

Corrigé du DM n°7

1 Expression approchée du champ magnétique créé par une bobine (d'après Centrale)

1. Voir le cours. On trouve $\vec{B} = \mu_0 n I_0 \vec{e}_z$.
2. a) Tout plan contenant l'axe (Oz) est plan d'antisymétrie des courants, donc plan de symétrie du champ magnétique. La norme de $\vec{B}$ est donc identique en deux points symétriques de part et d'autre d'un tel plan.

D'après la Figure 3 à gauche (profil radial) on voit qu'en $x = 0$ la norme de $\vec{B}$ vaut environ 0,107 T. Elle vaudra donc la même chose en $x = 2R_b$. À l'aide d'une simple règle et de cette figure on voit que : $2R_b \approx 4,5$ cm, d'où $R_b = 2,25$ cm.

Sur la Figure 2, on mesure à la règle $2R_{bF} = 2,6$ cm et $l_{bF} = 6,2$ cm. Comme les proportions sont conservées on en déduit que :

$$l_b = l_{bF} \times \frac{2R_b}{2R_{bF}} = 10,7 \text{ cm}$$

- b) Si on admet que l'expression du champ magnétique calculé à la première question reste valide au centre O de la bobine alors :

$$\|\vec{B}(O)\| = \mu_0 \frac{N}{l_b} I_0 \quad \text{d'où} \quad I_0 = \frac{\|\vec{B}(O)\| l_b}{\mu_0 N}$$

Sur la Figure 3 à droite (profil axial) on lit en $z = 0$: $\|\vec{B}(O)\| = 0,01086$ T, ce qui donne :

$$I_0 \approx 0,92 \text{ A}$$

- c) En raison des effets de bords. Il n'y a pas d'invariance par translation selon $\vec{e}_z$ pour une bobine de longueur finie.
- d) Sur la Figure 3 à droite (profil axial) on lit $\|\vec{B}\| = 3 \cdot 10^{-3}$ T pour $z = 7,5$ cm. On en déduit :

$$\alpha = \frac{\|\vec{B}(M)\| l_b}{\mu_0 N I_0} = 0,28$$

3. On se place en coordonnées cylindriques : $M(r, \theta, z)$ et, à priori :

$$\vec{B}(M) = B_r(r, \theta, z) \vec{e}_r + B_\theta(r, \theta, z) \vec{e}_\theta + B_z(r, \theta, z) \vec{e}_z$$

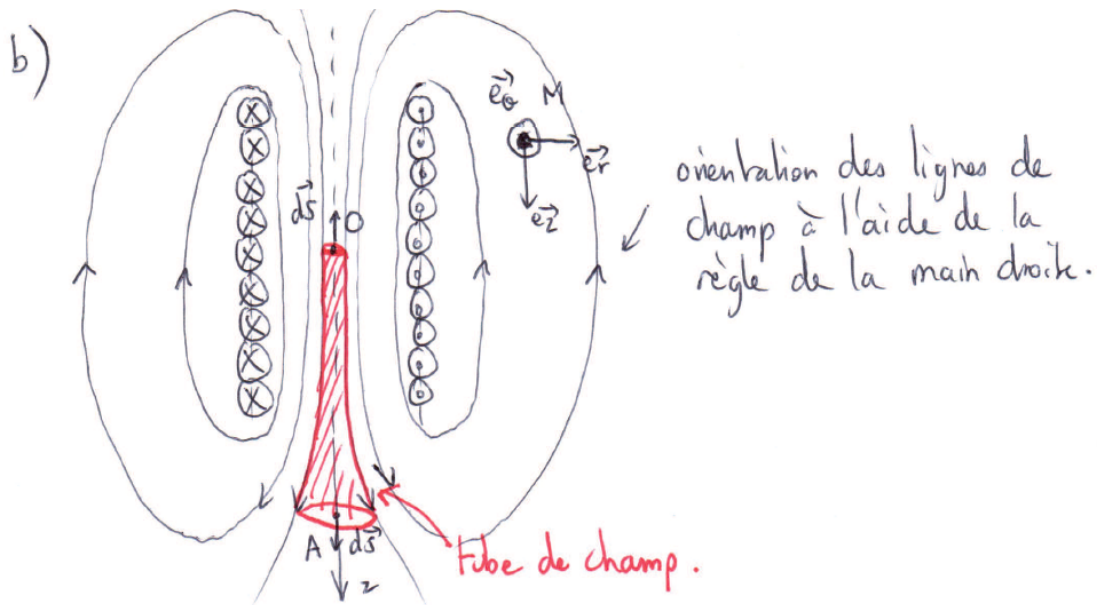
Le plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ est un plan d'antisymétrie de la distribution de courants, donc un plan de symétrie de $\vec{B}$ contenant M . On en déduit que $B_\theta(r, \theta, z) = 0$.

