

DS n°3bis – Partie physique
Durée 3h – Samedi 13 novembre 2021

1. Réalisation d'un accéléromètre capacitif

Deux disques conducteurs D_1 et D_2 de même rayon, parallèles, sont écartés d'une distance $2d$. L'air qui les sépare est assimilable, du point de vue des propriétés électrostatiques, à du vide. La surface de chaque disque sera notée S .

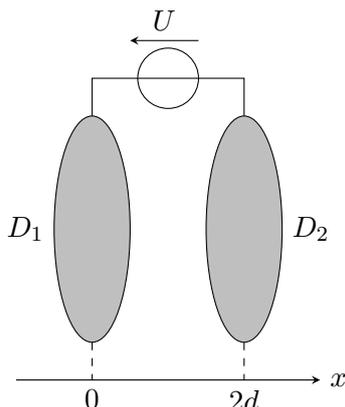


FIGURE 1 – Condensateur plan

Lorsqu'on établit une différence de potentiel (ddp) U entre les disques, il apparaît une charge électrique Q sur le disque D_1 et une charge opposée $-Q$ sur le disque D_2 . On supposera pour simplifier que ces charges sont réparties uniformément sur chaque disque.

I. Étude d'un condensateur plan idéal

Le disque D_1 est assimilé à un plan infini portant la densité surfacique de charge σ uniforme.

1. En utilisant les propriétés de symétrie et d'invariance de la distribution de charge, préciser en les justifiant la direction du champ électrostatique \vec{E}_1 créé par D_1 ainsi que sa dépendance avec les coordonnées spatiales.
2. Comparer les champs $\vec{E}_1(M)$ et $\vec{E}_1(M')$ en deux points M et M' symétriques par rapport au plan $x = 0$.
3. En appliquant le théorème de Gauss déterminer le champ \vec{E}_1 dans tout l'espace, en fonction de la charge Q et de S .
4. On assimile D_2 à un plan infini situé en $x = 2d$, uniformément chargé de densité $-\sigma$. Déterminer le champ électrostatique total \vec{E} créé par l'ensemble des deux plans $x = 0$ et $x = 2d$ en tout point de l'espace. En déduire la relation entre U , Q , S , d et ϵ_0 .

Montrer que ce dispositif forme un condensateur dont on donnera la capacité C en fonction de ϵ_0 , S et d .

On dira par la suite que D_1 et D_2 sont les deux armatures du condensateur.

II. Introduction d'une plaque métallique entre les deux armatures du condensateur

On introduit entre les deux armatures du condensateur plan précédent un disque métallique D d'épaisseur $h < 2d$, de même surface S que D_1 et D_2 et parallèle aux armatures du condensateur (Figure 2). Les effets de bords sont toujours négligés et, du point de vue des symétries, on considérera que D_1 , D_2 et D sont d'extension infinie dans des directions perpendiculaires à Ox .

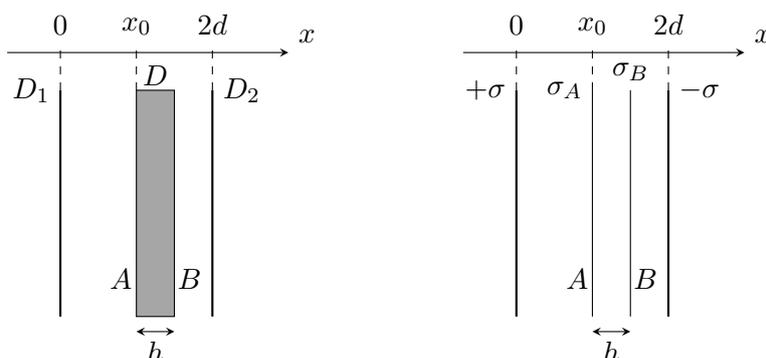


FIGURE 2 – Introduction d'un disque métallique entre les armatures

Avant son introduction dans le condensateur, le disque métallique D n'est pas chargé. Cependant, sous l'influence du champ électrique du condensateur, les électrons de conduction de D vont se déplacer et venir s'accumuler sur l'une des faces (A ou B sur le schéma), créant ainsi une distribution de charges surfacique. Il y a alors un défaut d'électrons sur la face opposée, ce qui est équivalent à une distribution surfacique de charges de signe opposé.

