

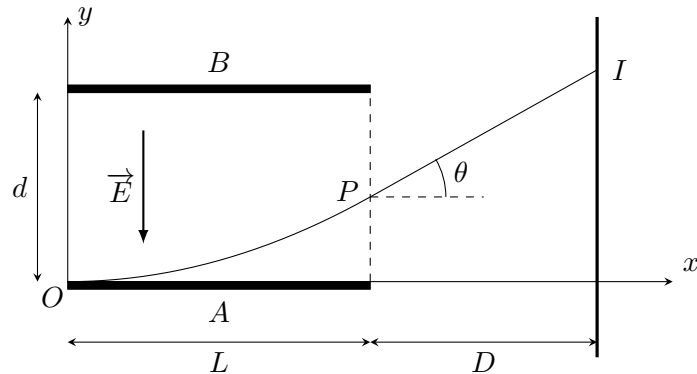
Distributions de courants. Magnétostatique

\*\*\*\*\*

MOUVEMENTS DANS E ET B

1 Déflexion électrostatique

Soit un électron de charge  $-e$  et de masse  $m$  traversant l'espace entre les armatures  $A$  et  $B$  d'un condensateur plan. Cet électron pénètre en  $O$  avec une vitesse initiale  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$ .



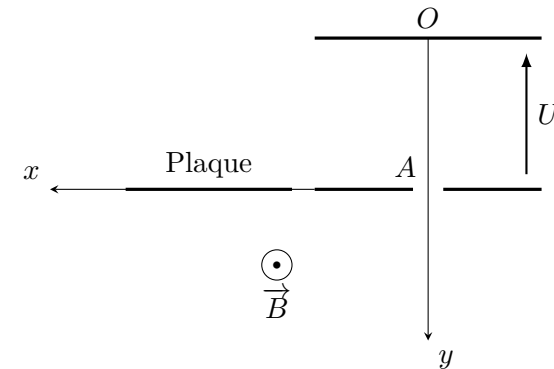
Il existe une différence de potentiel  $V_B - V_A = U > 0$  entre les armatures métalliques de longueur  $L$  et distantes de  $d$ . On admet que cela crée un champ électrostatique uniforme et égal à :  $\vec{E} = -\frac{U}{d} \vec{u}_y$  dans l'espace entre les armatures et nul ailleurs.

1. Déterminer l'équation  $y = f(x)$  de la trajectoire de l'électron entre les deux armatures (pour  $0 \leq x \leq L$ ). En déduire les coordonnées du point  $P$  en sortie des armatures.

2. Calculer  $\tan(\theta)$  où  $\theta$  est l'angle que forme la trajectoire avec l'axe  $Ox$  au point  $P$ . Quelles sont les coordonnées du point d'impact  $I$  sur l'écran fluorescent ?

2 Spectrographe de masse

1. Une particule de masse  $m$  et de charge  $q > 0$  est accélérée par un champ électrique  $\vec{E} = E \vec{u}_y$  régnant entre les deux armatures d'un condensateur plan. Cette particule est initialement introduite en  $O$  avec une vitesse nulle. La tension entre les deux armatures du condensateur étant  $U > 0$ , déterminer sa vitesse  $v_A$  lorsqu'elle arrive en  $A$ . On exprimera  $v_A$  en fonction de  $q$ ,  $m$  et de  $U$ .



2. Cette particule pénètre en  $A$  dans une région où règne un champ magnétique  $\vec{B} = B \vec{u}_z$  uniforme et permanent ( $\vec{E} = \vec{0}$  dans cette région).
  - a) Montrer que la norme de la vitesse de la particule est conservée.
  - b) Calculer le rayon  $R$  de la trajectoire et en déduire l'abscisse  $x_I$  du point d'impact sur une plaque réceptrice située dans le plan  $y = 0$  (voir figure).

