Fiche méthode : trajectoire d'une particule dans un champ magnétique

On étudie une particule de masse m et de charge électrique $q > 0$, assimilée à un point matériel de position M et placée dans un champ magnétique uniforme et permanent $\overrightarrow{B}$. L'équation de son mouvement dans un référentiel galiléen est :

$$\boxed{m\,\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} = q\,\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}}$$

Remarque : le poids de la particule sera toujours négligé devant la force de Lorentz.

1) Propriétés générales

Le travail de la force de Lorentz $\overrightarrow{F_m} = q\,\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}$ est nul :

$$W(\overrightarrow{F_m}) = 0 \;\text{ car }\; \overrightarrow{F_m} \perp \overrightarrow{v}$$

On en déduit d'après le théorème de l'énergie cinétique que, entre deux instants t_1 et $t2$:

$$\frac{1}{2}mv^2(t_2) - \frac{1}{2}mv^2(t_1) = W_{t_1 \to t_2}(\overrightarrow{F_m}) = 0$$

Il y a donc conservation de la norme du vecteur vitesse au cours du temps : $\boxed{\parallel \overrightarrow{v} \parallel = \text{Cste}}$

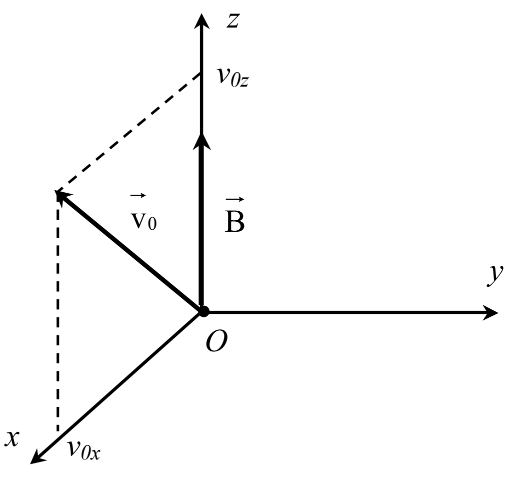
De plus en multipliant scalairement l'équation du P.F.D. par $\overrightarrow{B}$ et en utilisant le fait que $\overrightarrow{B}$ est un vecteur constant, on obtient :

$$m\,\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t}.\overrightarrow{B} = \overrightarrow{F_m}.\overrightarrow{B} = 0 \quad \text{d'où} \quad \frac{\mathrm{d}(\overrightarrow{v}.\overrightarrow{B})}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \text{donc} \quad \boxed{\overrightarrow{v}.\overrightarrow{B} = \text{Cste}}$$

La projection du vecteur vitesse sur un axe colinéaire au champ magnétique est donc une constante du mouvement (se conserve au cours du temps).

2) Équations du mouvement

Par un choix judicieux du repère $(Oxyz)$, on peut toujours supposer sans restreindre la généralité de l'étude que :



$\overrightarrow{B} = B\,\overrightarrow{e_z}$ $(B > 0)$; $\overrightarrow{v}(0) \overset{\text{noté}}{=} \overrightarrow{v_0} = v_{0x}\,\overrightarrow{e_x} + v_{0z}\,\overrightarrow{e_z}$ et $\overrightarrow{OM}(0) = \overrightarrow{0}$. À l'instant $t = 0$ la particule est donc située en O, origine du repère d'espace.

a) Équation de conservation pour les vitesses

En utilisant le fait que $\vec{v}.\vec{B} = \text{Cste}$ on en déduit que $\boxed{v_z = \vec{v}.\vec{e_z} = \text{Cste}}$. Il y a donc conservation de la composante v_z du vecteur vitesse, appelée *composante longitudinale* ou encore composante parrallèle au champ magnétique.

