D'après le sujet de mécanique CCINP MP 2021

Note : *dans la première version du sujet il y avait une erreur de signe dans les réactions* $\overrightarrow{R_1}$ *et* $\overrightarrow{R_2}$ *du sol sur les roues, au niveau des réactions tangentielles. L'erreur a été rectifiée dans le sujet mis en ligne Mardi 26 octobre 2021 à 14h.*

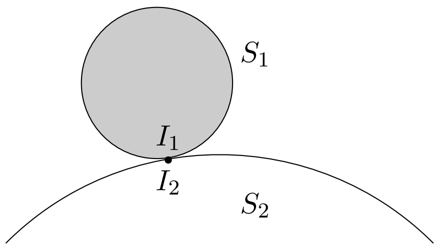
Course-poursuite dans les rues de Rio : une opération savamment préparée ?

1) a) Le contact entre les deux solides (S_1) et (S_2) se faisant selon un seul point I, nous distinguons deux points confondus à l'instant t :

- Le point I_1 qui appartient à (S_1) et qu'on peut noter aussi $I \in S_1$;
- Le point I_2 qui appartient à (S_2) et qu'on peut noter aussi $I \in S_2$;

On a bien sûr $I_1 = I_2 = I$ à l'instant t. Si R est un repère attaché à un référentiel $(\mathscr{R})$ quelconque alors la vitesse de glissement $\overrightarrow{v_g}$ de (S_1) par rapport à (S_2) s'écrit :

$$\boxed{\overrightarrow{v_g}(t) = \overrightarrow{v}_{I_1/R} - \overrightarrow{v}_{I_2/R} = \overrightarrow{v}_{I\in S_1/R} - \overrightarrow{v}_{I\in S_2/R}}$$



b) Non car d'après le cours, cette vitesse ne dépend pas du référentiel (et donc du repère attaché) choisi.

c) On note $\overrightarrow{R}_{2/1}$ l'action de (S_2) sur (S_1) (l'action de (S_1) sur (S_2) étant $\overrightarrow{R}_{1/2} = -\overrightarrow{R}_{2/1}$ en raison du principe des actions réciproques). On décompose :

$$\overrightarrow{R}_{2/1} = \overrightarrow{T}_{2/1} + \overrightarrow{N}_{2/1}$$

où $\overrightarrow{T}_{2/1}$ est la composante tangentielle et $\overrightarrow{N}_{2/1}$ la composante normale. L'absence de glissement (adhérence) persiste tant que :

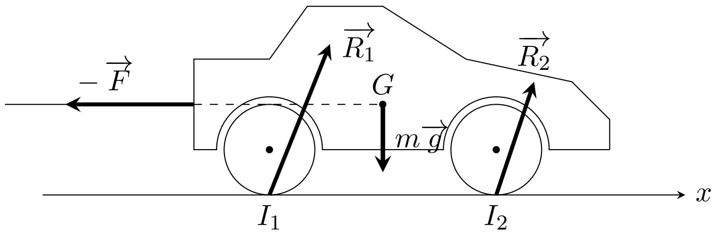
$$\frac{\|\overrightarrow{T}_{2/1}\|}{\|\overrightarrow{N}_{2/1}\|} < f_s$$

et se rompt lorsque :

$$\frac{\|\overrightarrow{T}_{2/1}\|}{\|\overrightarrow{N}_{2/1}\|} \geqslant f_s$$

Inversement, on passe du glissement à l'adhérence lorsque la vitesse de de glissement $\overrightarrow{v_g}$ s'annule.

2) On a donc le schéma ci-dessous :



La voiture est soumise :

- aux réactions de la route $\overrightarrow{R_1}$ et $\overrightarrow{R_2}$ respectivement appliquées en I_1 et en I_2 ;
- à son poids $m\,\overrightarrow{g}$ appliqué en G ;
- à la force exercée par le filin. Comme celui-ci est sans masse, cette force est $-\overrightarrow{F}$, opposé de la force exercée par le filin sur le conteneur.

Remarque : les actions exercées par le moteur sur la roue avant sont des forces internes au système {voiture}.