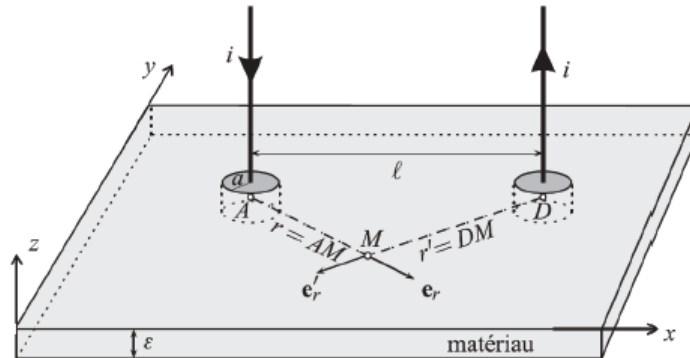
- c) Quel est l'intérêt de ce dispositif? Application numérique :  $B = 0,10 \text{ T}$  ;  $U = 10 \text{ kV}$ ,  $m = 1,67.10^{-27} \text{ kg}$  (masse d'un nucléon). Quelle est la distance séparant les deux isotopes du potassium  $^{39}\text{K}^+$  et  $^{41}\text{K}^+$  sur la plaque ?

\*\*\*\*\*

### DISTRIBUTION DE COURANTS

## 3 Mesure de conductivité

On étudie un matériau conducteur de conductivité  $\gamma$ , en régime permanent. Le courant électrique  $i$  est amené en un point  $A$  du matériau par un fil, perpendiculaire à la plaque, confondu avec l'axe  $(Az)$ . Ce fil est relié au matériau par une électrode cylindrique de faible rayon. Ce courant électrique repart par un fil de même nature et fixé de la même manière au point  $D$ ; l'ensemble est représenté sur la Figure ci-dessous.



On supposera que le matériau obéit à la loi d'Ohm locale, c'est à dire :  $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ . On admettra qu'en régime permanent (stationnaire),

même si les charges électriques ne sont pas fixes, on a toujours la relation :  $\vec{E} = -\text{grad} V$ .

- 1) On considère tout d'abord une situation simplifiée, à symétrie cylindrique, dans laquelle on supprime le contact de départ en  $D$ . Le courant arrivant en  $A$  se répartit donc dans l'ensemble du matériau avec la symétrie de révolution d'axe  $(Az)$  : la densité volumique de courant  $\vec{j}$  en un point  $M$  s'y écrit  $\vec{j}(M) = j(r) \vec{e}_r$ , où  $r$  désigne la distance de  $M$  à l'axe  $(Az)$  et  $\vec{e}_r$  le vecteur unitaire radial de cet axe.

Exprimer  $j(r)$  en fonction de  $r$ ,  $\varepsilon$  et  $I$ .

- 2) On considère deux points  $M_1$  et  $M_2$  de la plaque et on note  $r_1 = AM_1$  et  $r_2 = AM_2$ . Déterminer la différence de potentiel  $U = V(M_1) - V(M_2)$  en fonction de  $I$ ,  $\varepsilon$ ,  $\gamma$  et du quotient  $r_2/r_1$ .
- 3) On remet en place le contact de départ du courant en  $D$ . En procédant par superposition de deux situations analogues à celle de la question 1, déterminer la nouvelle expression de  $U = V(M_1) - V(M_2)$  en fonction de  $I$ ,  $\varepsilon$ ,  $\gamma$ ,  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $r'_1 = DM_1$  et  $r'_2 = DM_2$ .

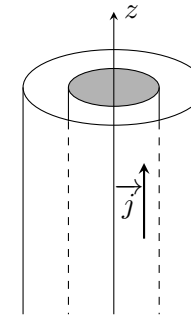
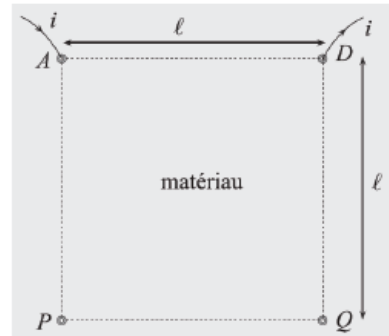
Que vaut cette différence de potentiel si  $M_1$  et  $M_2$  sont sur la médiatrice du segment  $AD$ ? Commenter ce résultat.

