

DM n°9
 Pour le vendredi 21 janvier 2022

1 Diffusion d'une onde électromagnétique par un atome

Données :

Puissance rayonnée par un dipôle électrique $\vec{p}(t)$ placé en O , à travers une sphère de centre O et de rayon r :

$$P_{\text{ray}} = \frac{\mu_0}{6\pi c} \|\vec{p}(t - r/c)\|^2$$

Un atome d'hydrogène H est placé à l'origine O des coordonnées d'un repère d'espace $(Oxyz)$ liée à un référentiel galiléen. On suppose que le proton est immobile en O . L'électron, de charge $-e$ et de masse m est repéré par son vecteur position \vec{OM} de coordonnées (x, y, z) . On notera \vec{v} son vecteur vitesse. On suppose que :

- L'électron est lié au proton par une force de rappel élastique $\vec{F}_r = -k\vec{OM}$ (cette force résulte d'un développement limité de la force électrique exercée par le proton, autour de la position d'équilibre de l'électron).
- On tient compte de la perte d'énergie de l'électron par rayonnement en introduisant une force de frottement de type fluide : $\vec{F} = -\frac{m}{\tau}\vec{v}$
- L'atome est placé dans une OPPH EM de pulsation ω , rectilignement polarisée selon \vec{e}_z et se propageant dans la direction $+\vec{e}_x$. Le champ électrique de l'onde s'écrit en notation complexe :

$$\vec{E} = E_0 \exp[i(kx - \omega t)] \vec{e}_z$$

avec $E_0 > 0$ constante réelle.

- 1) a) Le milieu de propagation étant le vide, quelle est la relation entre k et ω ? Quelle est l'expression du champ magnétique associé \vec{B} .
- b) On suppose que l'électron n'est pas relativiste : $\|\vec{v}\| \ll c$. Montrer que la force magnétique exercée par l'onde sur l'électron est négligeable devant la force électrique.
- c) Soit a la taille caractéristique de l'atome. On suppose que la longueur d'onde λ de l'onde électromagnétique vérifie : $\lambda \gg a$. En déduire que la force exercée par l'onde sur l'électron peut s'écrire avec une très bonne approximation :

$$\vec{F}_o = -eE_0 \cos(\omega t) \vec{e}_z$$

Sachant que a est de l'ordre du nanomètre, dans quel(s) domaine(s) des ondes électromagnétiques doit être située λ pour que cette approximation soit vérifiée?

- 2) a) Appliquer le principe fondamental de la dynamique à l'électron. En déduire les trois équations différentielles vérifiées par ses coordonnées cartésiennes x , y et z . On posera $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.
- b) Montrer que pour $t \gg \tau$, c'est à dire au delà du régime transitoire, le mouvement forcé de l'électron se fait uniquement suivant \vec{e}_z , c'est à dire que $x(t) \approx 0$ et $y(t) \approx 0$ et déterminer l'expression de $z(t)$.

L'atome H se comporte comme un dipôle électrique de moment :

$$\vec{p}(t) = -e\vec{OM}$$

- 3)** a) Calculer la puissance électromagnétique rayonnée $P_{\text{ray}}(r, t)$ à la distance $r \gg a$ de l'atome et à l'instant t et en déduire sa valeur moyenne $\langle P_{\text{ray}} \rangle$ vérifie :

$$\langle P_{\text{ray}} \rangle = P_0 \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2}$$

en explicitant l'expression de la constante P_0 en fonction de E_0 , e , m , c et ε_0 .

- b) Les deux paramètres ω_0 et $1/\tau$ étant du même ordre de grandeur, montrer que lorsque $\omega \gg \omega_0$:

$$\langle P_{\text{ray}} \rangle = P_0 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4$$

Il s'agit de la diffusion de Rayleigh.