Comme $\vec{v}(t) = \vec{v_\perp}(t) + v_z\,\vec{e_z}$ où $\vec{v_\perp}$ est la partie du vecteur vitesse orthogonale à $\vec{e_z}$, il vient :

$$v^2 = v_\perp^2 + v_z^2 \implies \boxed{v_\perp^2 = v^2 - v_z^2 = \text{Cste}}$$

Il y a donc conservation de la *norme* $\|\vec{v_\perp}\|$ du vecteur vitesse orthogonal à $\vec{B}$ (attention, cela ne signifie pas que ce vecteur vitesse est constant : sa direction change au cours du temps, mais sa norme est conservée).

b) Équations différentielles du mouvement

Posons : $\overrightarrow{OM}(t) = x\,\vec{e_x} + y\,\vec{e_y} + z\,\vec{e_z}$ d'où $\vec{v}(t) = \dot{x}\,\vec{e_x} + \dot{y}\,\vec{e_y} + \dot{z}\,\vec{e_z}$. En projetant l'équation vectorielle du principe fondamental de la dynamique sur la base OND $(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$, on obtient les trois équations :

$$\begin{cases} \ddot{x} &= \dfrac{qB}{m}\,\dot{y} \\ \ddot{y} &= -\dfrac{qB}{m}\,\dot{x} \\ \ddot{z} &= 0 \end{cases}$$

La dernière équation redonne $v_z = \text{Cste}$, c'est à dire $v_z(t) = v_{0z}$, d'où $z(t) = v_{0z}\,t$. Le mouvement longitudinal est donc *uniforme*.

Afin d'étudier le mouvement dans le plan (Oxy) donné par les deux premières équations, on introduit la ***pulsation cyclotron*** :

$$\boxed{\omega_C = \frac{qB}{m} > 0}$$

Attention, si on avait eu $q < 0$ on aurait posé $\omega_c = \dfrac{-qB}{m} > 0$. On a donc (pour $q > 0$) :

$$\begin{cases} \ddot{x} &= \omega_C\,\dot{y} \qquad (1) \\ \ddot{y} &= -\omega_C\,\dot{x} \qquad (2) \end{cases}$$

Il y a deux façons de résoudre ces deux équations différentielles couplées :

1. Méthode par intégration :

On primitive les deux équations pour trouver :

$$\begin{cases} \dot{x} &= \omega_C\,y + C_1 \\ \dot{y} &= -\,\omega_C\,x + C_2 \end{cases}$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes d'intégration dont les valeurs, compte tenu des conditions initiales sont $C_1 = v_{0x}$ et $C_2 = 0$. En reportant $\dot{y}$ dans l'équation (1), on obtient :

$$\ddot{x} + \omega_C^2\,x = 0$$

qui est l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation propre ω_C et dont la solution générale s'écrit, en fonction de deux constantes λ et μ :

$$x(t) = \lambda \cos(\omega_C t) + \mu \sin(\omega_C t)$$

Compte tenu des conditions initiales, on trouve : $\lambda = 0$ et $\mu = v_{0x}/\omega_C$, donc :

$$x(t) = \frac{v_{0x}}{\omega_C} \sin(\omega_C \, t)$$

En reportant cette expression dans l'équation (2) on obtient :

$$\dot{y} = -\, v_{0x} \sin(\omega_C \, t) \implies y = \frac{v_{0x}}{\omega_C} \cos(\omega_C \, t) + C_3$$

où C_3 est à nouveau une constante d'intégration déterminée par les conditions initiales. Ici $y(0) = 0$ donc $C_3 = -\,\dfrac{v_{0x}}{\omega_C}$ et donc :

$$\boxed{x(t) = \frac{v_{0x}}{\omega_C} \sin(\omega_C \, t) \quad \text{et} \quad y = \frac{v_{0x}}{\omega_C} \left(\cos(\omega_C \, t) - 1 \right)}$$

Les deux équations horaires ci-dessus montrent que le mouvement dans le plan (Oxy) est *périodique*, de période $T_C = 2\pi/\omega_C$.

