

Corrigé du sujet Mines Ponts MP 2015

L'expérience d'Eötvös

1. – On peut en donner deux versions :

Version avec point matériel :

"Il existe au moins un référentiel dans lequel tout point matériel isolé admet un mouvement rectiligne uniforme"

Version avec un système matériel non ponctuel :

"Il existe au moins un référentiel dans lequel le centre d'inertie de tout système matériel isolé admet un mouvement rectiligne uniforme"

De tels référentiels sont appelés référentiels galiléens. Dans un tel référentiel, tout écart par rapport au mouvement rectiligne est interprété comme une interaction entre le système et le reste de l'univers, interaction modélisée par un vecteur force. Le principe fondamental de la dynamique pour un point matériel de vitesse \vec{v} et de masse (inerte) m s'énonce ainsi :

$$\boxed{m \left(\frac{d\vec{v}}{dt} \right)_{R_G} = \vec{F}}$$

où \vec{F} est la somme des forces exercées sur le point.

2. – Deux points matériels M_1 et M_2 , de masses (pesantes) m_1 et m_2 exercent l'un sur l'autre des forces attractives et opposées, dont l'expression est :

$$\boxed{\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = -G m_1 m_2 \frac{\overrightarrow{M_1 M_2}}{\|M_1 M_2\|^3}}$$

où G est la constante universelle de la gravitation.



3. – On montre qu'il existe une fonction $E_{p,S}$ vérifiant :

$$\mathcal{P} = \overrightarrow{M_O} \cdot \vec{\omega} = -\frac{dE_p}{dt}$$

En effet, $\mathcal{P} = -C(\theta - \theta_0) \vec{e}_z \cdot \dot{\theta} \vec{e}_z = -C(\theta - \theta_0) \dot{\theta}$. On en déduit que :

$$\mathcal{P} = \frac{d}{dt} \left(\frac{C(\theta - \theta_0)^2}{2} \right)$$

et la fonction :

$$E_{p,S}(\theta) = \frac{C(\theta - \theta_0)^2}{2}$$

convient parfaitement.

S étant en rotation autour de l'axe fixe Oz , son énergie cinétique s'écrit :

$$E_{c,S} = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2$$

et son énergie mécanique est donc :

$$E_{m,S} = E_{c,S} + E_{p,S} = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 + \frac{C(\theta - \theta_0)^2}{2}$$

4. – On applique le théorème de l'énergie mécanique au solide S dans le référentiel du laboratoire \mathcal{R} supposé galiléen :

$$\frac{dE_{m,S}}{dt} = \mathcal{P}(\vec{F}_{nc}) = -\alpha \dot{\theta}^2$$

ce qui conduit à :

$$J \dot{\theta} \ddot{\theta} + C(\theta - \theta_0) \dot{\theta} = -\alpha \dot{\theta}^2$$

et donc :

$$\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{J} \dot{\theta} + \frac{C}{J} \theta = \frac{C}{J} \theta_0$$

5. – L'énoncé indique un régime oscillatoire amorti : il s'agit donc du régime pseudo-périodique. L'équation caractéristique s'écrit : $r^2 + (\alpha/J)r + (C/J) = 0$. Son discriminant vérifie donc :

$$\Delta = \frac{\alpha^2}{J^2} - 4 \frac{C}{J} < 0$$

Il y a donc deux racines complexes conjuguées qui s'écrivent :

$$r_{\pm} = -\frac{\alpha}{2J} \pm i \sqrt{\frac{C}{J} - \frac{\alpha^2}{4J^2}}$$

En introduisant la pseudo-pulsation $\omega = \sqrt{\frac{C}{J} - \frac{\alpha^2}{4J^2}}$, la solution générale est (avec la solution particulière) :

$$\theta(t) = e^{-\alpha t/2J} (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)) + \theta_0$$

On en déduit que :

$$\theta_{\infty} = \theta_0 \quad \text{et} \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{C}} \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}$$

La pulsation propre de l'équation différentielle de l'oscillateur amorti est $\omega_0 = \sqrt{C/J}$, ce qui fait que la période propre est : $T_0 = 2\pi\sqrt{J/C}$ et donc :

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \approx T_0 \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{2} \right)$$

L'erreur relative s'écrit :

$$\frac{|T - T_0|}{T_0} = \frac{\varepsilon^2}{2} \leq 1\% \quad \text{d'où} \quad \varepsilon \leq 0,14$$

Cette condition sera supposée vérifiée par la suite.