Un état d'équilibre finit par s'installer où les charges s'immobilisent dans le référentiel d'étude. L'ensemble condensateur et disque D seront alors modélisés comme quatre plans infinis comme indiqué sur la Figure 2, avec des densités surfaciques $+\sigma$, σ_A , σ_B et $-\sigma$.

5. Préciser les signes des densités σ_A et σ_B . Quelle est la relation entre σ_A et σ_B ?
6. On admet que les charges se répartissent sur les deux faces A et B de D de sorte à ce que le champ électrique total \vec{E} soit nul à l'intérieur de D , c'est à dire pour $x_0 \leq x \leq x_0 + h$. En déduire la relation entre σ_A et σ .
7. Déterminer l'expression du champ électrostatique pour $x \in [0, x_0]$ d'une part et pour $x \in [x_0 + h, 2d]$ d'autre part, en fonction de σ et de ϵ_0 . En déduire la différence de potentiel $U = V(x = 0) - V(x = 2d)$ entre les deux armatures du condensateur, en fonction de σ , d , h et ϵ_0 .
8. En déduire la capacité C' du condensateur ainsi obtenu. On exprimera C' en fonction de d , h , S et ϵ_0 . Conclure quant à l'influence du disque D sur la capacité du condensateur étudié dans la partie I.

III. Application à la mesure de l'accélération d'un véhicule

Pour mesurer l'accélération d'un véhicule le choix se porte sur un Mems (Micro-Electro-Mechanical-System). Il s'agit d'une famille technologique très utilisée par l'industrie automobile (notamment pour l'airbag) mais aussi par les particuliers car on les retrouve dans certaines manettes de consoles de jeu. La taille de ces capteurs est inférieure à celle d'une pièce de monnaie !

III.A. – Analyse du mouvement mécanique

On modélise le fonctionnement du Mems par le système représenté sur la Figure 3. Seule la masse mobile m , qui est un cube d'arête b , de centre d'inertie G peut se déplacer. Le reste du dispositif, appelé bâti, est fixé au véhicule et demeure solidaire de celui-ci. Le véhicule est muni d'un repère Ox de vecteur unitaire \vec{e}_x .

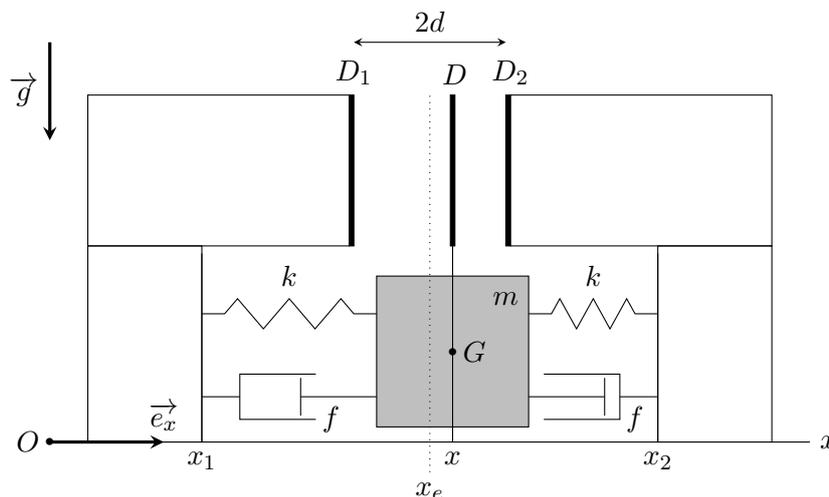


FIGURE 3 – Modélisation mécanique à une dimension du MEMS

Le mouvement, sans frottements, ne peut se faire que selon l'axe Ox . La masse est liée à deux ressorts identiques de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 , mais aussi à deux amortisseurs induisant une force proportionnelle à la vitesse relative de la masse m par rapport au bâti avec le coefficient de frottement f . On ne se préoccupe pas de la présence éventuelle d'autres forces, notamment électrostatiques. On note $x_e = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ la position du centre d'inertie G de la masse m lorsque celle-ci et le véhicule sont immobiles. Par ailleurs on note x la position de G à un instant t quelconque dans le référentiel lié au véhicule.

