

Corrigé du DM n°4

Partie I - Mouvement de l'électron dans un champ magnétique uniforme

I.A – L'électron n'est soumis qu'au champ magnétique \vec{B} , il ne subit donc que la force de Lorentz : $\vec{F}_L = -q \vec{v} \wedge \vec{B}$, où on pose $q = 1,6 \times 10^{-19}$ C (valeur absolue de la charge de l'électron). Posons à priori (vecteur position de l'électron à l'instant t) :

$$\vec{OM} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z$$

ce qui implique :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \dot{x} \vec{e}_x + \dot{y} \vec{e}_y + \dot{z} \vec{e}_z \quad \text{et} \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{x} \vec{e}_x + \ddot{y} \vec{e}_y + \ddot{z} \vec{e}_z$$

Puisque $\vec{B} = B \vec{e}_z$, la force de Lorentz s'écrit donc :

$$\vec{F}_L = -qB (-\dot{x} \vec{e}_y + \dot{y} \vec{e}_x)$$

Le principe fondamental de la dynamique (PFD), en projection sur \vec{e}_z conduit alors à :

$$m\ddot{z} = 0 \implies \dot{z} = \dot{z}(0) = v_{0z} \quad \text{et} \quad z(t) = v_{0z}t$$

Le mouvement le long de Oz est donc un mouvement *rectiligne uniforme*.

I.B –

I.B.1) Projetons maintenant le PFD sur les vecteurs \vec{e}_x et \vec{e}_y . En notant $v_x = \dot{x}$ et $v_y = \dot{y}$, nous obtenons :

$$\begin{cases} m\dot{v}_x = -qBv_y \\ m\dot{v}_y = qBv_x \end{cases} \implies \begin{cases} \dot{v}_x = -\omega_c v_y & (1) \\ \dot{v}_y = \omega_c v_x & (2) \end{cases}$$

Dérivons la première équation par rapport au temps : $\ddot{v}_x = -\omega_c \dot{v}_y$ et éliminons \dot{v}_y pour obtenir :

$$\ddot{v}_x + \omega_c^2 v_x = 0$$

dont la solution est :

$$v_x(t) = A \cos(\omega_c t) + B \sin(\omega_c t)$$

Les conditions initiales sont : $v_x(0) = v_{0x}$ et (1) donne $\dot{v}_x(0) = -\omega_c v_y(0) = 0$, ce qui conduit à $A = v_{0x}$ et $B = 0$, d'où :

$$v_x(t) = v_{0x} \cos(\omega_c t)$$

En substituant dans l'équation (2), nous obtenons :

$$\dot{v}_y = \omega_c v_x = \omega_c v_{0x} \cos(\omega_c t) \implies v_y(t) = v_{0x} \sin(\omega_c t) + C$$

avec $C = 0$ puisque $v_y(0) = 0$. Il vient donc :

$$v_y(t) = v_{0x} \sin(\omega_c t)$$

I.B.2) Primitivons les deux équations précédentes. Nous obtenons :

$$x(t) = \frac{v_{0x}}{\omega_c} \sin(\omega_c t) + C_1 \quad \text{et} \quad y(t) = -\frac{v_{0x}}{\omega_c} \cos(\omega_c t) + C_2$$

Les conditions initiales $x(0) = 0$ et $y(0) = 0$ conduisent alors à :

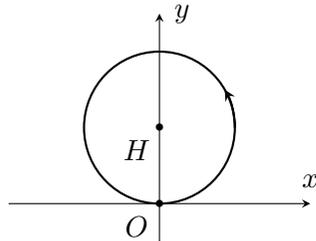
$$x(t) = \frac{v_{0x}}{\omega_c} \sin(\omega_c t) \quad \text{et} \quad y(t) = \frac{v_{0x}}{\omega_c} (1 - \cos(\omega_c t))$$

I.B.3) Éliminons le temps :

$$\begin{cases} x = \frac{v_{0x}}{\omega_c} \sin(\omega_c t) \\ y - \frac{v_{0x}}{\omega_c} = -\frac{v_{0x}}{\omega_c} \cos(\omega_c t) \end{cases} \implies x^2 + \left(y - \frac{v_{0x}}{\omega_c}\right)^2 = \left(\frac{v_{0x}}{\omega_c}\right)^2$$

