

Corrigé du DM n°21
--------------------

## 1 Cinétique chimique. CCP MP 2016

Nous reprenons les éléments présentés lors du rapport précédent, qui a conservé toute sa pertinence pour l'épreuve de cette année. Très souvent, les meilleures copies se différencient des autres en respectant les conseils suivants :

- la présentation d'une copie (écriture aérée, schémas annotés, syntaxe et orthographe rigoureuses) donne généralement le ton et illustre la plupart du temps une pensée claire ;
- une lecture préalable de l'énoncé complet est un moyen de s'imprégner du sujet et de repérer les questions accessibles directement et mettre de côté, dans un premier temps, celles qui nécessiteraient un temps de réflexion plus important ;
- les candidats dont les copies négligent ouvertement les applications numériques (absence d'unités, présence d'un nombre inadapté de chiffres significatifs ou résultats avec plus de chiffres significatifs que les données de l'énoncé) ont beaucoup de difficultés à obtenir une note correcte ;
- les travaux pratiques réalisés pendant les deux années de CPGE sont également très importants, tant pour la connaissance du matériel et son utilisation que pour l'exploitation des mesures ;
- la discussion des résultats obtenus est une habitude à acquérir bien que pas toujours explicitement demandée. Elle permet la plupart du temps de valider les hypothèses d'un modèle utilisé ou de donner un sens physique à une grandeur ;
- Les tentatives malhonnêtes pour retrouver par tous les moyens un résultat sont très souvent mal considérées par les correcteurs. Il est préférable de proposer une discussion et mettre en valeur des arguments pour justifier tout écart entre les calculs obtenus et le résultat attendu.

Comme les années précédentes, certain(e)s candidat(e)s se sont distingué(e)s par une très solide maîtrise des bases de physique et de chimie, une grande rigueur dans leurs raisonnements, une rédaction particulièrement soignée ainsi que des remarques souvent très pertinentes. Que ces brillant(e)s candidat(e)s soient ici félicité(e)s.

### II.5. Suivi spectrophotométrique de la réaction

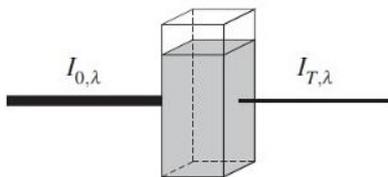


FIGURE 9 – Représentation d'une cuve traversée par un faisceau incident d'intensité  $I_{0,\lambda}$ . Un faisceau transmis  $I_{T,\lambda}$  en émerge. La longueur de la cuve  $\ell$  traversée est de 1 cm.

Un faisceau de lumière monochromatique (de longueur d'onde  $\lambda$ ) d'intensité incidente  $I_{0,\lambda}$  traverse une longueur  $\ell$  de solution limpide (phénomène de diffusion négligeable) placée dans une cuve (figure 9). Une partie de la radiation est absorbée par la solution, l'autre est transmise et son intensité est notée  $I_{T,\lambda}$ .

**II.5.a.** Définir l'absorbance  $A$  d'une solution.

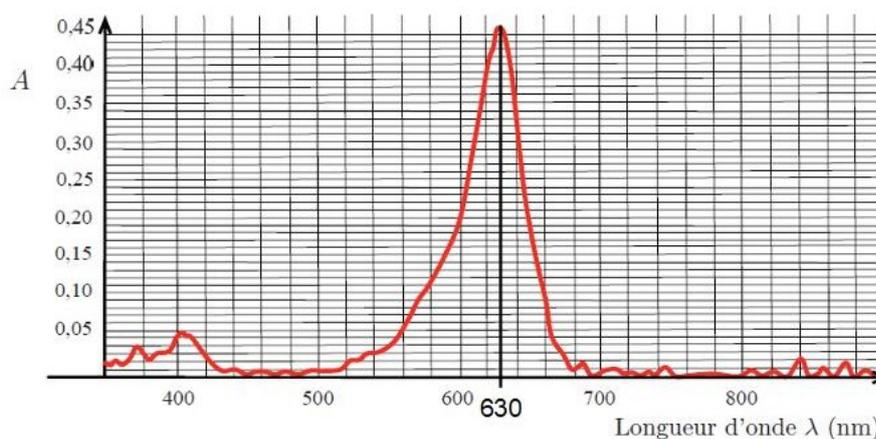
Par définition, c'est :

$$A = \log \left( \frac{I_{0,\lambda}}{I_{T,\lambda}} \right) > 0$$

où le logarithme utilisé est le logarithme décimal. C'est une grandeur sans dimension.