6. – L'énoncé nous incite à assimiler T à T_0 , ce qui entraîne :

$$T^2 = \frac{4\pi^2 J}{C} = \frac{4\pi^2 (J_0 + J(m_{i1}) + J(m_{i2}))}{C} + \frac{4\pi^2 (m_{i1} + m_{i2})}{C} L^2$$

L [m]	$6,0 \times 10^{-2}$	$7,0 \times 10^{-2}$	$8,0 \times 10^{-2}$
T [s]	436	509	581

Afin de vérifier cette loi, le mieux est de faire une régression linéaire sur les couples (L^2, T^2) . On obtient un coefficient de corrélation $r = 0,999992$ mais surtout les coefficients de la droite $T^2 = a L^2 + b$:

$$a = 5,3 \cdot 10^7 \quad \text{et} \quad b = 7,1 \cdot 10^2$$

Or, la plus petite valeur de L est $6,0 \cdot 10^{-2}$ m et, pour cette valeur on a $a L^2 = 1,9 \cdot 10^5 \gg b$. Ainsi, dans le domaine de valeurs expérimentales de L fournies par le tableau, on peut parfaitement négliger b qui correspond à $\frac{4\pi^2 (J_0 + J(m_{i1}) + J(m_{i2}))}{C}$ et écrire :

$$T^2 \approx a L^2 = \frac{4\pi^2 (m_{i1} + m_{i2})}{C} L^2 \quad \text{d'où} \quad m_{i1} + m_{i2} \approx \frac{C T^2}{4\pi^2 L^2}$$

7. – Comme $m_{i1} + m_{i2} = 2m + \eta_1 + \eta_2 \approx 2m$, on en tire que :

$$C \approx \frac{8\pi^2 m L^2}{T^2}$$

Les trois valeurs du tableau nous donnent trois valeurs de C :

C_1	C_2	C_3
$2,991 \cdot 10^{-7}$	$2,987 \cdot 10^{-7}$	$2,994 \cdot 10^{-7}$

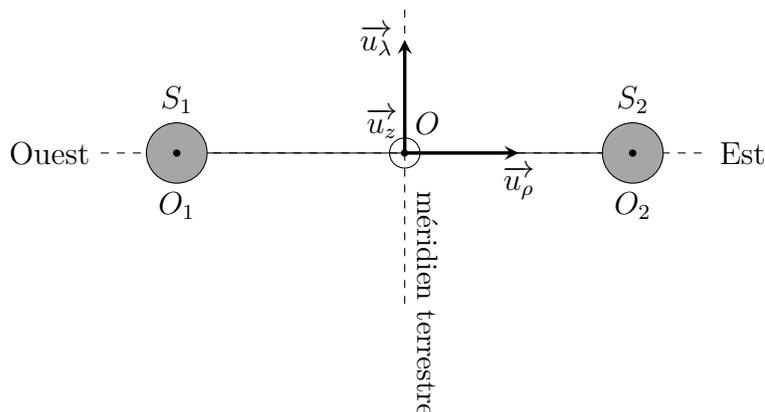
La valeur moyenne de ces trois valeurs est donc¹ :

$$C = 2,991 \cdot 10^7 \approx 3,0 \cdot 10^{-7} \text{ N.m}$$

1. On finit par ne laisser que deux chiffres significatifs pour exprimer C , conformément aux données de l'énoncé. On voit donc qu'il serait judicieux de donner L avec plus de précision.

II – Résultats et précision de l'expérience

Comme semble le proposer l'énoncé, nous allons nous mettre dans la configuration de la Figure 1. et supposer que, pour chaque cas d'équilibre, la torsion du fil de quartz $\theta_\infty - \theta_0$ a été réglée de sorte que le pendule soit en équilibre selon l'axe Ouest - Est, perpendiculaire au méridien terrestre passant par O . La disposition d'équilibre est donc celle de la figure ci dessous :



On étudie le pendule dans le référentiel terrestre non galiléen et on travaille dans la base orthonormée directe $(\vec{u}_z, \vec{u}_\rho, \vec{u}_\lambda)$.

