

## I Champ gravitationnel et champ de pesanteur terrestre

### I.A Champ gravitationnel créé par la Terre

1. La force électrostatique exercée dans le champ  $\vec{E}$  sur une particule d'épreuve de charge  $q$  est  $\vec{F} = q\vec{E}$ , tout comme la force de gravitation exercée dans le champ  $\vec{G}$  sur une particule d'épreuve de charge  $m$  est  $\vec{F} = m\vec{G}$ .

De plus, le champ électrostatique créé en  $M$  par une charge ponctuelle  $q_0$  en  $P$  est  $\vec{E} = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{PM}}{PM^3}$  alors que le champ gravitationnel créé en  $M$  par une masse ponctuelle  $m_0$  en  $P$  est  $\vec{G} = -Gm_0 \frac{\vec{PM}}{PM^3}$ . De ce fait, le

théorème de Gauss électrostatique  $\oiint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{int}}$  devient  $\oiint_{(S)} \vec{G} \cdot d\vec{S} = -4\pi GM_{\text{int}}$  : le flux du champ de gravitation à travers une surface  $(S)$  fermée et orientée vers l'extérieur est proportionnel à la masse  $M_{\text{int}}$  située à l'intérieur de cette surface  $(S)$ . Dans cette expression,  $G$  est la constante de la gravitation universelle (constante de Cavendish).

2. Les propriétés de symétrie de la Terre permettent d'abord de déterminer la direction de ce champ : au point  $M$ , tout plan contenant  $CM$  est un plan de symétrie des masses donc le champ de gravitation  $\vec{G}(M)$  est contenu dans chacun de ces plans, donc dans leur intersection  $\overline{CM}$  et on peut écrire  $\vec{G}(M) = \mathcal{G}(M)\vec{e}_r$ . De plus, le problème physique est invariant par toute rotation autour de  $C$  donc l'intensité  $\mathcal{G}(M)$  ne peut dépendre que de  $r = CM$  et  $\vec{G}(M) = \mathcal{G}(r)\vec{e}_r$ . On peut finalement appliquer le théorème de Gauss à une sphère de centre  $C$  et de rayon  $r$  pour laquelle  $\oiint_{(S)} \vec{G} \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 \mathcal{G}(r)$ . Si  $r > R_T$  cette sphère contient toute la masse  $M_T$  de la

Terre donc  $\vec{G}(M) = -\frac{GM_T}{r^2} \vec{e}_r$  où  $r = R_T + z$ .

### I.B Variation du champ gravitationnel avec l'altitude

3. L'intensité du champ gravitationnel est  $\mathcal{G}_T(z) = \frac{GM_T}{R_T^2} \left(1 + \frac{z}{R_T}\right)^{-2}$  soit, dans un développement au premier

ordre,  $\mathcal{G}_T(z) = \frac{GM_T}{R_T^2} \left(1 - 2\frac{z}{R_T}\right) + o(z)$ .

4. Une variation de 1% de cette intensité correspond à  $\frac{2z}{R_T} = 10^{-2}$  donc  $z = \frac{10^{-2}}{2} R_T = 31,9 \text{ km}$ .

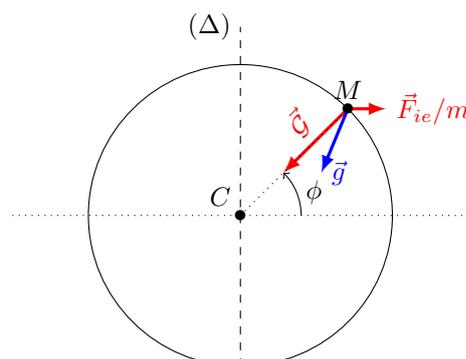
5. On définit ce gradient par  $\vec{H} = \text{grad} \|\vec{G}_T(z)\| = -\frac{2GM_T}{R_T^3} \vec{e}_z$  ; il est dirigé vers les zones de champ fort (vers le sol) et décrit la variation (ici, la diminution avec l'altitude) de champ de gravitation.