Bien qu'explicitement au programme, la définition de l'absorbance n'est pas connue. Rappelons ici l'intérêt certain qui doit être apporté aux travaux expérimentaux réalisés en physique et chimie pendant les deux années de CPGE.

**II.5.b.** Quelle longueur d'onde de travail  $\lambda$  faut-il choisir pour réaliser les mesures d'absorbance lors de la réalisation de la gamme de solutions étalons ? Quel lien existe-t-il entre cette longueur d'onde et la couleur d'une solution de bleu brillant ?



On choisit  $\lambda = 630$  nm qui est la longueur d'onde correspondant au maximum d'absorbance du bleu brillant, afin d'avoir le maximum de sensibilité pour les mesures.

C'est une longueur d'onde de lumière rouge et c'est pour cela que le couleur d'une solution de bleu brillant est bleue : couleur complémentaire. En effet, si on éclaire une solution de bleu brillant avec de la lumière blanche, le rouge est absorbé et le bleu est soit transmis, soit réfléchi.

*Question bien traitée bien que la notion de couleur complémentaire soit peu mentionnée.*

**II.5.c.** Détailler le protocole expérimental à mettre en place pour préparer, à partir de la solution mère de bleu brillant, un volume  $V = 25,0$  mL d'une solution de bleu brillant de concentration molaire volumique  $c = 1,89 \times 10^{-6}$  mol.L<sup>-1</sup>.

Rappelons qu'on dispose d'une solution mère de bleu brillant à  $c_0 = 4,72 \times 10^{-6}$  mol.L<sup>-1</sup>. On a donc :

$$\frac{c}{c_0} = \frac{1,89}{4,72} = 0,400$$

Il faut donc réaliser une dilution à 40%. Pour réaliser cela avec de la verrerie de précision, on dispose en TP de fioles jaugées et de pipettes.

- On prélève un volume  $V_p$  de solution mère à la pipette et on les introduit dans une fiole jaugée de volume  $V_f$ .
- On complète jusqu'au trait de jauge avec de l'eau distillée.

La concentration obtenue est alors :

$$c = c_0 \frac{V_p}{V_f} \quad \text{d'où} \quad V_p = 0,400 V_f$$

En prenant le plus petit volume pour  $V_f$  afin de ne pas gâcher de produit, on a  $V_f = 25$  mL (ce qui est tout à fait raisonnable puisqu'on dispose au laboratoire de fioles de 25, 50, 100, 250 mL). On a alors :

$$V_p = 0,400 \times 25 = 10 \text{ mL}$$

ce qui est parfait aussi puisqu'on dispose de pipettes de 10 mL (les volumes des pipettes sont en général de 10, 20, 25 et 50 mL)

L'élaboration d'un protocole de dilution est inconnue de la plupart des candidats. Si la conservation de la quantité de la matière est bien mise en évidence, le choix d'une verrerie adaptée (pipette et fiole jaugées) n'est pas acquis. Pour une grande majorité de candidats, une dilution se réalise avec un bécher !!!

**II.5.d.** *Rappeler la loi de Beer-Lambert en précisant les différents termes et leurs unités respectives. Cette loi est-elle vérifiée ?*

Dans une solution contenant  $N$  espèces chimiques  $B_i$  susceptibles d'absorber la lumière, l'absorbance  $A$  est donnée, pour une longueur d'onde  $\lambda$ , par la loi de Beer - Lambert :

$$A = \sum_{i=1}^N \varepsilon_i(\lambda) L c_i$$

avec :

- $\varepsilon_i(\lambda)$  : coefficient d'extinction molaire de l'espèce chimique  $B_i$  pour la longueur d'onde  $\lambda$ .
- $\ell$  : longueur de la cuve (figure 9), c'est à dire longueur traversée par le faisceau lumineux.
- $c_i$  : concentration molaire de l'espèce chimique  $B_i$ .

