

Corrigé du DM n°10

# 1 Étude électromagnétique du phénomène de réflexion totale. Centrale MP 2019

## I.A Réflexion totale

**Q 9** Les lois de SNELL–DESCARTES décrivent les rayons issus d'un d'un rayon incident provenant d'un milieu transparent d'indice  $n_1$  lorsqu'il aborde le dioptre (remplacé localement par son plan tangent) qui le sépare d'un autre milieu transparent d'indice  $n_2$ . La première loi affirme qu'un rayon incident, se propageant dans le *plan d'incidence* (défini par le rayon lui-même et la normale  $\vec{n}$  au dioptre au point d'incidence  $I$ ) donne naissance éventuellement à un rayon réfléchi et un rayon transmis, tous deux se propageant dans le même plan d'incidence (figure 1).

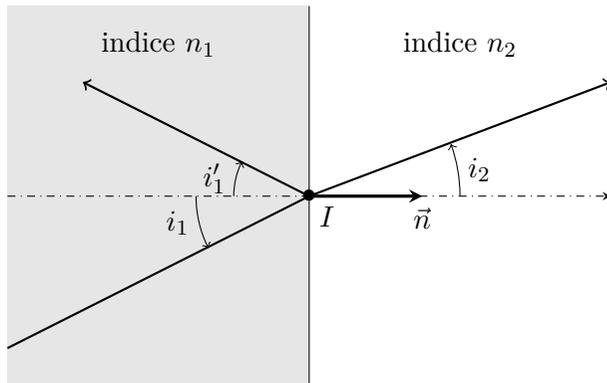


FIGURE 1 – Figure pour la question Q9

La seconde loi donne, dans ce plan, la direction du rayon ré-

fléchi selon  $i'_1 = -i_1$  et du rayon réfracté (transmis) selon  $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$  respectivement.

**Q 10** La réflexion totale est la propriété de concentrer toute l'intensité émergente dans le seul rayon réfléchi ; c'est ce qu'on observe lorsque l'équation permettant de déterminer la direction  $i_2$  n'a pas de solution, donc lorsque  $n_1 \sin i_1 > n_2$ . Il faut donc d'abord  $n_1 > n_2$  et de plus  $\sin i_1 > \frac{n_2}{n_1}$ .

**Q 11** La réponse est non car le faisceau incident parvient sur le dioptre derrière lequel se trouve l'objet à observer sous un angle  $i = \frac{\pi}{4}$  tandis que les sillons susceptibles d'être éclairés sont dans l'air ( $n_{\text{air}} = 1$ ) et il y a réflexion totale car  $n \sin i = \frac{1,5}{\sqrt{2}} = 1,06 > 1$ .

## I.B Passage d'une onde électromagnétique sur un dioptre

### I.B 1) Relation de dispersion

**Q 12** Dans le vide ( $\rho = 0, \vec{j} = \vec{0}$ ) les équations de MAXWELL s'écrivent  $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$ ,  $\text{div } \vec{B} = 0$ ,  $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  et  $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ . On en déduit par exemple pour le champ électrique  $\text{rot rot } \vec{E} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$  tandis qu'une relation générale de l'analyse vectorielle permet aussi d'écrire  $\text{rot rot } \vec{E} = \text{grad div } \vec{E} - \Delta \vec{E}$ ; on a donc établi l'équation de propagation de D'ALEMBERT,  $\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$ . On en déduit la relation de dispersion en cherchant une solution ayant la forme d'une onde plane progressive et monochromatique,  $\vec{E} = \vec{E}_0 \exp[-j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})]$  pour laquelle l'équation de propagation impose la relation de dispersion  $\vec{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$  ainsi que la vitesse de phase  $v_\varphi = \frac{\omega}{\|\vec{k}\|} = c$  ;

elle ne dépend pas de la pulsation de l'onde donc le vide n'est pas dispersif.

- Q 13** On remplace  $\varepsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}$  par  $\frac{n^2}{c^2}$  d'où la nouvelle relation de dispersion  $\vec{k}^2 = n^2\frac{\omega^2}{c^2}$  et la vitesse de phase associée  $v_\varphi = \frac{c}{n}$  qui dépend cette-fois-ci de la pulsation de l'onde, donc le milieu est dispersif.