- 4) On note  $\ell = AD$  et  $a$  le rayon des électrodes cylindriques de contact électrique en  $A$  et  $D$ ; ces électrodes sont formées d'un matériau métallique très bon conducteur électrique et sont donc considérées comme équipotentielles, de potentiels respectifs  $V_A$  et  $V_D$ . Montrer que si  $\ell \gg 1$ , la résistance électrique de la plaque  $R = U/I$  s'écrit sous la forme  $R \approx R_0 \ln\left(\frac{\ell}{a}\right)$ , où l'on exprimera  $R_0$  en fonction de  $\gamma$  et  $\varepsilon$ .

- 5) Application numérique : l'épaisseur de la plaque de semiconducteur est  $\varepsilon = 1,0 \text{ mm}$ . On réalise le dispositif de la figure 2 avec  $\ell = 2 \text{ cm}$  et  $a = 0,5 \text{ mm}$ . La conductivité du matériau (silicium

dopé) est  $\gamma = 2,2 \cdot 10^4 \text{ S.m}^{-1}$ . Calculer  $R$  et commenter sa valeur numérique.

Pour limiter les erreurs dans les mesures de tension on utilise la géométrie de van der Pauw qui élimine l'influence du diamètre des électrodes. Sur la Figure ci-contre, les électrodes  $A$  et  $D$  sont utilisées pour l'arrivée et le départ du courant, et les électrodes  $P$  et  $Q$  pour la mesure de différence de potentiel  $U = V(P) - V(Q)$ . On définit enfin la résistance parallèle  $R_{//} = U/I$ .



On supposera que le vecteur densité volumique de courant est uniforme dans le volume du cylindre intérieur de rayon  $R_1$ .

Déterminer le champ magnétique produit par ce câble en tout point de l'espace.

6) Déterminer  $R_{//}$  en fonction de  $\gamma$  et  $\varepsilon$ .

\*\*\*\*\*

**CALCULS DE B**

**4 Champ magnétique d'un câble coaxial**

Un câble coaxial infini est constitué par un conducteur cylindrique plein de rayon  $R_1$ , entouré par un second conducteur cylindrique d'épaisseur très petite (on la supposera quasi-nulle) et de rayon  $R_2 > R_1$ . Les deux cylindres sont coaxiaux. Un courant d'intensité  $I$  circule dans le conducteur intérieur et revient dans l'autre sens par le conducteur extérieur.

**5 Champ magnétique créé par un tore**

On considère un tore de section carrée, d'axe  $Oz$ , l'origine  $O$  étant placée de telle façon que le tore se trouve dans l'espace comprise entre les côtes  $z = -a/2$  et  $z = +a/2$ . On bobine uniformément sur ce tore, de façon jointive,  $N$  spires de fil électrique traversé par un courant d'intensité  $I$ .

- 1) Déterminer la direction du champ magnétique en un point  $M$  quelconque et sa dépendance vis à vis des coordonnées d'espace. On notera  $(r, \theta, z)$  les coordonnées cylindriques de  $M$ .
- 2) Déterminer à l'aide du théorème d'Ampère, l'expression de  $\vec{B}(M)$  en tout point de l'espace.

## 6 Champ magnétique créé par un courant volumique

Déterminer en tout point  $M$  de l'espace, le champ magnétique  $\vec{B}(M)$  créé par la distribution de courant volumique définie par :

$$\vec{j}(x, y, z) = j_0 \exp\left(-\frac{x}{a}\right) \vec{u}_y \quad \text{si } x > 0 \quad \text{et} \quad \vec{j} = \vec{0} \quad \text{pour } x < 0$$

On supposera que  $\vec{B}$  s'annule lorsque  $x \rightarrow +\infty$ .

