

MP2-DS n°3 -CCP-e3a (Samedi 13/11 - Durée 3h)

1 Étude d'un cyclotron

Données générales pour l'exercice :

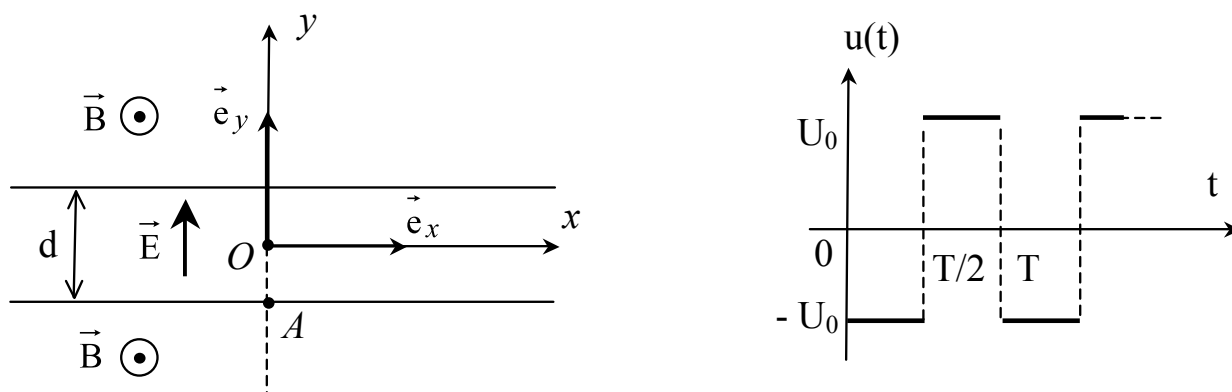
masse d'un proton : $m = 1,67 \times 10^{-27}$ kg

Charge élémentaire : $e = 1,6 \times 10^{-19}$ C

Dans tout l'exercice, le référentiel d'étude est supposé galiléen et il est muni d'un repère $(Oxyz)$.

Un cyclotron est un appareil destiné à produire des particules de grande énergie. Elles y sont soumises à l'action conjuguée d'un champ électrique $\vec{E}$ accélérateur et d'un champ magnétique $\vec{B}$ déviateur de la trajectoire, tous les deux uniformes.

- Le champ magnétique $\vec{B} = B \vec{e}_z$ ($B > 0$) est permanent et il est dirigé suivant l'axe Oz du repère $(Oxyz)$. Il existe dans tout l'espace, à l'exception d'une petite zone comprise entre deux plans parallèles, définis par $y = -\frac{d}{2}$ et $y = \frac{d}{2}$, distants de d (voir figure).
- Le champ électrique est de la forme $\vec{E} = -\frac{u(t)}{d} \vec{e}_y$ où $u(t)$ est une tension périodique, de période T , représentée sur la figure ci-dessous. Ce champ n'existe qu'à l'intérieur de la petite zone définie par $-\frac{d}{2} < y < \frac{d}{2}$ et il est nul partout ailleurs.



On étudie le mouvement d'un proton de masse m et de charge e placé dans le cyclotron. À l'instant $t = 0$, il se trouve au point $A(0, -d/2, 0)$ avec une vitesse nulle.

- On suppose que $u(t) = -U_0$ durant la première phase du mouvement.
 - Déterminer la vitesse v_1 ainsi que la date t_1 lorsque le proton entre dans la zone où règne le champ magnétique.
 - Quelle est la condition sur T pour que le champ électrique reste constant durant cette première phase d'accélération ? En déduire la valeur minimale U_{min} de U_0 , en fonction de m , e , d et T .

Dans la suite de l'exercice, on supposera que $U_0 \gg U_{min}$ et on négligera le temps de transfert du proton à l'intérieur de la zone d'accélération devant celui passé dans la zone où règne le champ magnétique. En particulier cela signifie que, à l'issue de sa première phase d'accélération, le proton arrive en $y = d/2$ à l'instant $t = t_1 \approx 0$.

