{R}$ le référentiel du laboratoire centré sur O et supposé galiléen dans

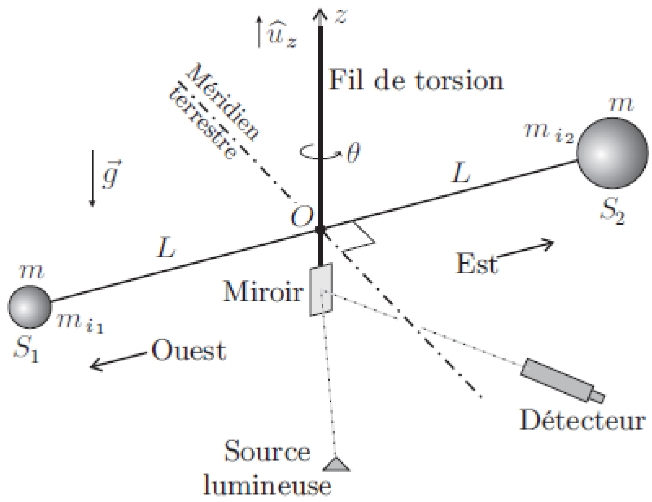

FIGURE 1 – Dispositif d'Eötvös.

cette sous-partie où l'objectif est la détermination de la constante de torsion C du pendule.

On note J le moment d'inertie du système $S = \{\text{barre} + \text{sphères}\}$ par rapport à l'axe vertical (Oz). On repère la position de la barre à l'instant t par l'angle de torsion $\theta(t)$. On fait tourner le système d'un angle θ_m puis on le lâche sans vitesse initiale. Le fil exerce alors sur la barre un couple de rappel dont le moment en O s'écrit $\overrightarrow{M_O} = -C(\theta(t) - \theta_0)\,\overrightarrow{e_z}$, l'angle θ_0 repère la position de la barre en l'absence de torsion.

On rappelle[1] que, pour un solide en rotation autour d'un axe fixe avec le vecteur oration $\overrightarrow{\omega}$, la puissance d'une action extérieure dont le moment est $\overrightarrow{M_O}$ où O est un point de l'axe de rotation s'écrit : $\mathscr{P} = \overrightarrow{M_O}.\overrightarrow{\omega}$.

3.– Montrer que ce couple dérive d'une énergie potentielle que l'on déterminera. En déduire l'énergie potentielle $E_{p,S}$ de S en fonction de C et $\theta - \theta_0$. On choisira $E_p(\theta_0) = 0$. Déterminer l'énergie cinétique $E_{c,S}$ du solide S. En déduire l'expression de l'énergie mécanique de S en fonction de C, J, θ, θ_0 et $\dot{\theta} = \mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$

4.– On fait l'hypothèse que la puissance totale des forces de frottement peut se mettre sous la forme $\mathscr{P}_{\text{frot}} = -\alpha\,\dot{\theta}^2$ où α est une constante positive. Établir l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$.

5.– On observe des oscillations très faiblement amorties. Quelle est la condition satisfaite par les constantes J, C et α ? Préciser la forme de la solution sans déterminer l'expression exacte des deux constantes d'intégration. Quelle est la valeur θ_∞ de $\theta(t)$ lorsque $t \longrightarrow \infty$. Exprimer la pseudo-période T du mouvement en fonction de la période propre T_0 et de la constante $\varepsilon = \frac{\alpha}{2\sqrt{JC}} \ll 1$. À quelle condition sur ε, l'erreur relative introduite par l'approximation $T \approx T_0$ est-elle inférieure à 1% ?

1. Ajout personnel au sujet, non présent dans l'énoncé original mais permettant d'aborder correctement les questions suivantes. F.Rauscher.

Cette condition sera supposée vérifiée par la suite.