On suppose que la longueur des ressorts est égale à leur longueur à vide lorsque $x = x_e$. On introduira les quantités $L = x - x_e$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$ et $\mu = \frac{f}{\sqrt{2km}}$.

On suppose que le véhicule se déplace en ligne droite par rapport au sol, selon un axe parallèle à Ox . Dans tout ce qui suit, le sol est considéré comme un référentiel galiléen.

9. Exprimer la résultante \vec{F}_r des forces de tension des ressorts appliquée à m en fonction de k , L et du vecteur \vec{e}_x . Exprimer la résultante \vec{F}_a des forces d'amortissement appliquée à m en fonction de f , $\dot{L} = dL/dt$ et du vecteur \vec{e}_x .
10. En appliquant le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel du véhicule, déterminer l'équation différentielle vérifiée par L , lorsque le véhicule possède une accélération par rapport au sol $\vec{a} = a \vec{e}_x$ constante.
11. Afin d'étudier la réponse mécanique globale de ce système, on s'intéresse au cas particulier d'une accélération sinusoïdale de pulsation ω , les représentations complexes des grandeurs physiques $a(t)$ et $L(t)$ sont notées $\underline{a} = A_m e^{j\omega t}$ et $\underline{L} = L_m e^{j\omega t}$. Calculer la transmittance complexe $\underline{L}/\underline{a}$ de ce système en fonction de $\xi = \frac{\omega}{\omega_0}$, μ et ω_0 .

En déduire le domaine de pulsations dans lequel une mesure de L permet de déterminer l'accélération du véhicule. On justifiera le raisonnement.

12. L'accélération du véhicule est maintenant supposée constante. Vers quelle valeur L_∞ tend $L(t)$ au bout d'un temps suffisamment grand ? Exprimer L_∞ en fonction de a et ω_0 . Comment ajuster μ pour que $L(t)$ tende vers L_∞ sans osciller et le plus rapidement possible ?

III.B. – Mesure de l'accélération

Comme le montre la Figure 3, le cube de masse m est solidaire d'une lame D en forme de disque pouvant se déplacer entre deux disques conducteurs D_1 et D_2 solidaires du châssis. Ce dispositif est celui qui a été étudié dans la partie II. : les deux disques et la lame ont la même surface S mais on supposera dans cette partie que la lame D est d'épaisseur négligeable. Le disque D_1 et la lame forment un condensateur plan de capacité C_1 . De même, le disque D_2 et la lame forment un condensateur plan de capacité C_2 .

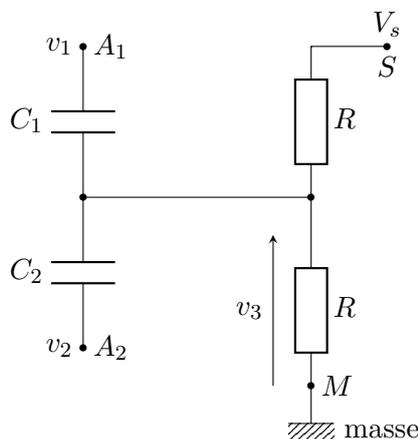


FIGURE 4 – Modélisation électrique

Ce dispositif est relié par des connexions électriques non représentées sur le schéma de la Figure 3 à un circuit électrique modélisable par le schéma de la Figure 4. On note v_1 et v_2 les potentiels électriques des points A_1 et A_2 et V_s le potentiel supposé constant du point S . Le potentiel nul (masse du montage) est fixé au point M . Des générateurs non représentés imposent :

$$v_1(t) = \frac{V_s}{2} + V_1 \sin(\omega t) \quad \text{et} \quad v_2(t) = \frac{V_s}{2} - V_1 \sin(\omega t)$$

où V_1 est une constante.

13. Exprimer C_1 et C_2 en fonction de ϵ_0 , S , d et L

On suppose désormais et jusqu'à la fin du problème que l'accélération du véhicule par rapport au sol est constante, de valeur a . On se place dans les conditions où L a atteint sa valeur L_∞ .