2. Méthode utilisant les complexes

On travaille avec les composantes du vecteur vitesse. En réécrivant les équations différentielles couplées (1) et (2) sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{v_x} = \omega_C \, v_y & (1) \\ \dot{v_y} = -\omega_C \, v_x & (2) \end{cases}$$

on introduit la grandeur complexe $\underline{u}(t) = v_x(t) + i v_y(t)$. On remarque alors que $\dot{\underline{u}} = -i\omega_c \, \underline{u}$, c'est à dire $\dot{\underline{u}} + i\omega_c \, \underline{u}$. La solution générale de cette équations différentielle du premier ordre est :

$$\underline{u}(t) = \underline{A} \, e^{-i\omega_c t} \quad \text{avec} \quad \underline{u}(0) = v_{0x} \quad \text{d'où} \;\; \underline{u}(t) = v_{0x} \, e^{-i\omega_c t}$$

En prenant les parties réelle et imaginaire on en déduit que :

$$v_x(t) = v_{0x} \cos(\omega_c t) \quad \text{et} \quad v_y(t) = -\, v_{0x} \sin(\omega_c t)$$

ce qui, compte tenu des conditions initiales, s'intègre en :

$$\boxed{x(t) = \frac{v_{0x}}{\omega_C} \sin(\omega_C \, t) \quad \text{et} \quad y = \frac{v_{0x}}{\omega_C} \left(\cos(\omega_C \, t) - 1 \right)}$$

c) Nature de la trajectoire

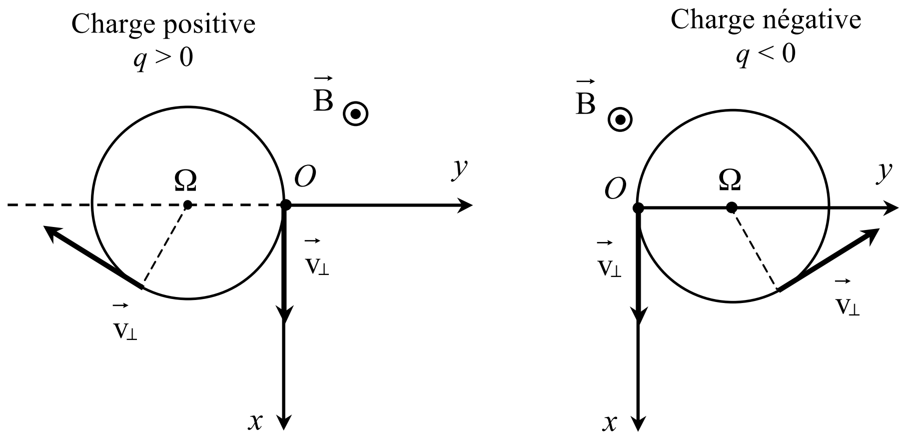
— Dans le plan (Oxy), l'élimination de t conduit à l'équation :

$$\boxed{x^2 + \left(y + \frac{v_{0x}}{\omega_C} \right)^2 = \left(\frac{v_{0x}}{\omega_C} \right)^2}$$

ce qui est l'équation d'un *cercle* de centre $\Omega(0, -\dfrac{v_{0x}}{\omega_C})$ et de rayon $R = \dfrac{v_{0x}}{\omega_C}$

— Dans l'espace $(Oxyz)$, le mouvement est la superposition du mouvement circulaire uniforme du plan (Oxy) et du mouvement rectiligne uniforme le long de l'axe Oz. Il s'agit donc d'un *mouvement hélicoïdal* avec une hélice de pas h constant :

$$\boxed{h = z(t + T_C) - z(t) = v_{0z}\, T_C = 2\pi \frac{v_{0z}}{\omega_C}}$$



On retiendra la relation importante suivante qui donne directement le rayon du cercle du mouvement projeté dans le plan (Oxy) :

$$\boxed{R\,\omega_C = v_{0x} = v_\perp}$$

puisque la norme $v_\perp$ se conserve (sa valeur ne peut donc être égale qu'à sa valeur initiale qui est ici v_{0x}).

d) Applications

Les applications techniques principales de ce type de mouvement sont le spectrographe de masse et le cyclotron.