

Corrigé du sujet Mines Ponts MP 2014

De la physique autour d'un tore - Extrait Mines Ponts MP 2014**I. Étude d'un conducteur ohmique torique**

6. ε_0 est la permittivité du vide. Son unité est le farad par mètre : F.m^{-1} .
7. À partir de l'équation de Maxwell-Gauss $\text{div } \vec{E} = \rho/\varepsilon_0$ et de la loi d'Ohm locale $\vec{j} = \gamma \vec{E}$, on peut transformer l'équation de conservation de la charge :

$$\text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \text{en} \quad \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\rho}{\tau} = 0}$$

où la constante de temps τ vaut :

$$\boxed{\tau = \frac{\varepsilon_0}{\gamma} \approx 10^{-19} \text{ s}}$$

On en déduit la solution :

$$\boxed{\rho(M, t) = \rho(M, 0) e^{-t/\tau}}$$

qui est quasiment négligeable au bout d'une durée $T \approx 5\tau$, c'est à dire **quasiment instantanément**.

8. L'ARQS revient à faire $c \rightarrow +\infty$ dans les équations de Maxwell, ce qui simplifie l'équation de Maxwell-Ampère en :

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad \text{puisque} \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \rightarrow \vec{0}$$

9. On a donc maintenant pour système d'équations vérifiées en régime permanent dans un conducteur ohmique :

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} ; \quad \rho = 0 ; \quad \text{div } \vec{E} = 0 \quad \text{et} \quad \text{rot } \vec{E} = \vec{0}$$

La dernière équation entraîne qu'il existe un potentiel électrique V tel que $\vec{E} = -\text{grad } V$. L'équation de Maxwell-Gauss implique alors que :

$$\text{div } (\text{grad } V) = 0 \quad \text{c'est à dire} \quad \boxed{\Delta V = 0}$$

10. On a maintenant $\frac{d^2 V}{d\theta^2} = 0$ avec $V(0) = U$ et $V(\alpha) = 0$. V est donc une fonction affine de θ :

$$\boxed{V(\theta) = -\frac{U}{\alpha} \theta + U \quad \text{donc} \quad \vec{E} = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{u}_\theta = \frac{U}{\alpha r} \hat{u}_\theta \quad \text{d'où} \quad \vec{j} = \frac{\gamma U}{\alpha r} \hat{u}_\theta}$$

11. L'intensité demandée est le flux du vecteur $\vec{j}$ à travers la section du tore : $I = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S}$ avec $d\vec{S} = dr dz \hat{u}_\theta$. Il vient donc l'expression :

$$I = \frac{\gamma U}{\alpha} \int_a^b \frac{dr}{r} \int_0^c dz \quad \text{d'où} \quad I = \frac{\gamma c}{\alpha} \ln\left(\frac{b}{a}\right) U$$

qu'on écrit $I = U/R$ avec :

$$\boxed{R = \frac{\alpha}{\gamma c} \frac{1}{\ln(b/a)}}$$

12. La relation demandée est donc $R = \frac{L}{\gamma S}$. Ici, on peut remarquer que :

$$\ln\left(\frac{b}{a}\right) = \ln\left(1 + \frac{b-a}{a}\right) \approx \frac{b-a}{a}$$

si $(b-a) \ll a$. On a donc la valeur approchée :

$$R \approx \frac{\alpha a}{\gamma c(b-a)}$$

où on reconnaît $S = c(b-a)$ (section) et $L = \alpha a$ (longueur). On a donc bien $R \approx L/\gamma S$.

III. — Étude d'une pince ampèremétrique

13. — L'approximation des états quasi-stationnaires (AEQS) a été présentée à la question 8 : elle consiste

à négliger le courant de déplacement $\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ devant le courant de conduction $\vec{j}$, donc à calculer le champ magnétique par les équations $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ et $\text{div} \vec{B} = 0$, exactement comme dans le cas magnétostatique. Le théorème de Stokes $\oint_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \int_{(S)} \vec{\text{rot}} \vec{B} \cdot d\vec{S}$ pour un contour fermé (C) servant de bord orienté à la surface (S) permet alors d'énoncer le théorème d'Ampère, la circulation de $\vec{B}$ sur un tel contour fermé vérifie $\oint_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 i_{(S)}$ où le courant enlacé $i_{(S)}$ est celui qui traverse la surface (S).

14. — Tout plan contenant l'axe (Oz) est un plan de symétrie matérielle des courants $i(t)$ et $i_1(t)$ donc le champ $\vec{B}$ créé par ces courants est perpendiculaire à ces plans de symétrie : $\vec{B}(M) = B(r, \theta, z) \hat{u}_\theta$. Ce champ est également invariant par toute rotation d'un angle multiple de $2\pi/N$; si N est assez grand, il s'agit pratiquement d'une invariance de révolution donc $\vec{B}(M) = B(r, z) \hat{u}_\theta$. On applique alors le théorème d'Ampère à un cercle (C) de rayon r et d'axe (Oz), donc à r et z fixés, et entièrement situé à l'intérieur du tore ; on a alors $d\vec{r} = r d\theta \hat{u}_\theta$ donc $\oint_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{r} = 2\pi r B(r, z)$. Le courant traversant un disque de rayon r comporte (dans le sens positif) le courant i au centre en N courants tous égaux à i_1 (puisque le cercle (C) est intérieur au tore, le disque est traversé une seule fois par chacun des fils formant un rectangle) soit $i_{(S)} = i + N i_1$ et $\vec{B}(M) = B(r) \hat{u}_\theta$ où $B(r) = \frac{\mu_0}{2\pi r} (i + N i_1)$.

15. — Considérant que le bobinage de la pince ampèremétrique est formé de N rectangles de côtés $b-a$ et c , il vient $\Phi = N \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$ avec $d\vec{S} = dr dz \hat{u}_\theta$ donc $\Phi = \frac{\mu_0 N}{2\pi} (i + N i_1) \int_a^b \frac{dr}{r} \int_0^c dz$ ou enfin

$$\Phi = \frac{\mu_0 N c}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a} (i + N i_1).$$

Puisque $\Phi = L i_1 + M i$ pour i et i_1 quelconque, on peut identifier les deux termes $L = \frac{\mu_0 N^2 c}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a}$ et $M = \frac{\mu_0 N c}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a} = \frac{L}{N}$.