2. a) Montrer que l'énergie cinétique E_C du proton est une constante du mouvement au cours de son transit dans la zone où règne le champ magnétique.
 b) Déterminer les coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ de la particule à l'instant t .
 c) On désigne par S le point où le proton sort de cette zone. Déterminer la date t_S à laquelle le proton arrive en S ainsi que les coordonnées (x_S, y_S) de ce point.
3. a) De façon générale, quel est le rayon R de la trajectoire dans la zone où règne le champ magnétique lorsque la vitesse du proton a pour norme v ?
 b) Montrer que l'intervalle de temps Δt qui sépare deux accélérations consécutives s'écrit : $\Delta t = \frac{m\pi}{eB}$. Quelle condition doit satisfaire la période T de la tension $u(t)$ pour que le proton soit toujours accéléré dans la zone où règne le champ électrique $\vec{E}$?

On suppose que cette condition est réalisée.

- c) Montrer qu'après n accélérations, la vitesse du proton vaut :

$$v_n = \sqrt{n} \sqrt{\frac{2eU_0}{m}}$$

4. Compte tenu des contraintes de construction du cyclotron, le rayon maximal de la trajectoire vaut $R_{max} = 80$ cm. Lorsque cette valeur est atteinte, le proton est éjecté hors de l'appareil. Déterminer la vitesse v_{ej} du proton à la sortie du cyclotron en fonction de R_{max} , e , m et B . En déduire le nombre N de tours effectués avant son éjection de l'appareil.

Application numérique : $B = 0,52$ T ; $U_0 = 1,0$ kV. Calculer v_{ej} et N .

2 La structure interne de Jupiter

Électrostatique et gravitation universelle

On notera dans toute la suite $\mathcal{G}$ la constante de la gravitation universelle dont la valeur numérique est fournie en fin de sujet. On s'intéresse au champ gravitationnel $\vec{G}(\vec{P})$ créé en P par une distribution de masse.

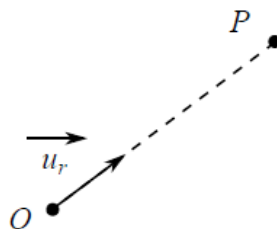


FIGURE 1 – Paramétrage

- Q19. Énoncer le théorème de Gauss liant le champ électrostatique $\vec{E}$ à la distribution volumique de charge ϱ . En s'appuyant sur l'analogie entre l'électrostatique et la gravitation, montrer que le champ gravitationnel $\vec{G}$ créé par une distribution de masse volumique ϱ satisfait la relation (2), M_{int} étant la masse contenue à l'intérieur de la surface fermée Σ ,

$$\oiint_{M \in \Sigma} \vec{G}(\vec{M}) \cdot d\vec{S}_M = -4\pi\mathcal{G}M_{\text{int}} \quad (1)$$

Distribution sphérique de masse non homogène

Lancée en 2011 depuis la Terre, la sonde baptisée "Juno" restera en orbite autour de Jupiter jusqu'au mois de juillet 2021.

En étudiant les variations du champ de gravitation de Jupiter, la sonde Juno a pour but de fournir des indications sur la distribution des masses à l'intérieur de la planète, l'incidence sur celle-ci du déplacement de son atmosphère et du mouvement de marée généré par ses lunes.

De manière générale, les planètes géantes possèdent :

- un noyau d'éléments lourds ;
- une enveloppe d'hydrogène et d'hélium ;
- au-delà d'une pression donnée, l'hydrogène devient métallique.

On étudie ici quelques propriétés du champ de gravitation d'une distribution sphérique de masse non-homogène de rayon R . On associe un système de coordonnées sphériques à cette distribution dont le centre O est à l'origine du système. On notera $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\phi)$ la base de vecteurs associée. On suppose que la masse volumique $\varrho(r)$ ne dépend que de la coordonnée radiale r .