Il faut prendre garde à exprimer les unités dans le système international : le volume est donc en  $\text{m}^3$  et pas en Litres. L'absorbance étant sans dimension, on a donc :

$$[L] = \text{m} \quad ; \quad [c_i] = \text{mol} \cdot \text{m}^{-3} \quad \text{et} \quad [\varepsilon_i] = \text{m}^2 \cdot \text{mol}^{-1}$$

On doit supposer ici que le bleu brillant est la seule substance absorbante (voir question suivante qui traite du blanc). On a donc :

$$A = \varepsilon_{\text{E133}}(\lambda) \ell [\text{E133}] = \varepsilon_{\text{E133}}(\lambda) \ell c$$

Le tableau 4 donne l'absorbance en fonction de  $c$  : il faut vérifier que c'est une droite. Le plus efficace est de rentrer les valeurs des couples  $(c, A)$  dans deux listes et de faire une régression linéaire avec sa machine. On affiche alors le coefficient de corrélation  $r$ .

$A$	0	0,234	0,347	0,456	0,582
$c$ ( $10^{-6} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ )	0	1,89	2,83	3,78	4,72

On trouve  $|r| = 0,99982 > 0,99$ . L'hypothèse d'une droite semble donc validée.

Peu de candidats connaissent la loi Lambert-Beer faisant intervenir l'absorbance, la longueur de cuve, le coefficient d'extinction molaire et la concentration molaire volumique. La plupart du temps, seule la relation de proportionnalité entre  $A$  et  $c$  est mentionnée. Quant à la vérification de cette loi dans le cadre de ce problème, de nombreux candidats se contentent de prendre deux points du tableau de données plutôt que de réaliser une régression linéaire.

**II.5.e.** Avant de réaliser des mesures d'absorbance, il est nécessaire de réaliser le blanc. Expliquer la nécessité d'une telle opération.

C'est nécessaire pour éliminer l'influence sur  $A$  des autres espèces dans la solution : solvant ( $H_2O$ ), impuretés et mêmes parois de la cuve. Comme les contributions des différentes espèces sont additives, on a de façon générale :

$$A = \varepsilon_{E133}(\lambda)\ell c + A_{\text{autres}}$$

où  $A_{\text{autres}}$  est la contribution de toutes les espèces autres que le bleu brillant.

Le "blanc" consiste à prendre une solution en tous points identiques, dans la même cuve, à la seule différence qu'elle ne contient pas de bleu brillant. On demande au spectrophotomètre de mesurer l'absorbance  $A_{\text{autres}}$  de ce blanc. Par la suite, il soustraira automatiquement cette valeur  $A_{\text{autres}}$  à l'absorbance mesurée.

→ On accèdera donc directement à l'absorbance due uniquement au bleu brillant :  $A_{\text{bb}} = \varepsilon_{E133}(\lambda)\ell [E133]$ .

La notion de *blanc* est mal comprise par une grande partie des candidats qui avancent que cette opération sert à étalonner le spectrophotomètre.

**II.5.f.** En quoi la spectrophotométrie est-elle une technique de choix pour le suivi de cette réaction ?

On accède directement à l'évolution de la concentration  $[E133](t)$  en fonction du temps en mesurant  $A(t)$ . De plus, on n'est pas obligés de prélever des échantillons de E133 pour les doser à différents instants : on ne perturbe donc pas le milieu réactionnel.

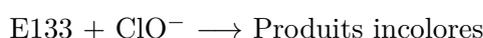
Question assez bien traitée.

## II.6. Étude cinétique

*Protocole expérimental* - À l'instant  $t = 0$  min, on place dans un bécher de 50 mL un volume  $V_1 = 25,0$  mL d'une solution aqueuse de bleu brillant de concentration molaire volumique  $c_1 = 4,54 \times 10^{-6}$  mol.L<sup>-1</sup> et un volume  $V_2 = 1,00$  mL d'une solution aqueuse d'hypochlorite de sodium ( $ClO_{(aq)}^- + Na_{(aq)}^+$ ) de concentration molaire volumique  $c_2 = 1,33 \times 10^{-2}$  mol.L<sup>-1</sup>.

**II.6.a.** Montrer que les conditions initiales utilisées vont permettre de déterminer la valeur de l'ordre partiel par rapport au bleu brillant (E133). Dans quelle situation cinétique se trouve-t-on ?