14. On introduit la constante de temps $\tau = \frac{1}{2}R(C_1 + C_2)$. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $v_3(t)$ en fonction de V_s , τ , ω , $\cos(\omega t)$ et de la tension $V_2 = \frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2} V_1$

15. La solution générale de cette équation s'écrit :

$$v_3(t) = A e^{-t/\tau} + \frac{V_s}{2} + A_3 \cos(\omega t) + B_3 \sin(\omega t)$$

où A est une constante associée au régime libre, fixée par les conditions initiales et qu'on ne cherchera pas à déterminer. Déterminer les deux constantes A_3 et B_3 en fonction de ω , τ et V_s .

16. On fixe $\tau = 5,0$ ms et $\omega = 1,0 \cdot 10^5$ rad.s⁻¹. La mesure de v_3 se fait pour $t \gg \tau$. En déduire dans ces conditions une expression approchée de $v_3(t)$ ne dépendant plus que de V_s , V_2 et $\sin(\omega t)$. On conservera cette expression pour la suite de l'étude.

Pour extraire l'information sur l'accélération, le principe utilisé est celui de la démodulation synchrone. Le signal $v_3(t)$ est multiplié par $v_1(t)$ pour obtenir un signal $s_1(t) = h v_1(t) \times v_3(t)$ où h est un coefficient multiplicatif positif. Le signal $s_1(t)$ est ensuite filtré pour obtenir le signal $s(t)$. L'ensemble de ce dispositif d'acquisition est représenté sur la Figure 5.

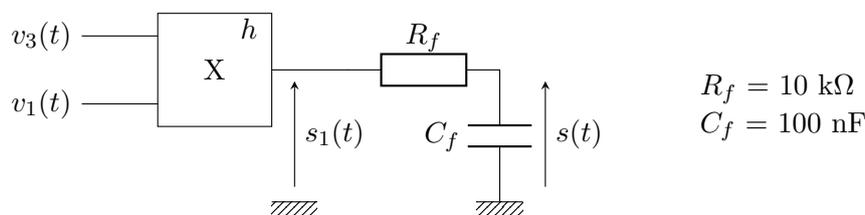


FIGURE 5 – Dispositif de mesure de l'accélération

17. Après avoir écrit l'expression de $s_1(t)$, déterminer le signal $s(t)$ qu'il est possible d'observer en mode DC sur l'oscilloscope. On détaillera le raisonnement permettant d'obtenir cette expression et on exprimera tout d'abord $s(t)$ en fonction de h , V_1 , L , d et V_s puis, en supposant que L et a ne dépendent pas du temps en fonction de h , k , V_1 , a , m , d et V_s .

2. Gravimétrie

La gravimétrie a pour but la détermination de la structure profonde et de surface de la Terre.

Lorsqu'une question est marquée (R.P.) (résolution de problème), elle n'est pas guidée et demande de l'initiative de la part du candidat. Les pistes de recherche doivent être consignées ; si elles sont pertinentes, elles seront valorisées. Le barème tient compte du temps nécessaire pour explorer ces pistes et élaborer un raisonnement.

A) Théorème de Gauss et gravitation

1. Rappeler l'énoncé du théorème de Gauss de l'électrostatique.
2. En se basant sur les expressions des forces gravitationnelles et électrostatiques, en déduire l'analogie du théorème de Gauss en gravitation.