- Q20. Justifier très précisément que le champ de gravitation est nécessairement de la forme $\vec{G}(\vec{M}) = -G(r)\vec{u}_r$, où $G(r)$ est la norme du champ de gravitation.
- Q21. On note $M(r)$ la masse contenue dans la boule de rayon r . Montrer alors que :

$$M(r) = \int_0^r 4\pi r'^2 \varrho(r') dr'$$

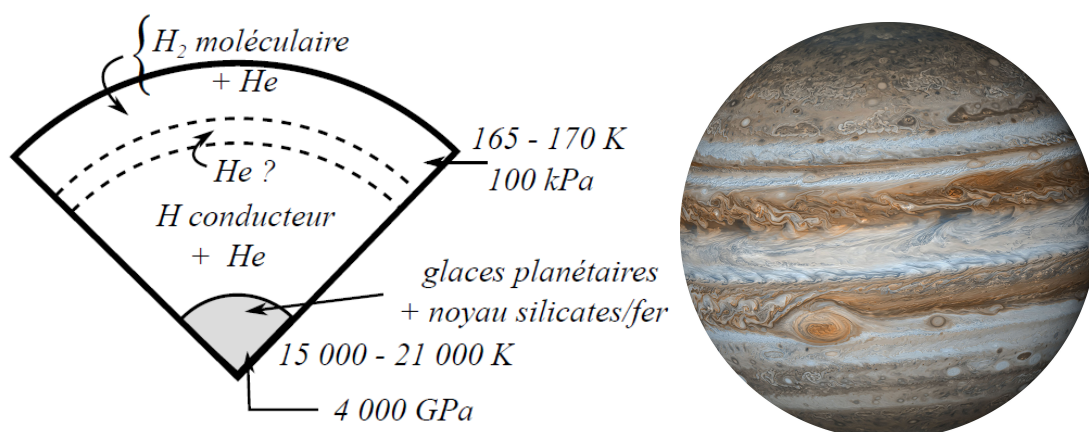


FIGURE 2 – Structure interne de Jupiter - (J. Heyvaerts - Astrophysique)

- Q22. En utilisant le théorème de Gauss pour la gravitation, déterminer dans le cas de ce modèle $G(r)$ pour $r > R$. On rappelle que M_J est la masse de Jupiter que l'on définira à l'aide de $M(r)$. Tracer le graphe de $r \mapsto G(r)$ pour $r > R$.

On définit le potentiel gravitationnel $\Phi(r)$ par analogie avec le potentiel électrostatique $V(r)$ par la relation $\vec{G}(r) = -\vec{\text{grad}} \Phi(r)$. Donner l'expression du potentiel gravitationnel $\Phi(r)$ dont dérive le champ de gravitation pour $r > R$ en le prenant nul à l'infini.

Dans le référentiel jupiterocentrique supposé galiléen, Jupiter est animée d'un mouvement de rotation supposé uniforme autour de l'axe polaire (Oz), la période associée à ce mouvement de rotation valant $T_{\text{sid}} = 0,41$ jour terrestre. Chaque volume élémentaire $d\tau$ de l'atmosphère de Jupiter, de centre P, immobile dans le référentiel lié à Jupiter et de masse δm possède donc, dans ce référentiel, un mouvement de rotation circulaire uniforme de vitesse angulaire ω_{sid} . L'origine du repère est choisie au centre de Jupiter qui présente une symétrie de révolution autour de l'axe passant par les pôles (Oz) (mais qui n'est plus supposée sphérique).

- Q23. Exprimer, en fonction de ses deux coordonnées sphériques r et θ et de ω_{sid} , le vecteur accélération du centre P du volume élémentaire $d\tau$ dans le référentiel jupiterocentrique.
- Q24. Jupiter possède la forme d'un ellipsoïde de révolution. Le rayon polaire possède la valeur $R_P = 6,68 \cdot 10^4$ km et le rayon équatorial possède la valeur $R_E = 7,15 \cdot 10^4$ km. Comment expliquer simplement la forme de cette planète ?

On définit l'aplatissement relatif ε par $\varepsilon = \frac{R_E - R_P}{R_E}$. Du fait de l'aplatissement de Jupiter, le potentiel gravitationnel à grande distance a pour expression, avec $K = \frac{I_J}{M_J R_J^2}$ où I_J est le moment d'inertie diamétral qu'aurait Jupiter, de masse M_J et de rayon R_J , sans rotation propre (donc sans le phénomène d'aplatissement),

$$\Phi(r, \theta) = \frac{\mathcal{G} M_J}{r} \left[-1 + \frac{\varepsilon K}{2} \left(\frac{R_J}{r} \right)^2 (3 \cos^2 \theta - 1) \right]$$

On donne la valeur du moment d'inertie diamétral d'une boule pleine, de rayon R et masse volumique uniforme ρ : $I = \frac{8\pi}{15} \rho R^5$.