On note respectivement $J(m_{i1})$ et $J(m_{i2})$ les moments d'inertie de chacune des deux sphères par rapport à l'axe vertical passant par son centre respectif et J_0 le moment d'inertie de la barre par rapport à (Oz). On admettra [2] que $J = J_0 + J(m_{i1}) + J(m_{i2}) + (m_{i1}+m_{i2})L^2$. On mesure la période T des oscillations pour différentes valeurs de la longueur L et les résultats sont consignés dans le tableau ci-dessous :

L [m]	$6{,}0\times10^{-2}$	$7{,}0\times10^{-2}$	$8{,}0\times10^{-2}$
T [s]	436	509	581

6.– En utilisant les résultats précédents, écrire la relation entre T^2, L^2, J_0, $J(m_{i1})$, $J(m_{i2})$, $m_{i1}+m_{i2}$ et C. À partir des résultats de mesure et compte-tenu des ordres de grandeurs des différents termes intervenant dans l'expression de T montrer que l'on peut écrire :

$$m_{i1} + m_{i2} \approx \frac{CT^2}{4\pi^2 L^2}$$

Pour la suite, comme $m_{ik} = m + \eta_k$ *avec* $\eta_k \ll 1$ *pour* $k \in \{1,2\}$ *on considèrera une valeur approchée de la formule précédente à l'ordre 0 en* η_1 *ou* η_2.

7.– On a utilisé deux sphères de masse pesante $m = 0{,}2$ kg. En déduire une estimation de la valeur de la constante de torsion C.

II – Résultats et précision de l'expérience

Dans cette sous-partie le référentiel $\mathscr{R}$ du laboratoire n'est plus supposé galiléen et l'on prend en compte les éventuels effets de la rotation de la terre sur les masses inertes m_{i1} et m_{i2} a priori différentes des deux sphères. On se place donc dans le référentiel géocentrique $\mathscr{R}_G$ supposé galiléen et muni d'un repère $(GXYZ)$ où G est le barycentre de la Terre et GZ l'axe des pôles. On note $\overrightarrow{e_Z}$ le vecteur unitaire de cet axe.

La Terre est supposée en rotation uniforme à la vitesse $\overrightarrow{\omega_t} = \omega_t\,\overrightarrow{e_Z}$ autour de l'axe des pôles et le point O se trouve à la latitude λ. Une vue en coupe de la situation est représentée sur la Figure 2.

L'ensemble constitué du pendule et du système optique est solidaire d'une plateforme. Lors d'une première mesure dans la configuration de la Figure 1, on relève une valeur $\theta_{\infty 1}$ pour l'équilibre du pendule. On fait alors tourner la plateforme d'un angle π afin d'inverser les positions des deux sphères, et l'on répète la mesure. On relève une valeur $\theta_{\infty 2}$ pour l'équilibre du pendule dans cette nouvelle configuration.

8.– Déterminer les composantes des forces d'inertie d'entraînement subies par m_{i1} et m_{i2} dans la base $(\overrightarrow{u_z}, \overrightarrow{u_\rho}, \overrightarrow{u_\lambda})$ en fonction de λ, L, ω_t, R_t, m_{i1} ou m_{i2}.

2. Ceci résulte simplement de l'additivité des moments d'inerties et du théorème de Huyghens, ce qui devrait dire quelquechose aux élèves de l'option SI. F.Rauscher

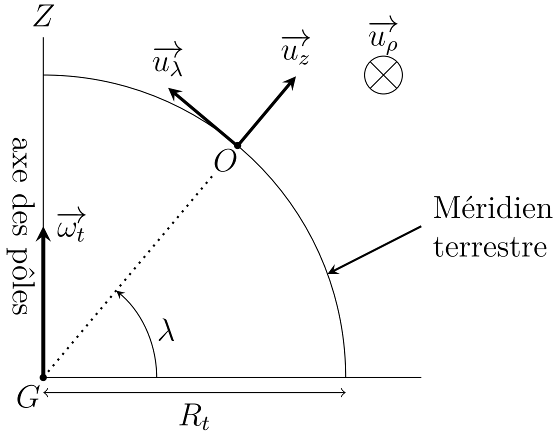

FIGURE 2 – Vue en coupe.

9.– En exploitant le théorème du moment cinétique à l'équilibre, déterminer l'écart angulaire $\Delta\theta = \theta_{\infty 1} - \theta_{\infty 2}$ entre les deux expériences en fonction de λ, C, L, ω_t, R_t, m_{i1} et m_{i2}.

10.– La lunette utilisée pour la mesure permet de détecter une déviation du faisceau lumineux de l'ordre de 1,0 mm à 2,0 m de distance. En utilisant l'expression trouvée à la question 6, déterminer la précision de la méthode en estimant le rapport $\delta m = \dfrac{|m_{i1} - m_{i2}|}{m}$. On donne $\lambda = 45°$, $R_t = 6{,}4.10^3$ km et $L = 6{,}0$ cm.

11.– La déviation observée est nulle. Que déduire de ce résultat ?