B) Structure interne de la Terre

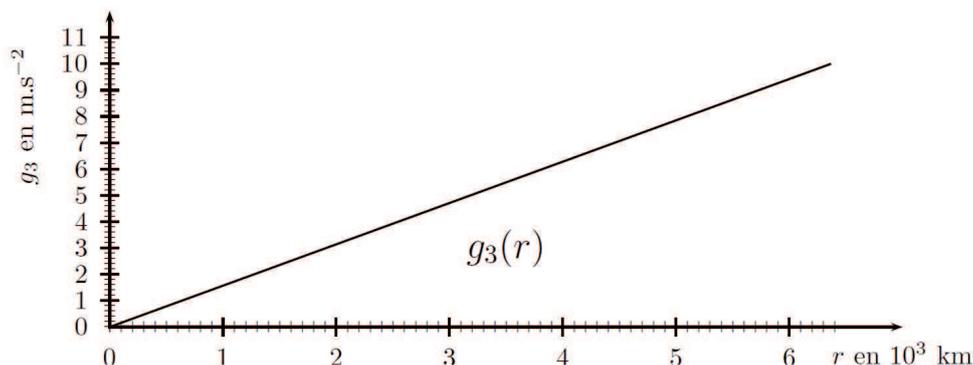
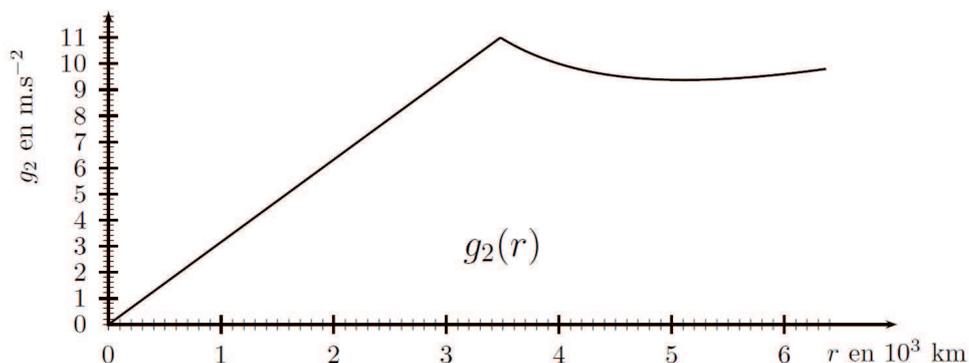
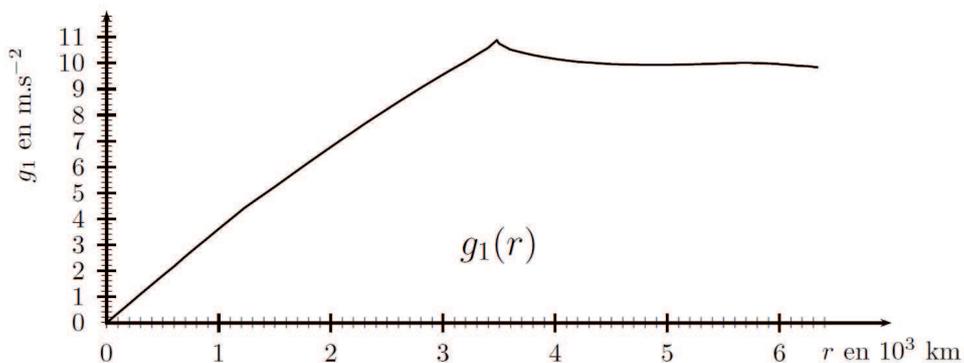
Assimilons la Terre à une planète sphérique de rayon R_T , de centre O , de masse totale M . On modélise la structure interne de la Terre par deux couches concentriques : un noyau

de rayon R_n , de masse volumique ρ_n recouvert d'un manteau de masse volumique $\rho_m = 2670 \text{ kg.m}^{-3}$.

3. Établir avec un tel modèle l'expression de la masse $M(r)$ contenue dans une sphère de centre O et de rayon r , pour r variant de 0 à R_T .

On note $\vec{G}(M) = -g(r)\vec{e}_r$ le champ de gravitation en un point M situé à la distance r du centre O de la Terre; \vec{e}_r est le vecteur unitaire de \vec{OM} .

4. Déterminer l'expression de $g(r)$ en fonction de r pour tout $r \geq 0$.
5. Le noyau terrestre a un rayon $R_n = 3480 \text{ km}$ et une masse de $M_n = 2,0 \cdot 10^{24} \text{ kg}$. Calculer la valeur du champ de gravitation à la frontière noyau-manteau.
6. Des 3 représentations de $g(r)$ ci-dessous, identifier celle qui correspond à l'expression établie aux questions précédentes. À quel type de modèle peuvent correspondre les deux autres courbes ?