On assiste donc à la réaction :



L'énoncé indique que la réaction est quantitative, ce qui est synonyme de totale. On calcule les concentrations initiales :

$$[E133]_0 = c_1 \frac{V_1}{V_1 + V_2} = 4,54 \times 10^{-6} \times \frac{25}{26} = 4,36(5) \times 10^{-6} \text{ mol.L}^{-1}$$

et

$$[\text{ClO}^-]_0 = c_2 \frac{V_2}{V_1 + V_2} = 1,33 \times 10^{-2} \times \frac{1}{26} = 5,11 \times 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}$$

On constate que :

$$\frac{[\text{ClO}^-]_0}{[\text{E133}]_0} = 117 \gg 1$$

Ainsi,  $\text{ClO}^-$  est en large excès par rapport à E133. Comme ils réagissent mole à mole, on va pouvoir supposer que la concentration en  $\text{ClO}^-$  ne varie pratiquement pas au cours du temps :  $[\text{ClO}^-](t) \simeq [\text{ClO}^-]_0$ . La vitesse de réaction s'écrit donc en première approximation :

$$v = k \times [\text{ClO}^-]_0^\beta \times [\text{E133}]^\alpha$$

Il s'agit de la dégénérescence de l'ordre.

Globalement la situation de dégénérescence de l'ordre est reconnue, mais peu de candidats parviennent à la justifier proprement à l'aide des concentrations molaires concernées et du facteur de dilution.

**II.6.b.** Montrer alors que la vitesse de réaction  $v$  peut se mettre sous une forme simplifiée. On notera  $k_{\text{app}}$  la constante apparente de vitesse.

Comme expliqué à la question précédente, on a :

$$v = k \times \underbrace{([\text{ClO}^-]_0)^\beta}_{\text{Cste}} \times [\text{E133}]^\alpha = k_{\text{app}} \times [\text{E133}]^\alpha$$

avec :

$$k_{\text{app}} = k \times ([\text{ClO}^-]_0)^\beta$$

constante apparente de vitesse.

Question assez bien traitée quand elle a été abordée.

## II.7. Étude expérimentale

Les résultats de l'étude expérimentale menée à 298 K sont rassemblés dans le tableau 5 ci-dessous.

$t$ (min)	0	2,5	5	7,5	10	15
$A$	0,582	0,275	0,138	0,069	0,034	0,009

TABLEAU 5 - Absorbance  $A$  mesurée à divers instants  $t$ .

**II.7.a.** Montrer que si la réaction est d'ordre 1 par rapport au bleu brillant (E133), l'équation ci-dessous est vérifiée :

$$\ln \left( \frac{A}{A_0} \right) = -k_{\text{app}} \times t$$

où  $A$  et  $A_0$  représentent respectivement les valeurs de l'absorbance à l'instant  $t$  et à l'instant initial  $t = 0$  min.  $k_{\text{app}}$  est la constante apparente de vitesse de la réaction.

Si la réaction est d'ordre 1 par rapport à E133, alors :

$$v = - \frac{d[\text{E133}]}{dt} = k_{\text{app}} [\text{E133}]$$

d'où :

$$[\text{E133}](t) = [\text{E133}]_0 \exp(-k_{\text{app}}t)$$

et comme  $A = \varepsilon \ell [\text{E133}]$  et  $A_0 = \varepsilon \ell [\text{E133}]_0$ , on obtient :

$$A = A_0 \exp(-k_{\text{app}}t) \quad \text{d'où} \quad \ln\left(\frac{A}{A_0}\right) = -k_{\text{app}} \times t$$

L'établissement de la loi  $A = f(t)$  est généralement bien menée.

**II.7.b.** Déterminer la valeur de  $k_{\text{app}}$  à 298 K.

On fait une régression linéaire sur les couples  $(t, \ln(A))$  pour trouver un coefficient de corrélation  $r$  tel que  $|r| = 0,999829 > 0,99$ , ce qui valide la loi linéaire entre  $\ln A$  et  $t$ .  $-k_{\text{app}}$  en est le coefficient directeur, d'où :

$$k_{\text{app}} = 0,28 \text{ min}^{-1}$$

Trop de candidats se contentent de prendre un seul point expérimental plutôt que de réaliser une régression linéaire ou une méthode graphique à l'aide de tous les points expérimentaux afin de valider l'hypothèse d'ordre. De plus,  $k_{\text{app}}$  ne bénéficie pas toujours d'une unité adaptée.