6.  $1 \mu\text{gal} \cdot \text{cm}^{-1} = 10^{-6} \text{ s}^{-2}$  ; Comme  $\|\vec{H}\| = 3,08 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-2}$  on a  $\|\vec{H}\| = 3,08 \mu\text{gal} \cdot \text{cm}^{-1}$ .

### I.C Champ de pesanteur terrestre

7. Le mouvement d'entraînement est une rotation circulaire uniforme du point coïncidant avec  $M$  autour de l'axe  $(\Delta)$ , à la distance  $R_T \cos \phi$  de cet axe donc  $\vec{F}_{ie} = m\omega^2 R_T \cos \phi \vec{u}$ .

8. En sommant les deux effets cités,  $\vec{g} = -\frac{GM_T}{r^2} \vec{e}_r + \omega^2 R_T \cos \phi \vec{u}$  :



9. On peut faire le quotient des deux termes,  $\alpha = \frac{\|\vec{F}_{ie}\|/m}{\|\vec{g}\|}$  soit, à l'équateur (là où le terme d'inertie est le plus

important,  $\alpha_{\max} = \frac{\omega^2 R_T^3}{GM_T}$  où  $\frac{2\pi}{\omega} = 1 \text{ j} = 86\,400 \text{ s}$  (en toute rigueur on devrait ici prendre un jour sidéral, 86 164 s, et pas un jour solaire, mais la comparaison n'en est que peu affectée) donc  $\alpha_{\max} = 1,2 \cdot 10^{-2}$ . Cet écart est en pratique très significatif et ne peut en aucun cas être négligé.

## II Méthodes de mesure du champ de pesanteur à l'aide de pendules

### II.A Le pendule de Richter

10. La période des petites oscillations du pendule,  $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ , dépend de  $g$  donc permet de remonter à une mesure de  $g$ .

11. Un pendule qui retarde a une période d'oscillation plus grande (il marque moins de périodes dans la même durée). Le pendule de Richter a donc une période à Cayenne  $T_C$  plus grande que celle  $T_P$  à Paris dans un rapport  $\frac{T_C}{T_P} = 1 + \frac{2 \text{ min } 28 \text{ s}}{1 \text{ j}} = 1 + 1,7 \cdot 10^{-3}$ . En supposant que la longueur du pendule est inchangée, on a donc  $\frac{g_P}{g_C} = (1 + 1,7 \cdot 10^{-3})^2 = 1 + 3,4 \cdot 10^{-3}$  donc  $g_C = 9,78 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ . L'écart en altitude ne peut être invoqué ici puisqu'il vaut au maximum  $\Delta z = 131 \text{ m}$  avec  $\frac{2\Delta z}{R_T} = 7 \cdot 10^{-5}$ ; il s'agit donc essentiellement d'un écart entre termes d'inertie. Le schéma tracé à la question 8 ci-dessus montre bien d'ailleurs que le terme d'inertie diminue le plus fortement la valeur du champ de pesanteur pour un point proche de l'équateur, ce qui est bien sûr le cas de Cayenne.

12. De la relation  $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$  on tire, en assimilant les incertitudes à des différentielles,  $\frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{2} \frac{\Delta g}{g}$ . Comme le pendule bat la seconde,  $T = 1 \text{ s}$  et  $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  donnent, avec  $\Delta g = 10^{-8} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  une incertitude à atteindre  $\Delta T = \frac{T}{2} \frac{\Delta g}{g} \simeq 5 \text{ ns}$  !

### II.B Le pendule vertical

13. L'élongation d'un ressort usuel est de l'ordre du centimètre; elle est directement proportionnelle au poids de l'objet fixé à la base de ce ressort. Une variation  $\Delta g = 10 \mu\text{gal}$  correspond à  $\frac{\Delta g}{g} \simeq 10^{-8}$  donc la variation de l'élongation est  $\frac{\Delta \ell}{\ell} \simeq 10^{-8}$  donc la variation de l'élongation est  $\Delta \ell \sim 0,1 \text{ nm}$  !

14. Une faible variation de la longueur d'un tel ressort conduit à une variation relative beaucoup plus importante de la force de rappel qu'avec un ressort de longueur à vide non nulle.