**I.B 2) Coefficients de réflexion et de transmission**

- Q 14** La continuité du champ électrique en tout point du dioptre  $z = 0$  impose  $\vec{E}_i(z = 0) + \vec{E}_r(z = 0) = \vec{E}_t(z = 0)$  donc en projection sur  $\vec{e}_y$  et après simplification par  $E_0 \exp(j\omega t)$  il reste, avec  $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$  la relation  $e^{jk_{ix}x} + r e^{jk_{rx}x} = t e^{jk_{tx}x}$ .
- Q 15** Cette relation est valable  $\forall x$  donc aussi pour  $x = 0$  avec donc  $1 + r = t$ .
- Q 16** En admettant ici l'existence de ces ondes (*ce que suggère le schéma, alors justement qu'on sera plus loin amené à considérer que l'onde transmise n'existe pas nécessairement en tant qu'onde plane...*) les vecteurs d'onde ont pour normes  $k_i = k_r = n\frac{\omega}{c}$  et  $k_t = \frac{\omega}{c}$  donc leurs composantes tangentielles ont pour expressions  $k_{ix} = n\frac{\omega}{c} \sin i_1$ ,  $k_{rx} = -n\frac{\omega}{c} \sin i'_1$  et  $k_{it} = \frac{\omega}{c} \sin i_2$  donc l'égalité des composantes tangentielles des vecteurs d'onde est bien équivalente aux lois de SNELL-DESCARTES,  $i'_1 = -i_1$  et  $n \sin i_1 = \sin i_2$ .
- Q 17** Le champ magnétique d'une onde plane progressive et monochromatique se déduit de la relation de structure (ou de MAXWELL-FARADAY)  $\vec{B} = \frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \vec{E}$ ; on en déduit respectivement  $\vec{B}_i = (-k_{iz}\vec{e}_x + k_{ix}\vec{e}_z) \frac{E_0}{\omega} e^{-j(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})}$ ,  $\vec{B}_r = (-k_{rz}\vec{e}_x + k_{rx}\vec{e}_z) \frac{rE_0}{\omega} e^{-j(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{r})}$  et  $\vec{B}_t = (-k_{tz}\vec{e}_x + k_{tx}\vec{e}_z) \frac{tE_0}{\omega} e^{-j(\omega t - \vec{k}_t \cdot \vec{r})}$ . On peut maintenant écrire la continuité  $\vec{B}_i + \vec{B}_r = \vec{B}_t$  en tout point du dioptre  $z = 0$ ; la

projection normale (sur  $\vec{e}_z$ ) de cette relation redonne simplement la relation  $1 + r = t$  tandis que l'autre projection, associée à la relation géométriquement évidente  $k_{rz} = -k_{iz}$ , fournit la relation attendue,  $k_{iz}(1 - r) = k_{tz}t$  ou encore  $1 - r = \nu t$  avec les notations de l'énoncé. On vérifie bien sûr que les deux relations établies mènent à  $r = \frac{1-\nu}{1+\nu}$  et  $t = \frac{2}{1+\nu}$ .