- Q25. Si Jupiter était assimilable en l'absence de rotation propre à une boule pleine, homogène, de masse volumique uniforme, quelle devrait être la valeur de la constante $K = \frac{I_J}{M_J R_J^2}$?
- Q26. L'étude du champ de gravitation par la sonde Juno permettra l'estimation de la constante K . En quoi la connaissance de K est-elle intéressante ?

Les couches supérieures de l'atmosphère de Jupiter sont riches en hélium et dihydrogène gazeux. On considère alors une région de l'atmosphère de Jupiter à une température T . Soit dN le nombre d'entités (atomes ou molécules) de masse m dont le module de la vitesse est compris entre v_r et $v_r + dv_r$. On suppose une distribution telle que :

$$\frac{dN}{N} = \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{mv_r^2}{2k_B T} \right) \times 4\pi v_r^2 dv_r = f(v_r) dv_r$$

- Q27. Calculer la valeur de v_r qui rend $f(v_r)$ maximale. On l'appelle vitesse la plus probable d'agitation thermique et on la note v_c .
- Q28. Expliquer alors pourquoi, contrairement à l'atmosphère terrestre, l'atmosphère de Jupiter peut être riche en dihydrogène ou hélium. On pourra comparer les valeurs des vitesses de libération de la Terre et de Jupiter, en assimilant ces astres à des corps sphériques.

Document - Données

Notations et valeurs numériques

Constante d'Avogadro	$\mathcal{N}_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Masses molaires (en $\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$)	$\mathcal{M}_H = 1,0$; $\mathcal{M}_{He} = 4,0$; $\mathcal{M}_{Ge} = 72,6$
Numéros atomiques	$Z(O) = 8$ et $Z(S) = 16$
Constante de Boltzmann	$k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$
Constante de la gravitation universelle	$\mathcal{G} = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
Accélération de la pesanteur terrestre	$g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
Pouvoir de résolution de l'œil	$\varepsilon_{\text{œil}} = 1,5'$
Conversion	$1^\circ = 60'$ (minutes d'angle)
Masse de la Terre	$M_T = 6,0 \cdot 10^{24} \text{ kg}$
Masse de Jupiter	$M_J = 1,97 \cdot 10^{27} \text{ kg}$
Rayon de la Terre	$R_T = 6,4 \cdot 10^3 \text{ km}$
Rayon de Jupiter	$R_J = 7,0 \cdot 10^4 \text{ km}$
Rayon de l'orbite terrestre	$d_T = 1,50 \cdot 10^8 \text{ km}$
Rayon de l'orbite de Jupiter	$d_J = 7,80 \cdot 10^8 \text{ km}$
Période de révolution sidérale de la Terre	$T_T = 365,25 \text{ jours}$

Une formule d'analyse vectorielle

On considère le champ scalaire suivant : $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$. Alors : $\Delta f = \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}} f)$

Opérateur gradient en coordonnées sphériques

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\phi)}$$

3 Modèle de Thomson de l'atome d'hydrogène

Données :

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9,0 \cdot 10^9 \text{ SI}$$

$$\text{masse de l'électron : } m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

$$\text{charge élémentaire : } e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

Dans un vieux modèle de l'atome d'hydrogène dû à Thomson, datant de 1895 et désormais totalement désuet, la charge positive $+e$ de l'atome est uniformément répartie dans une boule de rayon $a_0 = 50 \cdot 10^{-12} \text{ m} = 50 \text{ pm}$.

Nous supposons que le centre de cette boule (atome) est le point O , origine d'un repère d'espace $(Oxyz)$.

1. (a) Quelle est la densité volumique ρ de charge correspondante. En donner l'expression littérale puis faire l'application numérique.

Notons $\vec{E}_{\text{at}}(M)$ le champ électrostatique créé par cette charge positive en un point M et r la distance entre les points M et O .

- (b) Calculer $\vec{E}_{\text{at}}(M)$ en tout point M de l'espace, c'est à dire pour $r \leq a_0$ et $r > a_0$.

2. Dans ce modèle de Thomson, l'électron de l'atome d'hydrogène, de charge $-e$ et de masse m , est une particule ponctuelle se déplaçant dans l'espace $r \leq a_0$. On note $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ son vecteur position et on suppose qu'à l'instant $t = 0$, $\vec{r}(0) = (x_0, 0, 0)$ avec $0 \leq x_0 < a_0$.