Il y a de plus invariance de la distribution de courants par toute rotation autour de Oz . Il s'ensuit que ni B_r , ni B_z ne dépendent de θ . On en déduit que :

$$\vec{B}(M) = B_r(r, z) \vec{e}_r + B_z(r, z) \vec{e}_z$$

Pour un point $M \in (Oz)$ tout plan contenant Oz est plan d'antisymétrie des courant donc plan de symétrie de $\vec{B}$ contenant M . On en déduit que $B_r = 0$ et donc, sur l'axe de la bobine :

$$\vec{B}(M) = B_z(z) \vec{e}_z$$



c) Le champ magnétique est plus intense au centre de la bobine, c'est à dire dans la zone où les lignes de champ sont les plus resserrées.

Cette propriété vient du fait que $\vec{B}$ est à flux conservatif, c'est à dire que $\text{div } \vec{B} = 0 \Rightarrow \iiint \text{div } \vec{B} d\tau = \oint_{\text{surface fermée}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$

En appliquant cette propriété à la surface fermée ^{Ostrogradsky} constituée par le tube de champ dessiné sur la figure ci-dessus, on obtient $\phi_{\text{tube de champ}} = 0 = \phi(O) + \phi_{\text{lateral}} + \phi(A)$

En supposant le champ uniforme sur les faces d'entrée de section s en O et de sortie de section S en A :

$$-B(O)s + B(A)S = 0 \Rightarrow B(A) = B(O) \frac{s}{S} < B(O)$$

Le champ est donc plus faible dans les zones où ≤ 1 les lignes de champ sont moins resserrées.

2 Production d'un champ magnétique intense

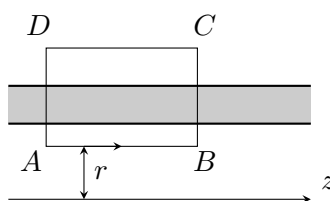
1. En supposant que la norme de $\vec{j}$ soit uniforme, on doit avoir : $j a^2 = I_0$ et donc :

$$\boxed{\vec{j} = \frac{I_0}{a^2} \vec{e}_\theta}$$

pour $R_1 < r < R_2$ et $\vec{j} = \vec{0}$ sinon.

2. Soit $M(r, \theta, z)$ un point repéré par ses coordonnées cylindriques. Le plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ est plan de symétrie des courant contenant M . Nous avons donc $\vec{B}_0(M) = B_0(r, \theta, z) \vec{e}_z$. Il y a de plus invariance de la distribution de courants par toute rotation autour de Oz et par toute translation le long de Oz , ce qui donne :

$$\vec{B}_0(M) = B_0(r) \vec{e}_z$$



Prenons comme contour d'Ampère (C_A) un rectangle $ABCD$ de longueur $AB = CD = \ell$ et tel que AB soit à une distance $r < R_1$ de l'axe Oz , tandis que CD soit à l'extérieur du solénoïde. Le théorème d'Ampère (en régime statique) conduit à :