8. – En notant O_1 et O_2 les centres des deux sphères S_1 et S_2 (qu'on va assimiler à des points matériels), les accélérations d'entraînement s'écrivent respectivement² :

$$\vec{a}_e(O_1) = \vec{\omega}_t \wedge (\vec{\omega}_t \wedge \vec{GO}_1) \quad \text{et} \quad \vec{a}_e(O_2) = \vec{\omega}_t \wedge (\vec{\omega}_t \wedge \vec{GO}_2)$$

où G est le centre de la Terre. On a :

$$\vec{\omega}_t = \omega_t \vec{e}_Z = \omega_t (\sin \lambda \vec{u}_z + \cos \lambda \vec{u}_\lambda)$$

et

$$\vec{GO}_2 = \vec{GO} + \vec{OO}_2 = R_t \vec{u}_z + L \vec{u}_\rho$$

d'où, dans la base de travail :

$$\vec{\omega}_t \wedge \vec{GO}_2 = \omega_t \begin{pmatrix} \sin \lambda \\ 0 \\ \cos \lambda \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} R_t \\ L \\ 0 \end{pmatrix} = \omega_t \begin{pmatrix} -L \cos \lambda \\ R_t \cos \lambda \\ L \sin \lambda \end{pmatrix}$$

puis :

$$\vec{a}_e(O_2) = \vec{\omega}_t \wedge (\vec{\omega}_t \wedge \vec{GO}_2) = \omega_t^2 \begin{pmatrix} -R_t \cos^2 \lambda \\ -L \\ R_t \cos \lambda \sin \lambda \end{pmatrix}$$

2. Dans le travail de projection qu'il y a à faire dans cette question, il n'est pas judicieux d'utiliser les expressions $\vec{a}_e(O_k) = -\omega_t^2 \vec{H}_k \vec{O}_k$ car il est très difficile de les projeter sur la base de travail.

On trouve de même $\vec{a}_e(O_1)$ en remplaçant L par $-L$ dans l'expression précédente. On en déduit alors les deux forces d'inertie d'entraînement, exprimées dans la base de travail :

$$\vec{F}_{ie,2} = -m_{i2} \vec{a}_e(O_2) = m_{i2} \omega_t^2 \begin{pmatrix} R_t \cos^2 \lambda \\ L \\ -R_t \cos \lambda \sin \lambda \end{pmatrix}$$

et

$$\vec{F}_{ie,1} = -m_{i1} \vec{a}_e(O_1) = m_{i1} \omega_t^2 \begin{pmatrix} R_t \cos^2 \lambda \\ -L \\ -R_t \cos \lambda \sin \lambda \end{pmatrix}$$

9. – À l'équilibre, la somme des moments des forces exercées sur le système $S = \{\text{barre} + \text{sphères}\}$, par rapport au point O , est nul. On projette directement \vec{u}_z pour obtenir les équations souhaitées, sachant que le moment en O du poids est nul et que les forces d'inertie de Coriolis sont nulles puisque le système est immobile (à l'équilibre) dans le référentiel terrestre :

$$(\vec{OO}_2 \wedge \vec{F}_{ie,2}) \cdot \vec{u}_z = m_{i2} \omega_t^2 (-R_t L \cos \lambda \sin \lambda)$$

Pour le moment de la force d'inertie en O_1 on change L en $-L$ et m_{i2} en m_{i1} pour trouver :

$$(\vec{OO}_1 \wedge \vec{F}_{ie,1}) \cdot \vec{u}_z = m_{i1} \omega_t^2 (R_t L \cos \lambda \sin \lambda)$$

Le couple exercé par le fil de torsion s'écrit (toujours en projection sur \vec{u}_z) :

$$-C(\theta_{\infty 1} - \theta_0)$$

Le théorème du moment cinétique à l'équilibre conduit alors à l'équation :

$$\theta_{\infty 1} - \theta_0 = (m_{i1} - m_{i2}) \frac{\omega_t^2 R_t L}{C} \cos \lambda \sin \lambda$$

La seconde mesure revient à permuter m_{i1} et m_{i2} et à changer $\theta_{\infty 1}$ en $\theta_{\infty 2}$, ce qui conduit à :

$$\theta_{\infty 2} - \theta_0 = (m_{i2} - m_{i1}) \frac{\omega_t^2 R_t L}{C} \cos \lambda \sin \lambda$$