**II.8.** Afin de déterminer l'ordre partiel  $\beta$ , supposé non nul, par rapport aux ions hypochlorite  $\text{ClO}^-$ , on réalise le même protocole expérimental que précédemment en utilisant toutefois une solution aqueuse d'hypochlorite de sodium ( $\text{ClO}^-_{(\text{aq.})} + \text{Na}^+_{(\text{aq.})}$ ) de concentration molaire volumique  $c_3 = 6,65 \times 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$ . Les résultats de l'étude expérimentale menée à 298 K sont rassemblés dans le tableau 6 ci-dessous.

$t$ (min)	2,5	5	7,5	10	12,5	15
$A$	0,389	0,275	0,195	0,138	0,097	0,069

TABLEAU 6 - Absorbance  $A$  à différents instants  $t$ .

**II.8.a.** Montrer alors que ces nouvelles conditions initiales s'avèrent suffisantes pour déterminer la valeur de l'ordre partiel  $\beta$  par rapport aux ions hypochlorite.

La concentration initiale  $[\text{ClO}^-]'_0$  a changé et vaut désormais (ne pas oublier la dilution) :

$$[\text{ClO}^-]'_0 = 6,65 \times 10^{-3} \times \frac{1}{25 + 1} = 2,56 \times 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}$$

On a encore  $[\text{ClO}^-]'_0/[\text{E133}]_0 = 58$  grand devant 1 (la concentration initiale en E133 n'a pas changé par rapport à celle du premier protocole), ce qui permet à nouveau d'envisager une dégénérescence de l'ordre. On a donc une nouvelle constante apparente :

$$k'_{\text{app}} = k ([\text{ClO}^-]'_0)^\beta$$

Une régression linéaire sur les couple  $(t, \ln A)$  donne  $k'_{\text{app}} = 0,14 \text{ min}^{-1}$ , avec un coefficient de corrélation  $|r| = 0,9999934 > 0,99$ .

Dans le premier protocole, on avait :  $k_{\text{app}} = k ([\text{ClO}^-]_0)^\beta$ , avec  $[\text{ClO}^-]_0 = 5,11 \times 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}$ . On en déduit :

$$\frac{k'_{\text{app}}}{k_{\text{app}}} = \left(\frac{[\text{ClO}^-]'_0}{[\text{ClO}^-]_0}\right)^\beta \quad \text{d'où} \quad \beta = \frac{\ln(k'_{\text{app}}/k_{\text{app}})}{\ln([\text{ClO}^-]'_0/[\text{ClO}^-]_0)} = 1,00$$

et donc :

$$\beta = 1$$

**II.8.b.** *En déduire la valeur de la constante de vitesse  $k$  de la réaction de décomposition du bleu brillant en présence d'ions hypochlorite.*

On a donc :

$$k = \frac{k_{\text{app}}}{[\text{ClO}^-]_0} = \frac{k'_{\text{app}}}{[\text{ClO}^-]'_0} \stackrel{AN}{=} 5,5 \cdot 10^2 \text{ L} \cdot \text{min}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$$

Questions II.8a. et II.8.b rarement traitées par manque de temps.

## 2 Optique physique - Électromagnétisme. Mines-Ponts MP 2019

Les encres pâles sont encore fréquentes, et un nombre croissant de candidats a obligé les correcteurs à utiliser la loupe tant leur écriture est minuscule. Une présentation soignée (écriture nette, absence de ratures, résultats encadrés) dispose très favorablement le correcteur. Les correcteurs sont étonnés par le manque de soin ; beaucoup de copies ressemblent plus à un brouillon qu'à une épreuve de concours.

Il est indispensable de travailler en profondeur le cours de première et de deuxième année, de connaître les théorèmes avec leurs hypothèses.

Il est important que les candidats lisent l'énoncé et répondent à la question qui leur est posée.

Les candidats ne devaient pas se contenter de réponses superficielles et devaient produire des raisonnements construits et un peu étayés. Les réponses à certaines questions nécessitaient un bon sens physique, une certaine autonomie et de la rigueur pour poser le problème correctement et y répondre par une modélisation précise.

Les tentatives de bluff, moins nombreuses cette année, sont lourdement sanctionnées.

On recommande de bien traiter une partie des questions plutôt que de produire un discours inconsistant pour chacune d'entre elles.