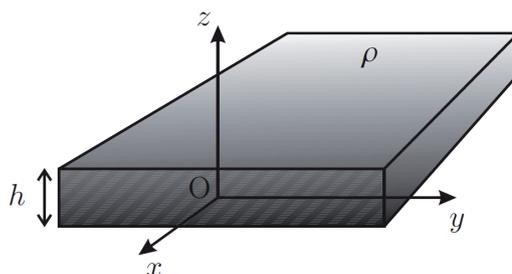


C) Anomalie gravimétrique : correction de Bouguer

Calcul du champ électrique \vec{E} créé par une plaque infinie chargée uniformément

7. On considère une tranche d'épaisseur h , infinie dans les directions Ox et Oy , de densité volumique de charge uniforme $\rho < 0$. La tranche est comprise entre les deux plans $z = -h/2$ et $z = +h/2$.

- Déterminer soigneusement par une étude de symétries la direction de $\vec{E}(M)$ en un point M quelconque ainsi que les coordonnées dont il dépend.
- Que dire de la valeur et du sens du champ électrostatique en deux points M et M' symétriques par rapport au plan (xOy) ?
- En utilisant le théorème de Gauss ou une équation locale, calculer le champ électrique, en dehors puis à l'intérieur de la tranche.



On applique à cette plaque un champ électrostatique uniforme dirigé selon les z négatifs : $\vec{E}_0 = -E_0 \vec{e}_z$.

- Quel est le champ électrostatique total existant *en-dessous* puis *au-dessus* de la tranche ? (le champ résultant à l'intérieur de la tranche n'est pas demandé).

Correction de Bouguer (1738)

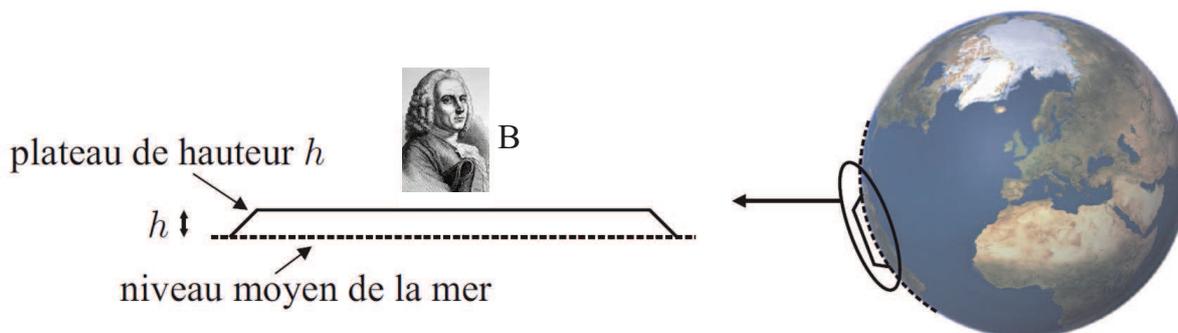


FIGURE 6 – Correction de Bouguer de la gravité terrestre.

8. Le champ de gravitation moyen g_0 au niveau de la mer vaut $g_0 \simeq 9,81 \text{ m.s}^{-2}$. On se propose de calculer la modification du champ de pesanteur lorsque celui-ci a été mesuré par Bouguer (B) sur un haut plateau chilien situé à l'altitude $h = 1000 \text{ m}$ par rapport au niveau de la mer. On fait les hypothèses suivantes :
- le plateau est de masse volumique $\rho_P = 2670 \text{ kg.m}^{-3}$ uniforme ;
 - on le suppose suffisamment étendu dans les directions horizontales pour pouvoir l'assimiler à une tranche infinie d'épaisseur h pour les calculs qui nous intéressent.
- Déduire de la question 7. l'expression $\Delta g = g - g_0$ au niveau de la surface du plateau en fonction de la constante de gravitation G , ρ_P et h .

- b) Faire l'application numérique de Δg . On donne $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$.
- c) **(R.P.)** Commenter ce résultat sachant que Bouguer disposait d'un pendule pour faire ses mesures gravimétriques, et qu'il savait mesurer une période d'oscillation avec une précision relative de 10^{-5} .

FIN DU DEVOIR