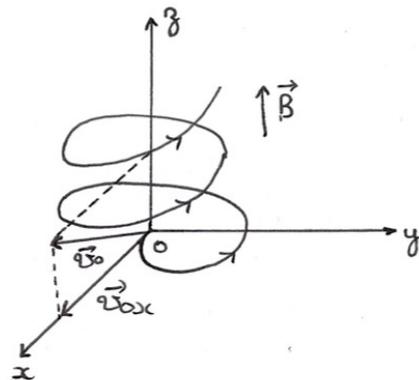
ce qui est l'équation d'un cercle (Γ) de centre $H \left(0, \frac{v_{0x}}{\omega_c} \right)$ et de rayon $r_H = \frac{v_{0x}}{\omega_c}$. De plus, le mouvement de l'électron est T -périodique, avec :

$$T = \frac{2\pi}{\omega_c} \implies f_c = \frac{1}{T_c} = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{qB}{2\pi m}$$



I.C – Application numérique : $f_c = 2,8 \times 10^{10}$ Hz.

I.D – La trajectoire de l'électron dans l'espace est une *hélixe* d'axe Oz et de pas $h = z(t+T) - z(t) = v_{0z}T$.



Le mouvement de l'électron n'est donc pas confiné autour de O car il peut s'échapper le long de l'axe Oz .

Partie II – Mouvement de l'électron dans un champ électrique quadrupolaire

II.A.1) Le champ électrostatique obéit aux deux équations locales : $div \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ (équation de Maxwell - Gauss) et $\vec{E} = -\overrightarrow{grad} U$ (relation champ - potentiel). Ici $\rho = 0$ dans l'espace inter-électrodes puisque c'est le vide. En combinant les deux équations, on obtient :

$$div(-\overrightarrow{grad} U) = 0 \iff \Delta U = 0$$

ce qui s'écrit encore :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$$

II.A.2) L'équation précédente conduit à :

$$4\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \implies \alpha_2 = -2\alpha_1$$

II.A.3) Commençons par éliminer α_2 :

$$U(r, z) = \alpha_0 + \alpha_1 (r^2 - 2z^2)$$

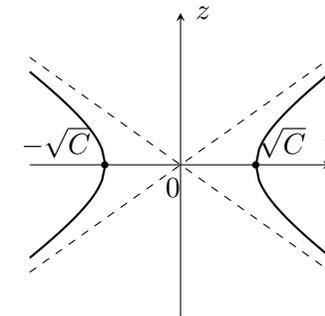
Les conditions aux limites à la surface des électrodes s'écrivent : en $r^2 - 2z^2 = -2z_0^2$, $U = 0$ et en $r^2 - 2z^2 = r_0^2$, $U = V_0$:

$$\begin{cases} \alpha_0 - 2\alpha_1 z_0^2 = 0 \\ \alpha_0 + \alpha_1 r_0^2 = V_0 \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha_1 = \frac{V_0}{r_0^2 + 2z_0^2} = \frac{V_0}{4d^2} \\ \alpha_0 = V_0 \frac{2z_0^2}{r_0^2 + 2z_0^2} = V_0 \frac{z_0^2}{2d^2} \end{cases}$$

On obtient :

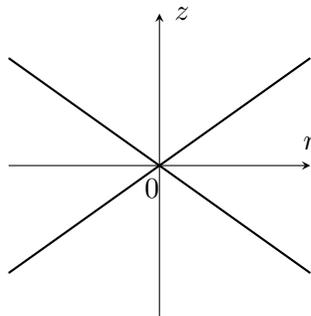
$$U(r, z) = V_0 \frac{z_0^2}{2d^2} + \frac{V_0}{4d^2} (r^2 - 2z^2)$$

II.A.4) Les équipotentielles sont définies par l'équation $U(r, z) = Cste$, ce qui implique $r^2 - 2z^2 = C$ où C est une constante.



Équipotentielle pour un $C > 0$

- L'équipotentielle qui passe par O vérifie : $r^2 - 2z^2 = 0$ ($C=0$) et donc $z = \pm \frac{r}{\sqrt{2}}$. Elle est constituée de deux droites de pentes $\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ passant par O .

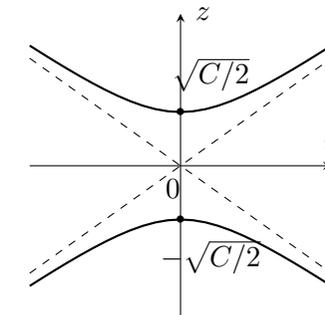


Équipotentielle passant par O

- Pour les autres équipotentielles, $C \neq 0$. Il y a deux possibilités : $C > 0$ ou $C < 0$.