On a pu noter des lacunes importantes chez de nombreux candidats dans la maîtrise des outils mathématiques de base : projections dans une base, manipulations d'une base mobile, trigonométrie, écriture d'équations où un scalaire est égal à un vecteur.

Il est demandé aux candidats de numéroter leurs copies de façon cohérente : les examinateurs apprécient assez peu de se voir confrontés à un jeu de piste !

Les abréviations sont pléthore, au point de rendre la lecture parfois difficile en raison de l'ambiguïté qui peut en résulter.

On tient aussi à insister sur le soin apporté à l'orthographe. Il est inadmissible que des étudiants se destinant à être cadres rendent des copies truffées de fautes. L'accord des masculins et féminins semble difficile pour certains. On ne compte pas les copies avec des "principe fondamentale de la dynamique". Les pluriels, les accords de participes passés (quand ils ne sont pas transformés en infinitifs !) ne sont hélas pas en reste. Et que dire de ces étudiants qui après une année de Spé parlent encore d'équations de "Maxwelle" ?

L'orthographe est juste une question de concentration et d'exigence vis-à-vis de soi-même.

Sur le fond, on rappelle qu'une application numérique donnée sans unité vaut 0 (et que le "S.I." n'est en général pas admis), qu'une courbe dont la légende des axes n'est pas indiquée vaut aussi 0, que paraphraser la question n'a jamais fait office de réponse, que des résultats donnés sans justification et sans la moindre rédaction ne peuvent pas être pris en compte et que rédiger consiste à faire une phrase complète (et donc on ne commence pas une réponse par "parce que").

*Après avoir étudié les propriétés optiques de différents liquides dans le domaine du visible, Gladstone et Dale ont proposé en 1858 une loi empirique relative à l'indice de réfraction, noté  $n$ , indiquant que  $n - 1$  est proportionnel à la masse volumique du liquide. Cette loi a ensuite été étendue au cas du fluide diélectrique homogène et isotrope, comme le sont les gaz et les mélanges de gaz. Cette partie du sujet propose une vérification expérimentale de cette loi pour l'air, et une explication théorique rudimentaire.*

*Nous notons  $n_0$  l'indice de l'air à la pression  $p_0$  et à la température  $T_0$  ambiantes dans le laboratoire. Nous rappelons que l'indice de réfraction d'un milieu est défini par le rapport de la vitesse  $c$  de la lumière dans le vide sur la vitesse de phase  $v$  de la lumière dans le milieu considéré, soit  $n = \frac{c}{v}$ , cet indice est généralement plus grand que 1.*

- Q 1** – Montrez que, sous réserve d'une approximation usuelle que vous préciserez, la loi de Gladstone-Dale, pour l'air, conduit à écrire que  $n - 1$  est proportionnel au rapport de la pression sur la température de l'air. En travaillant à température constante, montrez que la variation d'indice  $n - n_0$  est proportionnelle à la variation de pression.

L'approximation usuelle consiste à supposer que l'air est un gaz parfait.

Considérons une masse  $m$  d'air à la température  $T$ , occupant un volume  $V$  sous la pression  $p$ . En notant  $M$  la masse molaire de l'air, l'équation d'état du gaz s'écrit :

$$pV = \frac{m}{M} RT \quad \text{d'où} \quad p = \underbrace{\frac{m}{V}}_{=\rho} \frac{RT}{M}$$

avec  $\rho$  la masse volumique de l'air. On a donc,  $K$  étant une constante :

$$\rho = \frac{Mp}{RT} \quad \text{et donc} \quad n - 1 = K\rho = \underbrace{\frac{KM}{R}}_{\text{Cste } C} \frac{p}{T}$$

À la température constante  $T_0$  on a donc :

$$n - 1 = C \frac{p}{T_0} \quad \text{et} \quad n_0 - 1 = C \frac{p_0}{T_0}$$

d'où :

$$n - n_0 = \frac{C}{T_0} (p - p_0)$$

Question bien traitée dans l'ensemble bien que certains étudiants aient utilisé dans la même équation la même notation  $n$  pour l'indice et le nombre de moles. Une relation de proportionnalité s'exprime plus clairement en introduisant une constante multiplicative.

Nous posons par la suite  $n - n_0 = \frac{a}{T_0} (p - p_0)$  où  $a$  est une constante qui dépend de la composition de l'air (humidité, taux de  $CO_2$ , ...).