## III Gravimètre à fléau de LaCoste et Romberg

15. On peut par exemple imaginer que la hauteur  $y$  est initialement réglée de sorte que le système soit à l'équilibre avec la tige horizontale ( $\theta = 0$ ). Une petite variation du champ de pesanteur fait pivoter la tige (vers le bas,  $\theta > 0$  si  $g$  augmente et donc le ressort s'allonge, tandis que l'angle entre le ressort et la tige diminue : la variation du couple de rappel est donc faible, permettant de détecter de faibles variations  $\Delta g$ . On peut effectuer la lecture de  $\Delta g$  en ramenant la tige à la position horizontale d'origine à l'aide d'un réglage d'une nouvelle valeur de  $y$  au moyen d'une vis micrométrique.

16. L'énergie potentielle de pesanteur est  $mgh$  où l'altitude  $h$  de la masse  $m$  est mesurée par rapport au point  $O$ ,  $h = -a \sin \theta$ . L'énergie potentielle élastique est  $\frac{1}{2}k(s - s_0)^2$  donc  $E_p = \frac{1}{2}k(s - s_0)^2 - mga \sin \theta$ .

17. Les coordonnées des extrémités du ressort sont  $(0, y)$  et  $(b \cos \theta, -b \sin \theta)$  donc  $s = \sqrt{b^2 + y^2 + 2yb \sin \theta}$ .

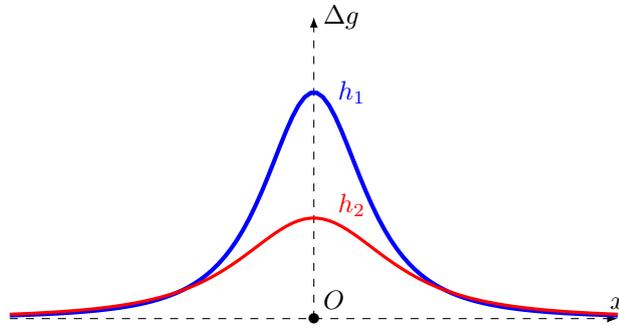
18. Il suffit de dériver...  $\Gamma = mga \cos \theta - k(s - s_0) \frac{\partial s}{\partial \theta}$  avec  $\frac{\partial s}{\partial \theta} = \frac{yb \cos \theta}{s}$  donc  $\Gamma = mga \cos \theta - kyb \cos \theta \left(1 - \frac{s_0}{s}\right)$

qu'on peut écrire  $\Gamma = \left(mga - kyb + \frac{kybs_0}{\sqrt{b^2 + y^2 + 2yb \sin \theta}}\right) \cos \theta$  comme demandé.