$$\oint_{C_A} \vec{B}_0 \cdot d\vec{\ell} = \ell B_0(r) = \mu_0 j \ell (R_2 - R_1)$$

ce qui donne :

$$\boxed{\vec{B}_0 = \mu_0 \frac{I_0}{a^2} (R_2 - R_1) \vec{e}_z}$$

3. A.N. : $I_0 = 16$ A, ce qui est une intensité très importante.
4. L'équation de Maxwell - Ampère, $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$, conduit à l'équation aux dimensions (ou L représente une longueur) :

$$\frac{[B]}{L} = [\mu_0] [j] \implies [B] = [\mu_0] L [j]$$

et donc :

$$\frac{[j]}{L} = [\Lambda] [B] = [\Lambda] [\mu_0] L [j]$$

d'où :

$$\boxed{[\Lambda] = \frac{1}{[\mu_0] L^2} = H^{-1} \cdot m^{-1}}$$

5. Partons de l'équation de Maxwell - Ampère et appliquons-lui le rotationnel. Il vient :

$$\text{rot } \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \text{rot } \vec{j} = \mu_0 \Lambda \vec{B}$$

D'autre, part : $\text{rot } \text{rot } \vec{B} = \text{grad div } \vec{B} - \Delta \vec{B} = -\Delta \vec{B}$, et donc :

$$\Delta \vec{B} - \mu_0 \Lambda \vec{B} = \vec{0}$$

d'où :

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \Lambda}} \quad (1)$$

qui est homogène à une longueur.

6. Le problème est invariant par toute translation le long de Oy et de Oz ce qui conduit à l'indépendance de $\vec{B}$ vis à vis des coordonnées y et z .
7. On projette l'équation (1) sur la base cartésienne $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ pour obtenir les trois équations scalaires :

$$\frac{d^2 B_x}{dx^2} - \frac{B_x}{\delta^2} = 0 \quad ; \quad \frac{d^2 B_y}{dx^2} - \frac{B_y}{\delta^2} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2 B_z}{dx^2} - \frac{B_z}{\delta^2} = 0$$

dont les solutions sont :

$$\begin{aligned} B_x(x) &= \lambda_x e^{-x/\delta} + \mu_x e^{x/\delta} \\ B_y(x) &= \lambda_y e^{-x/\delta} + \mu_y e^{x/\delta} \\ B_z(x) &= \lambda_z e^{-x/\delta} + \mu_z e^{x/\delta} \end{aligned}$$

où $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z, \mu_x, \mu_y$ et μ_z sont six constantes. Comme $\vec{B}$ ne doit pas diverger lorsque $x \rightarrow -\infty$, nous avons nécessairement : $\lambda_x = \lambda_y = \lambda_z = 0$ et comme $B_x(0) = B_y(0) = 0$ et que $B_z(0) = B_0$, il vient : $\mu_x = \mu_y = 0$ et $\mu_z = B_0$. Cela conduit donc à :

$$\forall x \leq 0, \quad B_x(x) = B_y(x) = 0 \quad \text{et} \quad B_z(x) = B_0 e^{x/\delta}$$

On en déduit :

$$\vec{j} = \frac{\vec{\text{rot}} \vec{B}}{\mu_0} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{dB_z}{dx} \vec{e}_y = -\frac{1}{\mu_0 \delta} B_0 e^{x/\delta} \vec{e}_y$$

8. δ est une distance caractéristique d'atténuation de $\vec{B}$ et de $\vec{j}$ dans le supraconducteur. Au bout d'une distance de l'ordre de 5δ , nous pouvons considérer que $\vec{B}$ et $\vec{j}$ sont nuls. Cela signifie donc que $\vec{B}$ et $\vec{j}$ s'annulent quasiment tout de suite dans le volume du supraconducteur et n'existent qu'au voisinage de la surface.
9. On peut supposer une décroissance exponentielle avec une constante de longueur δ , de la forme :