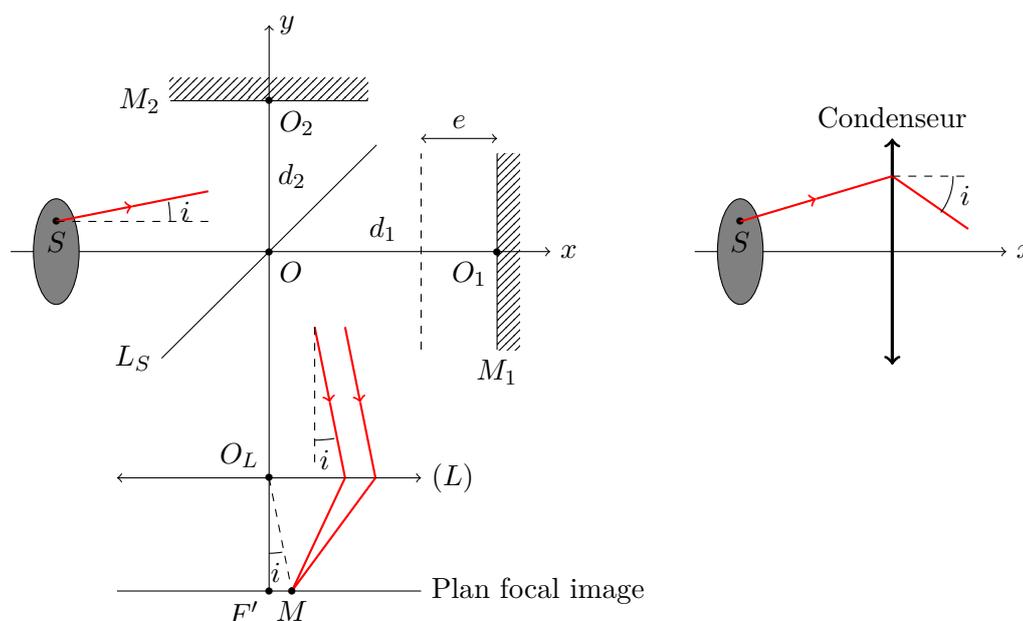
- Q 2** – La variation de l'indice de l'air avec la pression est très faible, mais parfaitement mesurable avec un instrument très sensible comme l'interféromètre de Michelson. L'interféromètre est éclairé par une source étendue monochromatique de longueur d'onde  $\lambda$  dans le vide, et réglé de façon à observer des anneaux sur un écran. Représentez, sur un schéma symbolique, un interféromètre de Michelson en précisant la position de la source lumineuse et de l'écran. Des lentilles minces dont vous préciserez le rôle sont à utiliser. La lame séparatrice sera représentée par un simple trait. Quelle est la position relative des miroirs ? Nous notons  $f'$  la distance focale de la lentille de projection. Déduisez-en la différence de marche  $\delta$  induite par l'interféromètre dans cette configuration en précisant vos notations. En supposant que le centre de la figure d'interférence est un point brillant d'éclairement maximal, donnez le rayon du  $k$ ème anneau brillant en fonction de  $k$ ,  $f'$ ,  $\lambda$  et  $\delta_0$  la différence de marche au centre de la figure. On supposera les angles des rayons lumineux par rapport à l'axe optique de la lentille suffisamment petits pour en négliger l'ordre 3 devant les précédents.

Question de cours hyperclassique : il faut la rédiger correctement en prenant le temps (environ 25 minutes) et en faisant de beaux schémas !

L'interféromètre étant réglé de façon à observer des anneaux, il est réglé en lame d'air. De plus, comme la source est étendue, on ne peut observer ces anneaux avec un bon contraste qu'à l'infini ou bien dans le plan focal image d'une lentille convergente. Dans ce cas, on

peut faire les calculs comme si la source était ponctuelle puisque les différents points de la source étendue donnent la même différence de marche, la même forme d'intensité et que ces intensités doivent être sommées (sources incohérentes).

Dans la suite, on raisonne avec une seule source ponctuelle  $S$ . Chaque rayon lumineux issu de  $S$  se divise en deux rayons parallèles qui vont converger en un point  $M$  du plan focal image (où on a donc placé l'écran).