3) Le filin étant tendu, le conteneur possède la même vitesse $\overrightarrow{V} = V\,\overrightarrow{e_x}$ constante que la voiture (le conteneur étant en translation, tous les points de celui-ci ont la même vitesse $\overrightarrow{V}$). Le théorème du centre d'inertie (TCI) appliqué dans le réferentiel terrestre supposé galiléen conduit à :

$$m_0 \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{V}}{\mathrm{d}t}\right)_{R_T} = \overrightarrow{0} = m_0\,\overrightarrow{g} + \overrightarrow{R_0} + \overrightarrow{F} = m_0\,\overrightarrow{g} - T_0\,\overrightarrow{e_x} + N_0\,\overrightarrow{e_z} + \overrightarrow{F}$$

En projection sur $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y})$ on obtient :

$$N_0 = m_0 g \quad \text{et} \quad F = T_0$$

Or, comme le conteneur glisse sur la route, la loi de Coulomb s'applique et la réaction tangentielle est opposée à la vitesse de glissement, donc $T_0 > 0$. De plus, $T_0 = f_0 N_0 = f_0 m_0 g$. On a donc :

$$\boxed{\overrightarrow{F} = f_0 m_0 g\,\overrightarrow{e_x}}$$

4) a) Il s'agit d'appliquer le théorème de la puissance cinétique à la voiture dont l'énergie cinétique reste constante. Pour un système (la voiture) qui n'est pas un solide ce théorème n'est pas vraiment au programme (sauf pour les élèves qui suivent l'option SI), ce qui est criticable. Ce théorème dit que :

$$\left(\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t}\right)_{R_T} = \mathscr{P}_{\text{int}} + \mathscr{P}_{\text{ext}}$$

où $\mathscr{P}_{\text{int}}$ est la puissance des **forces intérieures** au système et où $\mathscr{P}_{\text{ext}}$ est la puissance des **forces extérieures** au système.

- Les forces intérieures sont les actions des liaisons pivots des roues qui sont de puissance nulle puisque ces liaisons pivots sont parfaites et la puissance des forces exercées par le moteur qui vaut P_m d'après l'énoncé.

- Les forces extérieures sont les réactions de la route $\overrightarrow{R_1}$ et $\overrightarrow{R_2}$ de puissances nulles d'après l'énoncé, le poids $m\,\overrightarrow{g}$ de puissance nulle car orthogonal à $\overrightarrow{V}$ et la force $-\overrightarrow{F}$ de puissance $-\overrightarrow{F}.\overrightarrow{V}$. On a donc :

$$\left(\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t}\right)_{R_T} = 0 = P_m - \overrightarrow{F}.\overrightarrow{V}$$

d'où :

$$\boxed{P_m = \overrightarrow{F}.\overrightarrow{V}}$$

b) On a donc :

$$\boxed{P_m = f_0 m_0 g V \overset{AN}{=} 0{,}4 \times 4500 \times 10 \times 190\,000/3600 = 950\,\mathrm{kW}}$$

ce qui représente 1291 ch. Vu que la valeur moyenne des puissances des voitures circulant en France est de 117 ch, que la puissance d'un camion semi-remorque est de l'ordre de 400 ch, ce chiffre est donc totalement irréaliste, même avec deux voitures !

5) a) Si S est un solide en rotation autour d'un axe Δ fixe dans un référentiel galiléen muni d'un reprère R, que O est un point de Δ et que $\overrightarrow{u}$ est le vecteur unitaire directeur de Δ, alors :

- Si $\overrightarrow{L_O}(S/R)$ est le moment cinétique de S par rapport à O, sa projection sur l'axe de rotation Δ s'écrit :

$$L_\Delta = \overrightarrow{L_O}(S/R).\overrightarrow{u} = J_\Delta\,\omega$$

où J_Δ est le moment d'intertie de S par rapport à Δ et ω la vitesse angulaire de rotation de S autour de Δ.

- Si $\overrightarrow{M_O}(\overrightarrow{F}_{\text{ext}})$ est le moment par rapport à O des forces exercées par l'extérieur sur S, sa projection sur Δ s'écrit :

$$M_\Delta = \overrightarrow{M_O}(\overrightarrow{F}_{\text{ext}}).\overrightarrow{u}$$

- Le théorème scalaire du moment cinétique s'écrit alors :

$$\boxed{J_\Delta \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = M_\Delta}$$

b)
- Pour la roue arrière :

La réaction du sol $\overrightarrow{R_1}$, le poids de la roue qui s'applique en O_1 (centre de la roue), les actions de la liaison pivot dont le moment est nul si cette liaison est parfaite.

- Pour la roue avant :

La réaction du sol $\overrightarrow{R_2}$, le poids de la roue qui s'applique en O_2 (centre de la roue), les actions de la liaison pivot dont le moment est nul si cette liaison est parfaite et le moment des actions du moteur $\overrightarrow{\Gamma} = \Gamma_m\,\overrightarrow{e_y}$.

c) On applique le TMC à chaque roue dans le référentiel de la voiture, galiléen puisqu'en translation rectiligne uniforme par rapport au référentiel terrestre galiléen.