19. Avec  $s_0 = 0$  donc  $\Gamma = (mga - kyb) \cos \theta$ , l'équilibre est réalisé si  $\Gamma = 0$  donc (sauf pour  $\theta = \pm\pi/2$ , exclu ici) lorsque  $\boxed{g = k\frac{b}{a}y}$  : une mesure de  $y$  donne directement une valeur de  $g$ , proportionnelle à la valeur mesurée. Avec un ressort « classique », la valeur de  $g$  dépend de  $y$  et de la valeur de  $s$  à l'équilibre sous la forme  $g = k\frac{b}{a}y \left[1 - \frac{s_0}{s}\right]$  donc une mesure reste en principe possible mais avec sans doute une sensibilité moindre.
20. On a maintenant pour points d'attache les coordonnées  $(y \sin \phi, y \cos \phi)$  et  $(b \cos \theta, -b \sin \theta)$  donc  $s^2 = b^2 + y^2 + 2yb(\cos \phi \sin \theta - \cos \theta \sin \phi)$  d'où enfin  $\boxed{E'_p = \frac{1}{2}k [b^2 + y^2 + 2yb \sin(\theta - \phi)] - mga \sin \theta}$  : tout se passe comme si on mesurait, pour la partie élastique, l'angle  $\theta$  décalé de  $\phi$ .
21. La position d'équilibre devient **stable** comme le montre l'existence d'un minimum d'énergie potentielle. De plus, on va montrer que cet angle augmente la sensibilité du dispositif puisque  $\phi$  apparaît au dénominateur de l'expression affirmée par l'énoncé à la question 26.
22. On a toujours  $\Gamma' = -\frac{\partial E_p}{\partial \theta} = mga \cos \theta - kyb \cos(\theta - \phi)$  qu'on écrit comme demandé en développant le sinus,  $\boxed{\Gamma' = mga \cos \theta + kyb [\cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi]}$ .
23. Le pivot est parfait et n'exerce donc aucun moment en projection sur l'axe de rotation ( $Oz$ ) ; le théorème du moment cinétique, projeté sur cet axe, prend donc la forme  $J\dot{\theta} = \Gamma'$  donc, pour de petits angles  $\theta$ ,  $J\dot{\theta} = (mga - kyb \cos \phi) - kyb \sin \phi \theta$  ou, en pratique,  $\phi$  étant également petit,  $\boxed{J\ddot{\theta} = (mga - kyb) - kyb\phi\theta}$ .
24. On peut recopier cette équation sous la forme  $\ddot{\theta} + \omega_0^2(\theta - \theta_0) = 0$  avec pour pulsation propre des oscillations  $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{kyb\phi}{J}}}$  et pour position moyenne la position d'équilibre stable donnée par  $\boxed{\theta_0 = \frac{mga - kyb}{kyb\phi}}$ .
25. On a maintenant  $mg_0a = kyb$  et  $\phi = \frac{4\pi^2}{T_0^2} \frac{J}{mg_0a}$  donc  $\boxed{\phi = \frac{4\pi^2}{T_0^2} \frac{a}{g_0} \simeq 10^{-4} \text{ rad}}$  soit aussi  $20''$  (secondes d'arc) : c'est un angle très faible mais dont le réglage reste possible au moyen de dispositifs mécaniques.
26. On a maintenant pour nouvelle position d'équilibre  $\theta'_0 = \frac{mga - mg_0a}{mg_0a\phi}$  qui vérifie bien  $\boxed{\theta'_0 = \frac{\Delta g}{g_0\phi}}$  (l'usage de l'expression en  $\tan \phi$  par l'énoncé n'est pas justifié ici).
27. Avec  $\frac{\Delta g}{g_0} = 10^{-8}$  et  $\phi = 10^{-4}$  on trouve  $\boxed{\theta'_0 \simeq 10^{-4} \text{ rad}}$  ou a nouveau une vingtaine de secondes d'arc ; cette valeur reste mesurable au moyen d'un dispositif de précision.

## IV Applications de la gravimétrie

28. L'expression demandée est en fait celle du champ de gravitation, et non de pesanteur... Elle est donc donnée par les symétries de la boule, comme à la question 2 et les résultats obtenus à cette question s'adaptent sous la forme  $\vec{g}_B = -\frac{GM_B}{r^2}\vec{e}_r$  où  $M_B = \mu' \frac{4}{3}\pi R^3$  donc  $\boxed{\vec{g}_B = -\frac{4G(\mu_m + \Delta\mu)\pi R^3}{3r^2}\vec{e}_r}$ .
29. La projection de  $-\vec{e}_r$  sur l'axe vertical  $\vec{e}_z$  est  $-\vec{e}_r \cdot \vec{e}_z = \frac{h}{r}$  donc  $g_{Bz} = \frac{4G(\mu_m + \Delta\mu)\pi R^3}{3r^3}h$  qu'on écrit aussi  $\boxed{g_{Bz} = \frac{4G(\mu_m + \Delta\mu)\pi R^3}{3(h^2 + x^2)^{3/2}}h}$ .
30. On peut considérer que le champ de pesanteur est celui créé par la Terre (de masse volumique uniforme  $\mu_m$ ) auquel on superpose le champ créé par une boule (et non une sphère...) de masse  $\mu' - \mu_m$ , ce qui constitue le résultat demandé.
31. On reprend simplement le résultat de la question 29 en l'absence du terme  $\mu_m$  ; il vient  $\boxed{\Delta g = \frac{4G\Delta\mu\pi R^3 h}{3(h^2 + x^2)^{3/2}}}$ .
32. Le tracé de la fonction  $\Delta g(x)$  est celui d'une fonction paire de valeur maximale  $\Delta g_{\max} = \frac{4\pi G\Delta\mu R^3}{3h^2}$  atteinte en  $x = 0$  avec une largeur à mi-hauteur  $\Delta x = 2x_0$  telle que  $x_0^2 + h^2 = 2h^2$ , d'où les tracés (page suivante).
33. On a vu que  $\boxed{\Delta x = 2h}$  tandis que  $\boxed{\Delta g_{\max} = \frac{4\pi G\Delta\mu R^3}{3h^2}}$ .
34. Sur la courbe proposée on lit la largeur à mi-hauteur  $\Delta x = 120 \text{ m}$  donc  $\boxed{h = 60 \text{ m}}$  et la valeur maximale  $\Delta g_{\max} = 2,8 \cdot 10^{-9} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  permet de déterminer  $\boxed{R = \left(\frac{3h^2\Delta g_{\max}}{4\pi G\Delta\mu}\right)^{1/3} = 3,30 \text{ m}}$ .