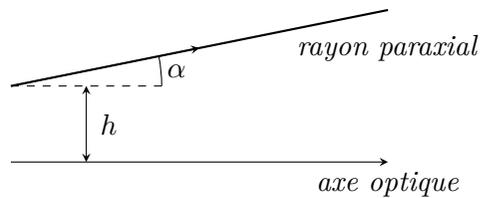
- Q 18** On a déjà projeté sur  $\vec{e}_x$ ,  $k_{ix} = nk_0 \sin i_1$  et de même sur  $\vec{e}_z$ ,  $k_{iz} = nk_0 \cos i_1$ .
- Q 19** De la relation rappelée avec l'équation de dispersion  $\vec{k}_t^2 = k_0^2$  dans le vide on déduit  $k_{tz}^2 = k_0^2 (1 - n^2 \sin^2 i_1)$  donc on doit distinguer le cas  $n \sin i_1 \leq 1$  (en l'absence de réflexion totale en optique géométrique) pour lequel  $k_{tz} = k_0 \sqrt{1 - n^2 \sin^2 i_1}$  définit l'angle  $i_2$  de la réfraction par  $k_{tz} = k_0 \cos i_2$ , et le cas  $n \sin i_1 > 1$  (avec réflexion totale) pour lequel  $k_{tz} = +jk_0 \sqrt{n^2 \sin^2 i_1 - 1}$ . Dans le premier cas, le champ électrique transmis est une onde plane progressive et monochromatique,  $\vec{E}_t = t E_0 \vec{e}_y e^{j(\omega t - \vec{k}_t \cdot \vec{r})}$  tandis que dans le second cas cette onde ne garde son caractère propagatif que sur l'axe ( $Ox$ ) avec au contraire une atténuation progressive sur l'axe ( $Oz$ ) au fur et à mesure qu'on s'éloigne du dioptre,  $\vec{E}_t = t E_0 \vec{e}_y e^{j(\omega t - k_{ix}x)} e^{-z/\delta}$  en notant  $\delta = \frac{1}{k_0 \sqrt{n^2 \sin^2 i_1 - 1}}$ .
- Q 20** Il s'agit d'une onde évanescente. La distance  $\delta$  a été exprimée cidessus; comme  $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$  on a aussi l'expression de la distance d'atténuation  $\delta = \frac{\lambda_0}{2\pi \sqrt{n^2 \sin^2 i_1 - 1}}$ . On pourrait bien sûr montrer que la composante sur  $\vec{e}_z$  du vecteur de POYNTING est en moyenne nulle mais l'absence de propagation dans la direction ( $Oz$ ) permet aussi de le justifier sans calcul.

## 2 Étude de lentilles minces CCINP MP

1. C'est une approximation utilisée pour les systèmes optiques **centrés**, c'est à dire possédant un **axe optique** (axe de symétrie du système). De façon générale, l'image d'un point objet  $B$  n'est pas un point  $B'$ , mais une tache appelée **tache image**. Cependant, la granularité des récepteurs optiques fait que ceux-ci sont incapables de faire la différence entre un point et une tache, à condition que la taille  $d$  de celle-ci n'excède pas une taille critique  $d_C$  qui dépend du récepteur.

En pratique, on montre que cela peut être réalisé si on limite les rayons lumineux traversant l'instrument d'optique à des **rayons paraxiaux**. Ces rayons sont caractérisés par :

- Une faible hauteur  $h$  par rapport à l'axe optique (cela devant être valable à n'importe quel endroit du rayon lumineux).
- Une faible inclinaison (repérée par l'angle  $\alpha$  sur le schéma) par rapport à cet axe.



Avec ce type de rayons, toutes les lois de l'optique faisant intervenir des fonctions trigonométriques cos, sin ou tan peuvent être **linéarisées** :

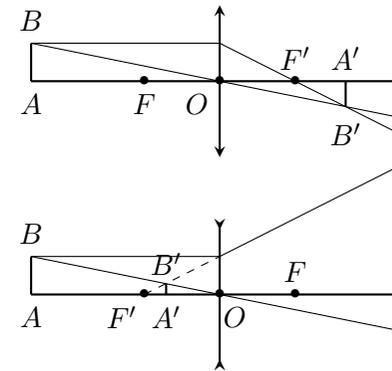
$$\cos \alpha \approx 1 \quad \sin \alpha \approx \alpha \quad \text{et} \quad \tan \alpha \approx \alpha$$

De même pour la loi de la réfraction : si  $i$  et  $r$  désignent les angles d'incidence et de réfraction d'un rayon paraxial sur un dioptre dans le système optique centré, alors :

$$n_1 \sin i = n_2 \sin r \quad \text{devient} \quad n_1 i = n_2 r \quad (\text{loi de Képler})$$

Toutes ces linéarisations portent le nom d'**approximation de Gauss**.