- **Roue arrière** : l'axe de rotation est $\Delta_1 = O_1\overrightarrow{e_y}$. La vitesse angulaire ω_1 est constante puisque la voiture roule à vitesse constante V. On a :

$$J_{\Delta_1}\frac{d\omega_1}{dt} = 0 = M_{\Delta_1}(\overrightarrow{R_1}) + \underbrace{M_{\Delta_1}(\text{poids})}_{=0} + \underbrace{M_{\Delta_1}(\text{pivot})}_{=0} = -\frac{d}{2}T_1$$

d'où : $\boxed{T_1 = 0}$

- **Roue avant** : l'axe de rotation est $\Delta_2 = O_2\overrightarrow{e_y}$. La vitesse angulaire ω_2 est constante pour la même raison. Il vient :

$$J_{\Delta_2}\frac{d\omega_2}{dt} = 0 = M_{\Delta_2}(\overrightarrow{R_2}) + \underbrace{M_{\Delta_1}(\text{poids})}_{=0} + \underbrace{M_{\Delta_1}(\text{pivot})}_{=0} + M_{\Delta_1}(\text{moteur}) = -\frac{d}{2}T_2 + \Gamma_m$$

d'où $\boxed{\Gamma_m = T_2\,\frac{d}{2}}$.

6) a) On applique le théorème du centre d'inertie (TCI) à la voiture dans le référentiel terrestre, en projection sur $\overrightarrow{e_x}$. L'accélération de G étant nulle, on obtient :

$$0 = -F + T_1 + T_2 \quad \text{d'où} \quad \boxed{F = T_2}$$

b) On en déduit :

$$\boxed{\Gamma_m = F\,\frac{d}{2} = f_0 m_0 g\,\frac{d}{2}\,\overrightarrow{e_x}}$$

A.N. $\Gamma_m = 4500$ N.m (couple moteur).

7) a) Parce qu'il s'agit d'une force intérieure au système {voiture}. Or le TMC ne fait intervenir que les forces exercées par l'extérieur sur le système étudié.

b) Si on applique le TCI à la voiture dans le référentiel terrestre et qu'on projette sur $\overrightarrow{e_z}$, on obtient l'équation :

$$N_1 + N_2 = mg$$

On a donc deux équations à deux inconnues N_1 et N_2 qu'on peut facilement résoudre pour obtenir :

$$\boxed{N_1 = \frac{mg}{2} + \frac{T_2 h}{2b} = \frac{mg}{2} + \frac{f_0 m_0 g h}{2b}}$$

et

$$\boxed{N_2 = \frac{mg}{2} - \frac{T_2 h}{2b} = \frac{mg}{2} - \frac{f_0 m_0 g h}{2b}}$$

8) a) Puisque $T_1 = 0$, la loi de Coulomb est toujours vérifiée pour la roue arrière : elle ne glissera donc jamais. En revant la roue avant ne glisse pas tant que :

$$|T_2| = f_0 m_0 g < f_s\left(\frac{mg}{2} - \frac{f_0 m_0 g h}{2b}\right)$$

b) On isole m_0 pour trouver :

$$m_0 f_0 g\left(1 + f_s\frac{h}{2b}\right) < f_s\,\frac{mg}{2}$$

d'où le résultat :

$$\boxed{m_0 < m\,\frac{f_s}{2f_0\,\left(1 + f_s\frac{h}{2b}\right)} = m_{0,\text{max}}}$$

c) A.N. : $m_{0,\text{max}} = 3{,}2.10^3$ kg $= 3{,}2$ tonnes. Cette masse semble être un bon ordre de grandeur pour un conteneur (qui doit sûrement contenir beaucoup de lingots d'or). On peut donc concevoir que la voiture ne glisse pas.

9) a) On échange alors les rôles des roues avant et arrière. Le TMC scalaire appliqué à chacune des roues conduit à :

$$\boxed{\Gamma_m = T_1 \frac{d}{2} \quad \text{et} \quad T_2 = 0}$$

Le TCI appliqué à la voiture conduit alors à : $\boxed{T_1 = F = f_0 m_0 g}$.

b) Dans ce cas, c'est la roue avant qui ne glissera jamais alors que la roue arrière risque de déraper. Il n'y a pas de dérapage tant que :

$$|T_1| = f_0 m_0 g < f_s \left(\frac{mg}{2} + \frac{f_0 m_0 g h}{2b} \right)$$

c) La résolution de l'inégalité précédente conduit alors à :

$$\boxed{m_0 < m \frac{f_s}{2f_0 \left(1 - f_s \frac{h}{2b}\right)} = m'_{0,\text{max}}}$$

d) A.N. : $m'_{0,\text{max}} = 4{,}6.10^3$ kg $= 4{,}6$ tonnes. Ceci améliore donc les choses du moins au niveau de l'absence de glissement (mais pas au niveau de la puissance nécessaire).