## 7 Champ magnétique créé par un solénoïde infini

On peut modéliser un solénoïde par une nappe de courant cylindrique de rayon  $R$  et d'épaisseur  $e \ll R$ . En tout point  $M$  de coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ , le vecteur densité volumique de courant s'écrit :  $\vec{j}(M) = j(r) \vec{u}_\theta$  avec :

$$j(r) = \begin{cases} j \text{ constante} & \text{si } r \in [R, R + e] \\ 0 & \text{partout ailleurs} \end{cases}$$

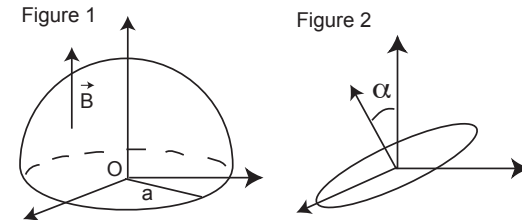
On suppose que le solénoïde est de longueur infinie.

- 1) Déterminer le champ magnétique  $\vec{B}(M)$  produit en tout point de l'espace en résolvant l'équation de Maxwell-Ampère. On admettra que  $\vec{B} = \vec{0}$  pour  $r > R + e$  et on prendra l'expression du rotationnel dans le formulaire.
- 2) Retrouver ce résultat en utilisant le théorème d'Ampère.
- 3) On étudie maintenant le modèle où  $e \rightarrow 0$  et  $j \rightarrow +\infty$  de sorte que le produit  $j \times e$ , qui sera noté  $j_S$ , reste constant et fini.
  - a) Dédurre des questions précédentes l'expression de  $\vec{B}(M)$  en tout point  $M$  pour ce modèle en fonction de  $\mu_0$  et  $j_S$ . Est-ce cohérent avec la relation de passage pour  $\vec{B}$  ?

- b) Comment relier ce résultat au champ magnétique créé par un solénoïde infini composé de  $n$  spires par mètre, chacune parcourue par un courant d'intensité  $I$  ? (On pourra commencer par calculer l'intensité  $I_\ell$  du courant qui traverse un rectangle de hauteur  $e$  et de longueur  $\ell$  dans le modèle volumique des questions 1. et 2., puis faire le lien avec  $j_S$  et enfin trouver la relation entre  $I_\ell$ ,  $I$  et le nombre  $n$  de spires par mètre du solénoïde).

## 8 Flux magnétique

- 1)  $\vec{B}$  est un champ magnétique uniforme, colinéaire à  $\vec{u}_z$ . Calculer le flux  $\Phi$  de  $\vec{B}$  à travers le disque de centre  $O$  et de rayon  $a$  situé dans le plan  $(Oxy)$  (figure 1).



- 2) Calculer le flux  $\Phi'$  de  $\vec{B}$  à travers la demi-sphère.
- 3) Pourquoi sont-ils égaux ?
- 4) Calculer le flux de  $\vec{B}$  à travers le disque penché (figure 2).

## 9 Composante radiale de $\vec{B}$

Un point  $M$  de l'espace est repéré par ses coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ . Une distribution de courant (une spire circulaire par exemple)

non décrite ici crée un champ magnétique en  $M$  de la forme :

$$\vec{B}(M) = B_r(r, z) \vec{u}_r + B_z(r, z) \vec{u}_z$$

possédant une composante *radiale*  $B_r$  et une composante *axiale* (le long de  $Oz$ )  $B_z$  qui ne dépendent que des coordonnées  $r$  et  $z$  de  $M$ . On s'intéresse au calcul approché de  $B_r$  pour des points très voisins de l'axe  $Oz$ , c'est à dire lorsque  $r$  est proche de zéro.

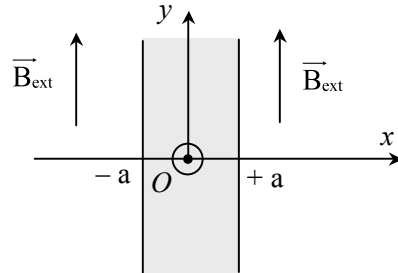
Dans la suite, on pose :  $B(z) = B_z(r = 0, z)$ , valeur de la composante axiale sur l'axe  $Oz$ .