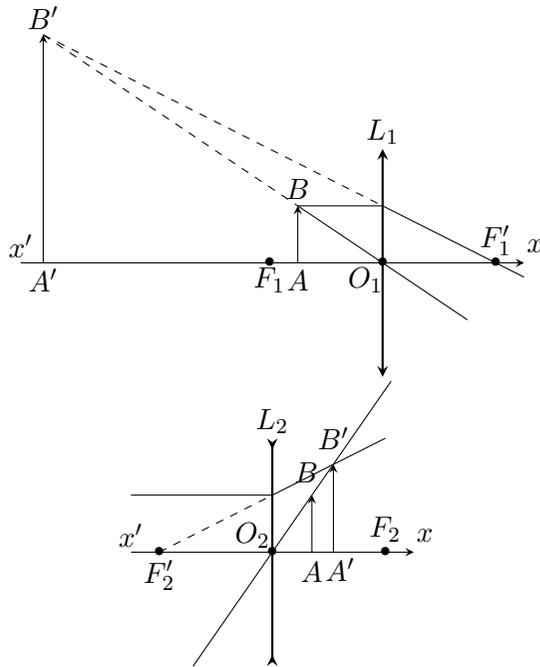
2. L'objet  $AB$  étant très éloigné, on le suppose situé à gauche du foyer objet  $F$  pour une lentille convergente et du foyer image  $F'$  pour une lentille divergente. Cela conduit aux constructions suivantes :



Dans le cas d'une lentille divergente, l'image est virtuelle et non inversée. Il ne peut donc s'agir que d'une lentille convergente.

3. Correspondance objet-image pour des lentilles minces convergente et divergente.

a) Constructions :



b) Nous avons :  $\overline{F_3A} = \overline{F_3O_3} + \overline{O_3A} = 30 + 15 = 45$  cm. La relation de Newton et le grandissement sont :

$$\overline{F_3'A} = -\frac{f'^2}{\overline{F_3A}} = -20 \text{ cm} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{f'}{\overline{F_3A}} = 0,67$$

L'image est donc réelle ( $\overline{O_3A'} > 0$ ), renversée par rapport à l'objet et rétrécie.

De même :  $\overline{O_4A} = \overline{O_4F_4'} + \overline{F_4'A} = -30 - 20 = -50$  cm. La relation de conjugaison de Descartes entraîne :

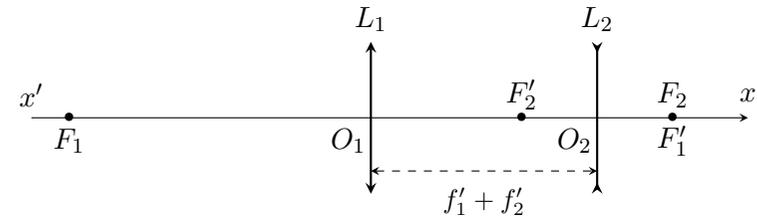
$$\frac{1}{\overline{O_4A'}} = \frac{1}{\overline{O_4A}} + \frac{1}{f'} = \frac{f' + \overline{O_4A}}{f' \overline{O_4A}} \quad \text{d'où} \quad \overline{O_4A'} = \frac{f' \overline{O_4A}}{f' + \overline{O_4A}} = -18,8 \text{ cm}$$

Le grandissement est alors :

$$\gamma = \frac{\overline{O_4A'}}{\overline{O_4A}} = 0,38$$

L'image est donc virtuelle, de même sens que l'objet et rétrécie.

4. a) Cela signifie qu'un faisceau de rayons parallèles entre eux qui entre dans la lunette est transformé par celle-ci en un autre faisceau de rayons parallèles entre eux. Avec un système de deux lentilles, cela n'est possible que si le foyer image de la première lentille coïncide avec le foyer objet de la seconde lentille :  $F_1' = F_2$ .