- (a) Expliciter la force exercée par la charge positive sur l'électron $\vec{F}_{\text{at} \rightarrow e}$ en fonction de $\vec{r}$, e , a_0 et ϵ_0 .

- (b) Quelle est l'intensité de cette force si $\|\vec{r}\| = 25 \text{ pm}$?

- (c) Quel sera le mouvement ultérieur de l'électron s'il est lâché sans vitesse initiale à l'instant $t = 0$? On introduira une fréquence caractéristique f_0 de ce mouvement et on en donnera la valeur numérique.

3. L'atome est placé entre les deux armatures d'un condensateur plan. Au champ électrostatique $\vec{E}_{\text{at}}$ créé par la charge positive de l'atome est alors superposé le champ électrostatique uniforme $\vec{E}_c = -E_m \vec{u}_x$ créé par le condensateur, avec $E_m > 0$.

- a) Montrer que si E_m est "suffisamment faible", l'électron prend une position d'équilibre à l'intérieur de la boule de rayon a_0 .

- b) Quelle est la valeur maximale de E_m permettant d'assurer cela ?

Le champ appliqué est maintenant variable dans le temps avec une pulsation ω , de la forme : $\vec{E}_c(t) = E_m \cos(\omega t) \vec{u}_x$. On suppose que E_m remplit la condition de la question précédente.

4. (a) Établir les équations différentielles vérifiées par les trois coordonnées x , y et z de l'électron sous l'action combinée des champs électriques $\vec{E}_{\text{at}}$ et $\vec{E}_c$.
- (b) En régime sinusoïdale forcé, on pose $x(t) = \text{Re}(X_m(\omega) e^{i\omega t})$ et on suppose que $\omega \neq \omega_0 = 2\pi f_0$ où f_0 est la fréquence introduite à la question 5. Donner l'expression de $X_m(\omega)$ en fonction de la pulsation ω du champ électrique oscillant.
- (c) Représenter sommairement le graphe de la fonction $X_m(\omega)$. Comment peut-on appeler le phénomène qui se produit lorsque $\omega \rightarrow \omega_0$? Discuter les limites du résultat obtenu.

4 Champ créé par deux fils parallèles de charges opposées

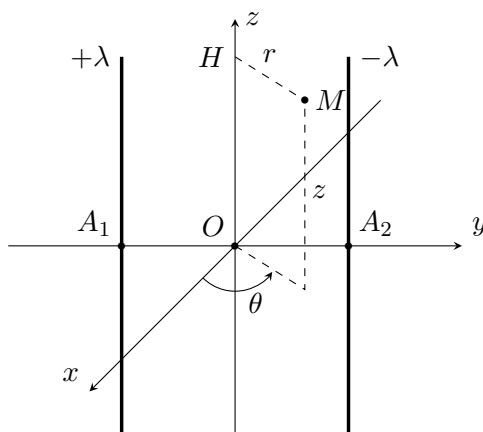
Gradient en coordonnées cylindriques :

$$\vec{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z$$

1. Déterminer l'expression du champ électrostatique $\vec{E}(M)$ créé par un fil infini chargé avec une densité linéique λ uniforme, en tout point M . On notera r la distance entre le point M et le fil.

En déduire le potentiel électrique $V(M)$ à une constante C près.

2. On considère maintenant deux fils rectilignes, infinis, parallèles à l'axe (Oz) , et d'équations $y = +a$ et $y = -a$, de charges linéiques uniformes $\lambda_1 = +\lambda$ et $\lambda_2 = -\lambda$, avec $\lambda > 0$. On note A_1 et A_2 leur intersection respective avec le plan (xOy) .



Un point M est repéré par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) . On note $r_1 = H_1M$ et $r_2 = H_2M$ les distances entre M et chacun des fils, H_1 et H_2 désignant respectivement les projetés de M sur les fils 1 et 2.

On choisit l'origine des potentiels au point O origine du repère d'espace.

Calculer l'expression du potentiel électrostatique $V(M)$ créé en M par l'ensemble des deux fils en fonction de λ , r_1 et r_2 .

