Corrigé du DM n°9

1 Diffusion d'une onde électromagnétique par un atome

1) a) On a $k = \omega/c$ et :

$$\boxed{\underline{\overrightarrow{B}} = \frac{\overrightarrow{k} \wedge \underline{\overrightarrow{E}}}{\omega} = -\frac{E_0}{c}\,\exp[\,i(kx-\omega t)\,]\,\overrightarrow{e_y}}$$

b) $\|\overrightarrow{B}\| = \|\overrightarrow{E}\|/c$. On a donc :

$$\|-e\,\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}\| \leqslant e\|\overrightarrow{v}\|\|\overrightarrow{B}\| = \frac{\|\overrightarrow{v}\|}{c}\,e\|\overrightarrow{E}\|$$

donc :

$$\frac{\|-e\,\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}\|}{\|-e\overrightarrow{E}\|} \leqslant \frac{\|\overrightarrow{v}\|}{c} \ll 1$$

c) Comme $k = 2\pi/\lambda$ la force électrique ressentie par l'électron est (x étant l'abscisse de l'électron) :

$$\overrightarrow{F_o} = -\,eE_0\cos(kx-\omega t)\,\vec{e}_z$$

or $|kx| \leqslant ka = 2\pi a/\lambda \ll 2\pi$ On peut donc négliger kx devant ωt.

- Domaine des UV, visible, infrarouge.

2) a)

$$\left\{\begin{array}{lcl} \ddot{x} & = & -\dot{x}/\tau - (k/m)x \\ \ddot{y} & = & -\dot{y}/\tau - (k/m)y \\ \ddot{z} & = & -\dot{z}/\tau - (k/m)z - (e/m)E_0\cos(\omega t) \end{array}\right.$$

b) Les équations homogènes sont des oscillateurs amortis don on sait que la solution tend vers 0 dans les trois régimes : apériodique, critique et pseudo-périodique. On a donc $x(t) = y(t) = 0$ pour $t \gg \tau$.

En ce qui concerne $z(t)$ il ne reste que la solution particulière qui s'obtient par la méthode complexe.

$$\left(-\omega^2 + \omega_0^2 + \frac{i\omega}{\tau}\right)\underline{z} = -\,\frac{eE_0}{m}\,e^{i\omega t}$$

d'où :

$$\underline{z} = -\,\frac{1}{\left(-\omega^2+\omega_0^2+\frac{i\omega}{\tau}\right)}\,\frac{eE_0}{m}\,e^{i\omega t} = -\,\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2}}\,\frac{eE_0}{m}\,e^{i(\omega t+\alpha)}$$

avec $\alpha = \arg[\,1/\left(-\omega^2+\omega_0^2+\frac{i\omega}{\tau}\right)\,]$. Finalement :

$$\boxed{z(t) = -\,\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2}}\,\frac{eE_0}{m}\,\cos(\omega t+\alpha)}$$

L'atome H se comporte comme un dipôle électrique de moment :

$$\vec{p}(t) = -\,e\,\overrightarrow{OM}$$

3) a) On a $\overrightarrow{p}(t) = -ez(t)\,\overrightarrow{e_z}$ et donc en utilisant la formule de P_{ray} donnée en début d'énoncé et en prenant la valeur moyenne d'un $\cos^2$ qui vaut $1/2$ on obtient :

$$\boxed{< P_{\text{ray}} >= \frac{\mu_0 e^4}{6\pi m^2 c}\,E_0^2 \frac{\omega^4}{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+\left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2}}$$

b) Il s'agit plutôt du cas $\omega \ll \omega_0^2$. Le dénominateur peut être remplacé par ω_0^4.