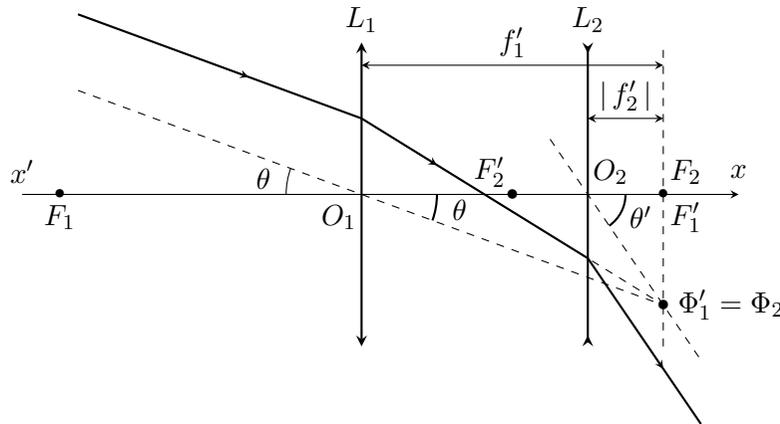


$$d = f_1' + f_2' = 200 - 50 = 150 \text{ mm}$$

Une lunette étant destinée à l'observation d'objets très éloignés, les rayons lumineux issus de chaque point de ces objets forment un faisceau de rayons parallèles entre eux qui convergent vers le plan focal image de  $L_1$  (objectif) en des points images réelles. La lentille  $L_2$  (oculaire) sert alors de **loupe** destinée à observer confortablement ces points images.

Pour cela, il faut que  $L_2$  transforme ces points images réelles en des images virtuelles situées au Punctum Remotum de l'œil qui est le seul plan où il y a une vision nette sans accommodation, c'est à dire sans fatigue visuelle. Or, il est admis que ce plan se trouve à l'infini pour la plupart des yeux (yeux dits emmétropes) : c'est pourquoi il est nécessaire que les images réelles fournies par  $L_1$  soient dans le plan focal objet de  $L_2$  et donc que la lunette soit *afocale*.

- b) Marche d'un rayon lumineux : le rayon incident sur  $L_1$  va converger vers  $\Phi'_1$ , foyer image secondaire de  $L_1$  (situé sur le rayon passant par  $O_1$ ). Ce foyer image secondaire est aussi un foyer objet secondaire de  $L_2$  :  $\Phi'_1 = \Phi_2$ . Le rayon émergent de  $L_2$  a donc pour direction celle de la droite  $O_2\Phi_2$ .



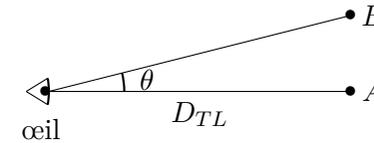
- c) Considérons les deux triangles rectangles  $O_1\Phi'_1F'_1$  et  $O_2\Phi'_1F'_1$  qui ont un côté commun  $F'_1\Phi'_1$ . Nous avons :

$$\tan \theta = \frac{F'_1\Phi'_1}{f'_1} \approx \theta \quad \text{et} \quad \tan \theta' = \frac{F'_1\Phi'_1}{|f'_2|} \approx \theta'$$

et donc :

$$G = \frac{\theta'}{\theta} = \frac{f'_1}{|f'_2|} \stackrel{AN}{=} 4$$

- d) Considérons deux points  $A$  et  $B$  situés à deux extrémités d'un cratère. L'angle  $\theta$  sous lequel l'œil d'un observateur voit le cratère est indiqué sur la figure ci-dessous :



Le diamètre du cratère étant  $d = AB$ , nous avons :

$$\tan \theta = \frac{d}{D_{TL}} \approx \theta$$

d'où :  $\theta_{Copernic} = 2,5 \times 10^{-4}$  rad et  $\theta_{Clavius} = 6,25 \times 10^{-4}$  rad. Notre observateur pourra donc voir Clavius à l'œil nu mais pas Copernic.

Supposons que  $A$  soit situé sur l'axe optique de la lunette. Les rayons lumineux issus de  $B$  arrivent alors sur celle-ci avec l'angle  $\theta$  précédent et ils ressortent avec un angle  $\theta' = G \times \theta$ , 4 fois plus grand. Les deux cratères seront donc visibles à travers la lunette car  $\theta'_{Copernic} = 10 \times 10^{-4}$  rad et  $\theta_{Clavius} = 25 \times 10^{-4}$  rad sont tous les deux supérieurs à l'acuité visuelle angulaire de l'œil.

- À l'œil nu : la planète Vénus, vue sous l'angle  $\theta_V = 12150 / (45 \times 10^6) = 2,7 \times 10^{-4}$  rad, est comme un point.
- Avec la lunette,  $\theta'_V = 4 \times \theta_V = 10,8 \times 10^{-4}$  rad est vue comme un disque, qui occultera donc le disque jovien.