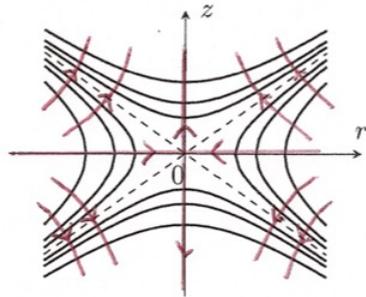
- $C > 0$: l'équation de l'équipotentielle est : $z = \pm \sqrt{\frac{r^2 - C}{2}}$ qui n'est définie que si $|r| \geq \sqrt{C}$. On obtient typiquement des courbes dont l'allure est représentée ci-dessous, avec pour asymptote (lorsque $r \rightarrow \infty$) les deux droites précédentes.

- $C < 0$: l'équation de l'équipotentielle est : $z = \pm \sqrt{\frac{r^2 + |C|}{2}}$ qui est bien définie pour toute valeur de r . Pour une valeur de C donnée, on obtient maintenant les deux courbes dont l'allure est représentée ci-dessous, toujours avec pour asymptote les deux droites précédentes.



Équipotentielle pour un $C < 0$

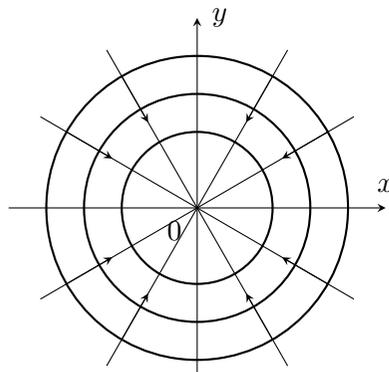
La figure ci-dessous représente quelques surfaces équipotentielles. Les lignes de champ de \vec{E} sont orthogonales aux surfaces équipotentielles, \vec{E} étant toujours orienté vers les potentiels décroissants.



Équipotentiels et lignes de champ

Rem : On verra à la question suivante que le point O est un point de champ nul. Certaines lignes de champs convergent vers O et d'autres en partent.

II.A.5) Dans le plan (Oxy) , c'est à dire pour $z = 0$ l'équation des équipotentiels devient : $r^2 = C$ et donc $x^2 + y^2 = C$ (on a donc forcément $C \geq 0$). Cette équation est celle d'un cercle de centre O et de rayon \sqrt{C} . Les lignes de champ (orthogonales aux équipotentiels) sont donc des demi-droites d'origine O .



Équipotentiels et lignes de champ dans le plan (Oxy)

II.A.6) De la relation $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}U$ on tire :

$$E_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{V_0 x}{2d^2} \quad E_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{V_0 y}{2d^2} \quad \text{et} \quad E_z = -\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{V_0 z}{d^2}$$

II.B.1) Appliquons le principe fondamental de la dynamique à l'électron. Le poids étant toujours négligeable devant la force électrique, nous avons : $m\vec{a} = -q\vec{E}$, ce qui donne :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = q \frac{V_0 x}{2d^2} \\ m\ddot{y} = q \frac{V_0 y}{2d^2} \\ m\ddot{z} = -q \frac{V_0 z}{d^2} \end{cases} \implies \begin{cases} \ddot{x} - \frac{\omega_0^2}{2} x = 0 \\ \ddot{y} - \frac{\omega_0^2}{2} y = 0 \\ \ddot{z} + \omega_0^2 z = 0 \end{cases}$$

II.B.2) Le mouvement selon Oz est un *oscillateur harmonique* de pulsation ω_0 . La solution générale est :

$$z(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

qui est périodique de fréquence $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$

II.B.3) Application numérique : $f_0 = 1,0 \times 10^8$ Hz. On remarque que : $f_c/f_0 \approx 300$.

II.B.4) Prenons l'équation pour x : Les racines de l'équation caractéristique sont :

$$r_{\pm} = \pm \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$$

d'où des solutions en exponentielle réelle ou en ch et sh, de la forme :

$$x(t) = A \operatorname{ch}\left(\frac{\omega_0 t}{\sqrt{2}}\right) + B \operatorname{sh}\left(\frac{\omega_0 t}{\sqrt{2}}\right)$$

qui tendent vers ∞ . Le mouvement n'est donc pas borné.