En écrivant la conservation du flux de  $\vec{B}$  à travers un cylindre d'axe  $Oz$ , de rayon  $r$  très petit et dont les bases inférieure et supérieure sont situées aux cotes  $z$  et  $z + dz$ , montrer que, lorsque  $dz \rightarrow 0$  :

$$B_r(r, z) = -\frac{r}{2} \frac{dB}{dz}(z)$$

## 10 Effet Meissner

Les matériaux supraconducteurs de taille macroscopique ont la propriété, en-dessous d'une certaine température, de s'opposer à la pénétration du champ magnétique extérieur  $B_{ext}$  : c'est *l'effet Meissner*. Le modèle présenté dans cet exercice indique qu'en réalité le champ magnétique pénètre partiellement dans le matériau mais sur une faible épaisseur en dessous de la surface.



On considère en *régime stationnaire* une plaque supraconductrice illimitée, de largeur  $2a$ , placée dans une région où règne un champ magnétique permanent et uniforme  $\vec{B}_{ext} = B_{ext} \vec{u}_y$ . La densité volumique de courant dans le matériau est reliée au champ magnétique  $\vec{B}$  par *l'équation de London* :

$$\text{rot } \vec{j} = -\frac{1}{\mu_0 \lambda^2} \vec{B}$$

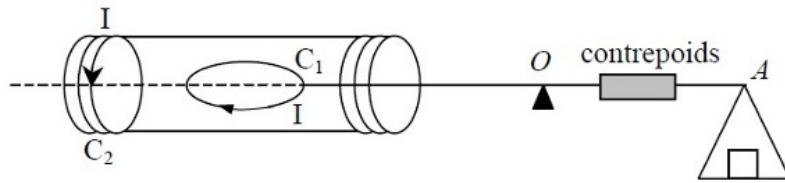
- 1) Déterminer la dimension de  $\lambda$ .
- 2) À l'aide des équations de Maxwell, établir une équation aux dérivées partielles du second ordre satisfaite par le champ magnétique  $\vec{B}$  en tout point du matériau supraconducteur.
- 3) On suppose que dans ce matériau le champ magnétique est de la forme :  $\vec{B} = B(x) \vec{u}_y$ . Déterminer l'expression de l'intensité  $B(x)$  du champ magnétique en fonction de  $x$ , en supposant qu'il y a continuité de ce champ aux extrémités de la plaque.
- 4) Déterminer la densité volumique de courant  $j(x)$  qui existe à l'intérieur de la plaque. Représenter schématiquement l'allure de  $B(x)$  et de  $j(x)$  dans les cas où  $a \gg \lambda$  et  $a \ll \lambda$ .

\*\*\*\*\*

## FORCES DE LAPLACE

## 11 Équilibre d'une spire dans un solénoïde

Une spire plate ( $C_1$ ), d'axe vertical, comprenant  $N$  tours de fil, de surface  $S$  est fixée à l'extrémité du fléau d'une balance mobile autour de l'axe horizontal passant par  $O$ . Cette spire est entièrement plongée à l'intérieur d'un long solénoïde ( $C_2$ ) (que l'on pourra supposer infini) comportant  $n$  spires par mètre.