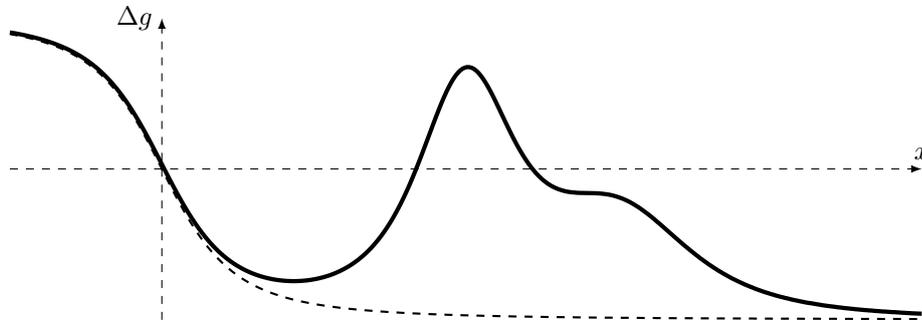
35. Il faut que l'effet cumulé de l'or et de la grotte s'annulent, donc disposer l'or au centre d'une part et faire en sorte que la masse totale de l'or soit la même que celle manquante dans la grotte.

36. La masse maximale d'or est donc  $m_{\text{or}} = \frac{4}{3}\pi R^3 \Delta\mu$  soit avec  $\Delta\mu = \mu_m$  (sphère vide) donné par  $\mu_m = \frac{M_T}{\frac{4}{3}\pi R_T^3} =$

$5,5 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  une masse maximale  $m_{\text{or}} = 23,1 \text{ t}$  occupant au centre de la grotte une boule de rayon

$$r_{\text{or}} = \left( \frac{3m_{\text{or}}}{4\pi\rho_{\text{or}}} \right)^{1/3} = 65 \text{ cm.}$$

37. Il faut superposer deux anomalies dues aux grottes à celle (en pointillés) due à la plaque de calcaire; comme le calcaire est moins dense que le grès cette dernière est dans le sens opposé à celui de l'énoncé d'où l'allure de la courbe obtenue :



## V Prospection électrique des sols

### V.A Sol homogène

38. C'est un résultat du cours,  $R = \frac{1}{\sigma} \frac{L}{A}$ .

39. On veut éviter de réaliser l'électrolyse des solutions aqueuses dans le sous-sol.

40. Les lignes de courant sont radiales de centre  $A$ ,  $\vec{j} = j(\vec{r})\vec{e}_r$ ; on en déduit que la direction au moins du vecteur  $\vec{j}$  dépend des angles sphériques  $\theta$  et  $\varphi$ . La notation (incorrecte donc) de l'énoncé signifie manifestement que l'on considère en fait  $\vec{j} = j(r)\vec{e}_r$  (invariance de révolution) Le flux de  $\vec{j}$  à travers une demi-sphère dans le sous-sol

est donc égal au courant total  $I$  (loi des nœuds, en régime quasi-stationnaire) donc  $\vec{j} = \frac{I}{2\pi r^2} \vec{e}_r$ .