3. Dans cette question on posera $k = \exp\left(\frac{2\pi\epsilon_0 V_0}{\lambda}\right)$.

- a) Établir la relation liant r_1 et r_2 en un point M d'une surface équipotentielle telle que $V(M) = V_0$.
- b) Montrer que la surface équipotentielle $V_0 = 0$ est un plan dont on donnera l'équation.
- c) Montrer que si $V_0 \neq 0$, les surfaces équipotentielles sont des cylindres dont l'intersection avec le plan (xOy) sont des cercles dont le rayon R_k et les coordonnées du centre C_k vérifient :

$$R_k = \frac{2ka}{|1 - k^2|} \quad \text{et} \quad C_k = \left(0, a \frac{1 + k^2}{1 - k^2}, 0\right)$$

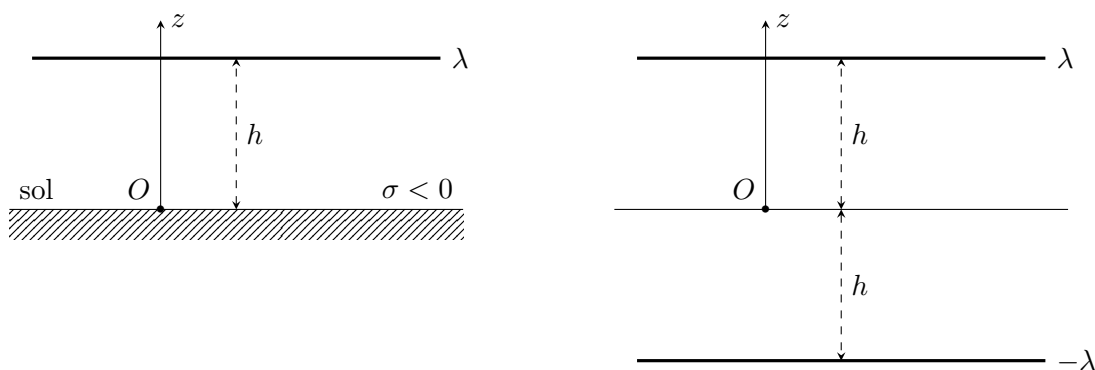
pour une valeur donnée de V_0 .

- d) Esquisser la carte des équipotentielles et des lignes de champ électrostatique dans le plan $z = 0$, selon le signe de V_0 .

4. On envisage maintenant d'utiliser les résultats précédents pour modéliser le profil du potentiel électrique créé par le fil électrique d'une ligne à haute tension, portant une densité linéique de charge $\lambda > 0$, supposé parallèle au sol à une hauteur h de celui-ci et de longueur infinie.

Du fait des orages, la Terre est légèrement chargée négativement on modélise le sol comme une surface horizontale portant une densité surfacique de charge σ négative et dont nous prendrons le potentiel égal à zéro.

On admettra que le potentiel électrique créé dans l'espace $z > 0$ par la ligne à haute tension chargée $\lambda > 0$ et le sol chargé $\sigma < 0$ est le même que celui qui est créé par deux fils infinis parallèles, symétriques par rapport au plan $z = 0$ et portant des charges linéiques opposées λ et $-\lambda$. Dans cette seconde configuration, le plan $z = 0$ n'est pas chargé (cf. figure ci-dessous).



- a) Montrer que le potentiel à une hauteur $0 \leq z < h$ du sol, dans un plan vertical contenant la ligne à haute tension est donné par :

$$V(z) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{h+z}{h-z}\right)$$

- b) Le cylindre dont l'axe est quasiment confondu avec la ligne HT et dont le rayon est $r_1 = 1,5$ cm est une équipotentielle de valeur $V_1 = 400$ kV. Exprimer $V(z)$ en fonction de V_1 , h , r_1 et z , pour $0 \leq z < h$.
- c) Tracer l'allure du potentiel entre le sol et la ligne HT.
- d) Les lignes HT étant situées à une hauteur $h = 50$ m, interpréter la photo ci-contre réalisée par un artiste contemporain qui a planté verticalement dans le sol des tubes fluorescents d'environ $L = 2$ m de longueur, sachant qu'un tel tube s'allume lorsque la tension à ses bornes dépasse 80 V.



FIN DU DEVOIR