Par différence on obtient :

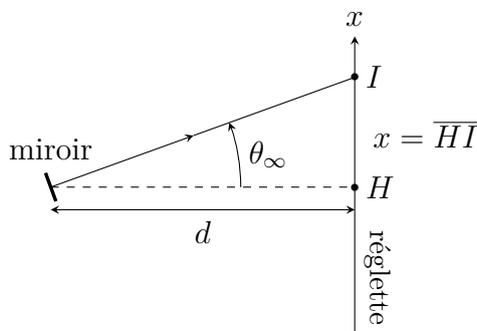
$$\Delta\theta = \theta_{\infty 1} - \theta_{\infty 2} = 2(m_{i1} - m_{i2}) \frac{\omega_t^2 R_t L}{C} \cos \lambda \sin \lambda = (m_{i1} - m_{i2}) \frac{\omega_t^2 R_t L}{C} \sin(2\lambda)$$

10. – Le résultat de la question précédente et la relation $C = \frac{8\pi^2 mL^2}{T^2}$ obtenu à la question 7. permettent d'écrire³ :

$$q = \frac{|m_{i1} - m_{i2}|}{m} = \frac{8\pi^2 |\Delta\theta| L}{T^2 \omega_t^2 R_t \sin(2\lambda)}$$

3. J'ai renommé q le rapport demandé par le sujet, sachant qu'il est sans dimension et qu'il est donc peu judicieux de la noter δm .

Le faisceau doit être envoyé sur une règle graduée située à une distance $d = 2$ m, ce qui permet de mesurer les angles $\theta_{\infty k}$, avec $k = 1$ ou 2 , en lisant l'abscisse x d'impact I du faisceau sur la règle.



Pour traiter correctement cette question, vous pourrez vous reporter à la fiche méthode "Calcul d'incertitude" sur le site de la MP1.

Compte-tenu de l'ordre de grandeur du rapport x/d , on a $\tan \theta_{\infty} = x/d \approx \theta_{\infty}$. L'énoncé indique qu'on a une précision de lecture de 1 mm sur x , ce qui donne une incertitude sur x de $\delta x = 1/\sqrt{3} \approx 0,58$ mm pour un intervalle de confiance de 95%

En supposant connue d avec une incertitude nulle, cela entraîne une incertitude sur θ_{∞} donnée par $\delta \theta_{\infty} = \delta x/d \approx 2,9 \cdot 10^{-4}$ rad. L'incertitude sur la différence $\Delta \theta = \theta_{\infty 1} - \theta_{\infty 2}$ est donnée par :

$$\delta(\Delta \theta) = \sqrt{(\delta \theta_{\infty 1})^2 + (\delta \theta_{\infty 2})^2} \approx 4,2 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$$

en supposant la même incertitude pour les deux mesures. Si on admet que toutes les autres grandeurs sont connues avec une précision infinie (c'est à dire une incertitude nulle) on obtient l'incertitude sur le rapport q :

$$\delta q = \frac{8\pi^2 \delta(\Delta \theta) L}{T^2 \omega_t^2 R_t \sin(2\lambda)}$$

Avec $L = 6,0$ cm on a $T = 436$ s. Pour $\lambda = 45^\circ$ et $\omega_t = \frac{2\pi}{24 \times 3600} = 7,3 \cdot 10^{-5}$ rad.s⁻¹ on trouve alors⁴ :

$$\boxed{\delta q = 3,1 \cdot 10^{-7}}$$

Bien entendu l'incertitude réelle est beaucoup plus grande car il faut tenir compte des incertitudes sur toutes les autres grandeurs.

11.— Cela veut dire que q est dans l'intervalle $[0, \delta q]$ (si on néglige les incertitudes des autres grandeurs). Avec $m = 200$ g, cela conduit à :

$$\boxed{|m_{i1} - m_{i2}| \leq 6,2 \cdot 10^{-5} \text{ g}}$$

ce qui est assez remarquable pour les techniques de l'époque.

4. Il manque le rayon de la Terre dans l'énoncé : $R_t = 6,4 \cdot 10^3$ km.