41. Avec la même anomalie dans l'expression du champ électrique, la loi d'Ohm s'écrit ici  $\vec{E} = \rho\vec{j}$  donc  $\vec{E} = \frac{\rho I}{2\pi r^2} \vec{e}_r$  et le potentiel  $V_A$  s'en déduit par circulation du champ électrique,  $dV_A = -\vec{E} \cdot d\vec{r} = -E(r)dr$  donc  $V_A = \frac{\rho I}{2\pi r} + \text{cte}$

ou enfin, compte tenu du choix de constante imposé par l'énoncé,  $V_A(r) = \frac{\rho I}{2\pi r}$ .

42. La superposition de deux potentiels  $V_A = \frac{\rho I}{2\pi r_A}$  et  $V_B = -\frac{\rho I}{2\pi r_B}$  convient du fait de la linéarité des équations

de l'électrostatique donc  $V = \frac{\rho I}{2\pi} \left[ \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right]$ .

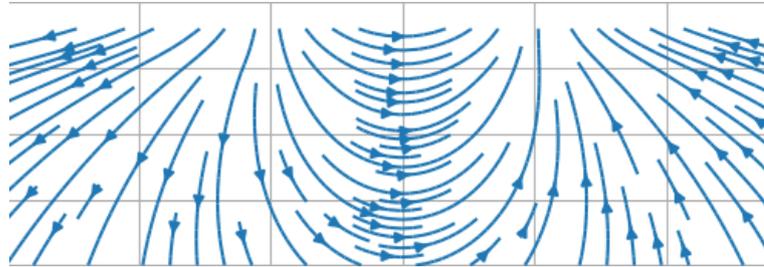
43.  $V_M = \frac{\rho I}{2\pi} \left[ \frac{1}{AM} - \frac{1}{BM} \right]$  et  $V_N = \frac{\rho I}{2\pi} \left[ \frac{1}{AN} - \frac{1}{BN} \right]$  donc  $\Delta V = \frac{\rho I}{2\pi} \left[ \frac{1}{AM} + \frac{1}{BN} - \frac{1}{AN} - \frac{1}{BM} \right]$  qui permet

d'écrire  $\rho = \frac{2\pi\Delta V}{If}$  en posant  $f = \frac{1}{AM} + \frac{1}{BN} - \frac{1}{AN} - \frac{1}{BM}$ .

44. Dans ce cas,  $f = \frac{1}{\ell} + \frac{1}{\ell} - \frac{1}{2\ell} - \frac{1}{2\ell}$  donc  $f = \frac{1}{\ell}$ .

45. Ici  $f = 1/\ell$  où  $3\ell = 10\text{ m}$  donc  $f = 0,3\text{ m}^{-1}$ . On s'attend donc à une différence de potentiel  $\Delta V = \frac{\rho I f}{2\pi}$  soit  $\Delta V = 2,39\text{ V}$ ; les points  $M$  et  $N$ , situés à  $\frac{10}{6} = 1,67\text{ m}$  de part et d'autre du centre de symétrie sont, d'après la simulation, aux potentiels  $\pm 1,2\text{ V}$  donc  $\Delta V \simeq 2,4\text{ V}$  : la simulation est en accord avec le calcul proposé.

46. Les lignes de courant sont confondues avec les lignes de champ électrique, donc perpendiculaires aux équipotentielles, et bien sûr dirigées de  $A$  vers  $B$  :



## V.B Modèle à deux terrains

47. Si  $AB \ll h$ , la présence de la couche profonde est peu sensible (figure 17 à gauche) donc  $\rho_{\text{app}} \rightarrow \rho_1$ . Si  $AB \gg h$ , l'essentiel des lignes de courant passe dans le milieu profond donc  $\rho_{\text{app}} \rightarrow \rho_2$ .

48. On lit directement sur la figure  $\rho_1 = 400\ \Omega \cdot \text{m}$  et  $\rho_2 = 40\ \Omega \cdot \text{m}$ . On lit ensuite sur l'abaque fournie la courbe correspondant à  $\rho_2/\rho_1 = 0,1$ . On peut par exemple identifier le passage par le point milieu, pour  $AB/2h_1 \simeq 2,5$ . Sur la courbe expérimentale proposée on l'observe pour  $AB/2 \simeq 6,5\text{ m}$ ; on en déduit que  $h \simeq 2,6\text{ m}$ .