III.A – On ajoute la force magnétique :

$$\vec{F}_m = -q \vec{v} \wedge \vec{B} = -qB (\dot{x} \vec{e}_x + \dot{y} \vec{e}_y + \dot{z} \vec{e}_z) \wedge \vec{e}_z$$

d'où :

$$\vec{F}_m = -qB (-\dot{x} \vec{e}_y + \dot{y} \vec{e}_x)$$

Le PFD conduit à :

$$\begin{cases} \ddot{x} &= \frac{\omega_0^2}{2} x - \omega_c \dot{y} \\ \ddot{y} &= \frac{\omega_0^2}{2} y + \omega_c \dot{x} \\ \ddot{z} &= -\omega_0^2 z \end{cases}$$

III.B – Donc le mouvement selon z n'est pas modifié.

III.C.1) On pose $\underline{u} = x + iy$ donc $\ddot{\underline{u}} = \ddot{x} + i\ddot{y}$. En utilisant les deux premières équations, on obtient :

$$\ddot{\underline{u}} = \frac{\omega_0^2}{2} \underline{u} + \omega_c \underbrace{(-\dot{y} + i\dot{x})}_{=i\dot{\underline{u}}}$$

et donc :

$$\boxed{\ddot{\underline{u}} - i\omega_c \dot{\underline{u}} - \frac{\omega_0^2}{2} \underline{u}}$$

III.C.2) L'équation caractéristique s'écrit :

$$r^2 - i\omega_c r - \frac{\omega_0^2}{2} = 0$$

Pour avoir un mouvement confiné, il faut des racines imaginaires pures, ce qui impose un discriminant $\Delta < 0$. On en déduit que :

$$\Delta = -\omega_c^2 + 2\omega_0^2 < 0 \iff \omega_c > \sqrt{2}\omega_0$$

ce qui s'écrit :

$$\boxed{\frac{qB}{m} > \sqrt{\frac{2qV_0}{md^2}} \iff B > \sqrt{\frac{2mV_0}{qd^2}} = B_0}$$

Application numérique : $B_0 = 5,2 \times 10^{-3}$ T ce qui est une valeur tout à fait réalisable au laboratoire.

III.C.3) Nous avons donc $\Delta < 0$ et deux racines imaginaires pures sont :

$$r_+ = \frac{i\omega_c}{2} + \frac{i\sqrt{\omega_c^2 - 2\omega_0^2}}{2} \quad \text{et} \quad r_- = \frac{i\omega_c}{2} - \frac{i\sqrt{\omega_c^2 - 2\omega_0^2}}{2}$$

de la forme :

$$r_+ = i\omega_2 \quad \text{et} \quad r_- = i\omega_1$$

avec $\omega_1 < \omega_2$. La solution générale de l'équation différentielle est donc :

$$\underline{u}(t) = A_2 \exp(\omega_2 t) + A_1 \exp(i\omega_1 t)$$

Comme $\omega_0 \ll \omega_c$, on peut se contenter d'un développement limité :

$$\begin{aligned} \sqrt{\omega_c^2 - 2\omega_0^2} &= \omega_c \sqrt{1 - 2\frac{\omega_0^2}{\omega_c^2}} \\ &\approx \omega_c \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega_c^2}\right) \\ &= \omega_c - \frac{\omega_0^2}{\omega_c} \end{aligned}$$

À ce degré d'approximation, nous obtenons :

$$\omega_2 \approx \omega_c \quad \text{et} \quad \omega_1 \approx \frac{\omega_0^2}{2\omega_c} \ll \omega_c$$

III.C.4) Application numérique : $f_1 = \frac{f_0^2}{2f_c} = 1,9 \times 10^5 \text{ Hz}$ et $f_2 = f_c = 2,8 \times 10^{10} \text{ Hz}$.

III.C.5) $\underline{u} = x + iy$ donc :

$$\begin{cases} x(t) = \text{Re}(\underline{u}) = A_1 \cos(\omega_1 t) + A_2 \cos(\omega_2 t) \\ y(t) = \text{Im}(\underline{u}) = A_1 \sin(\omega_1 t) + A_2 \sin(\omega_2 t) \end{cases}$$

ce qui correspond à la somme de deux mouvements circulaires de pulsations respectives ω_1 et ω_2 . Prenons par exemple le premier mouvement circulaire :

$$x(t) = A_1 \cos(\omega_1 t) \quad \text{et} \quad y(t) = A_1 \sin(\omega_1 t) \implies x^2 + y^2 = A_1^2$$

La trajectoire est donc bien un cercle de centre O et de rayon $|A_1|$.

III.D – La trajectoire est composée de grands cercles de rayon A_1 (f_1) + petits cercles de rayon $A_2 \ll A_1$ (f_c) auxquels se superpose un mouvement d'oscillations sinusoidales le long de Oz .