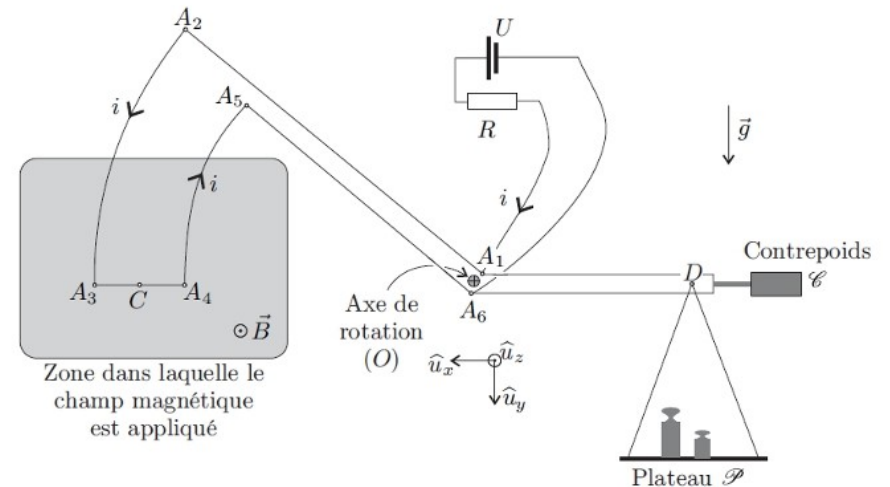


À l'autre extrémité  $A$  du fléau est suspendu un plateau ( $OA = L$ ). Lorsqu'aucun courant ne circule, ni dans ( $C_1$ ) ni dans ( $C_2$ ), un contrepois permet de réaliser l'équilibre mécanique de sorte que le fléau soit horizontal. Lorsqu'on fait passer le même courant  $I$  dans ( $C_1$ ) et dans ( $C_2$ ), on doit placer une masse  $m$  sur le plateau pour rétablir l'équilibre.

Calculer  $I$  en fonction de  $m$  et des données.

## 12 Balance de Cotton

Une balance de Cotton balance est destinée à la mesure de champ magnétique. Elle a été mise au point par Aimé Cotton en 1900. Elle est constituée de deux fléaux. L'un, à gauche, comprend sur sa périphérie, un conducteur métallique qui sera parcouru par un courant et dont une partie sera placée dans le champ magnétique, uniforme et permanent, à mesurer. Le conducteur sera soumis à des forces de Laplace et la balance penchera du côté de ce fléau. L'autre comporte un plateau sur lequel on peut déposer des masses pour équilibrer la balance et déduire ainsi la norme du champ magnétique. Le schéma de principe de la balance est représenté ci-dessous.



Sur le fléau dessiné à gauche, les conducteurs permettent le passage d'un courant d'intensité  $i$ , selon le parcours  $A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3 \rightarrow A_4 \rightarrow A_5 \rightarrow A_6$ . Les portions de circuit  $A_2A_3$  et  $A_4A_5$  sont des arcs de cercle de même centre  $O$ . L'ensemble des deux fléaux constitue un système rigide, mobile sans frottement, autour d'un axe horizontal passant par le point  $O$  et noté  $Oz$ . On désigne par  $C$  le milieu du segment  $A_3A_4$  et  $D$  le point de suspension du plateau. On note  $d_1$  la distance  $OC$ ,  $d_2$  la distance  $OD$  et  $\ell$  la longueur du segment  $A_3A_4$ .

La procédure de mesure est la suivante :

- a. Équilibrage "à vide" : en l'absence de courant  $i$  et de masses dans le plateau, le contrepois  $C$  est déplacé de façon à ce que la balance soit à l'équilibre, les trois points  $C$ ,  $O$  et  $D$  étant alignés sur l'horizontale.
- b. Mesure du champ : on ferme le circuit électrique, ce qui permet au courant d'intensité  $i$  de circuler. Le fléau de gauche penche vers le bas ; on ajoute alors des masses dans le plateau jusqu'à ce

que la balance soit à l'équilibre, les trois points  $C$ ,  $O$  et  $D$  étant alignés sur l'horizontale.

- 1) Pour un courant  $i \neq 0$ , montrer que le moment résultant en  $O$  des forces de Laplace s'exerçant sur les parties en arc de cercle est nul.
- 2) À l'équilibre, en présence de courant et de champ magnétique, établir l'expression du moment en  $O$  des forces de Laplace. En déduire la relation liant  $B = \|\vec{B}\|$ , la somme  $m$  des masses posées sur le plateau,  $i$ ,  $\ell$ ,  $d_1$ ,  $d_2$  et la norme  $g$  du champ de pesanteur.
- 3) La sensibilité de la balance étant de  $\delta m = 0,05$  g, déterminer la plus petite valeur de  $B$  mesurable pour  $i = 10$  A,  $g = 10$  m.s<sup>-2</sup>,  $\ell = 5$  cm et  $d_1 = d_2 = 10$  cm.