- Les deux miroirs plans  $M_1$  et  $M_2$  sont perpendiculaires respectivement à  $Ox$  et  $Oy$ . Si on note  $d_1 = OO_1$  et  $d_2 = OO_2$ , on pose (épaisseur de la lame d'air) :

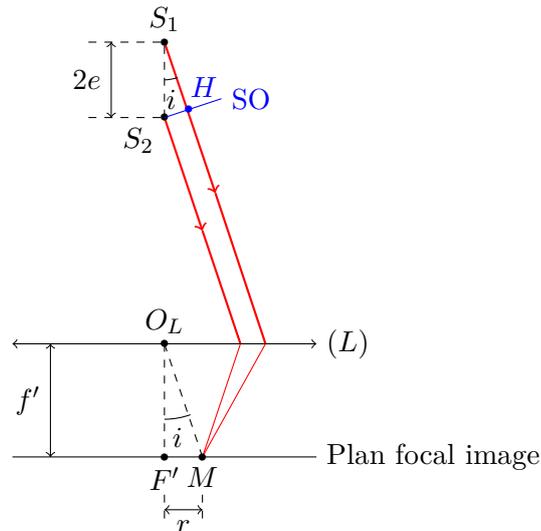
$$e = |d_1 - d_2|$$

- La lame séparatrice  $L_S$  est orientée à  $45^\circ$  de  $Ox$  et  $Oy$ .
- En pratique (cf. TP) on utilise un condenseur, lentille très convergente, à l'entrée de l'interféromètre, qui sert à bien faire converger tous les rayons issus de chaque point source  $S$  dans l'interféromètre (on "rabat" ainsi le plus de lumière possible dans l'interféromètre) et à avoir des valeurs de  $i$  plus grandes (figure à droite).

Dans la suite on raisonne sans le condenseur.

Les deux rayons émergents de l'interféromètre et produits par  $S$ , semblent provenir de deux sources ponctuelles  $S_1$  et  $S_2$ .

- $S_1$  est l'image de  $S$  par  $M_1$  puis par  $L_S$  considéré comme un miroir plan.
- $S_2$  est l'image de  $S$  par  $L_S$  considéré comme un miroir plan, puis par  $M_2$ .
- Ces deux sources sont alignées verticalement (le long de  $Oy$ ) et distantes de  $2e$ .



Calcul de la différence de marche (plus rapide avec les deux sources qu'avec les deux miroirs) :

On a déjà d'après le cours :

$$\delta = (SM)_1 - (SM)_2 = (S_1M) - (S_2M)$$

D'après le principe du retour inverse, si on place une source lumineuse ponctuelle en  $M$ , les rayons suivront le même trajet mais en sens inverse. Selon le théorème de Malus, après la traversée de  $(L)$  (en sens inverse) les surfaces d'onde seront des plans orthogonaux aux rayons lumineux.

Considérons alors la surface d'onde particulière qui passe par  $S_2$  (SO). Elle permet de définir le point  $H$ . En notant  $n$  l'indice de l'air, on a :

$$(S_2M) = (HM) \implies \delta = n S_1H = n 2e \cos i$$

Le centre de la figure d'interférence (en  $F'$ , c'est à dire pour  $i = 0$ ) est brillant : l'ordre d'interférence  $p_0$  en  $F'$  est donc entier. Le déphasage entre les deux rayons qui viennent se superposer en  $M$  est :

$$\Delta\varphi(M) = \frac{2\pi}{\lambda} \delta = \frac{2\pi}{\lambda} 2ne \cos i$$

(il y a autant de sauts de phase de  $\pi$  sur une voie que sur l'autre, donc compensation). L'ordre d'interférence est donc :

$$p(i) = \frac{\Delta\varphi}{2\pi} = \frac{2ne}{\lambda} \cos i \quad \text{et} \quad p_0 = \frac{2ne}{\lambda}$$

On a donc, en utilisant le fait que  $\tan i \approx i = \frac{r}{f'}$  ( $r = F'M$ ) :

$$p(i) \approx \frac{2ne}{\lambda} \left(1 - \frac{i^2}{2}\right) = p_0 - \frac{ne}{\lambda} \left(\frac{r}{f'}\right)^2$$

Puisque l'ordre au centre  $p_0$  est entier, l'ordre du  $k$ ième anneau brillant est  $p_k = p_0 - k$  et, si on note  $r_k$  son rayon, on obtient :

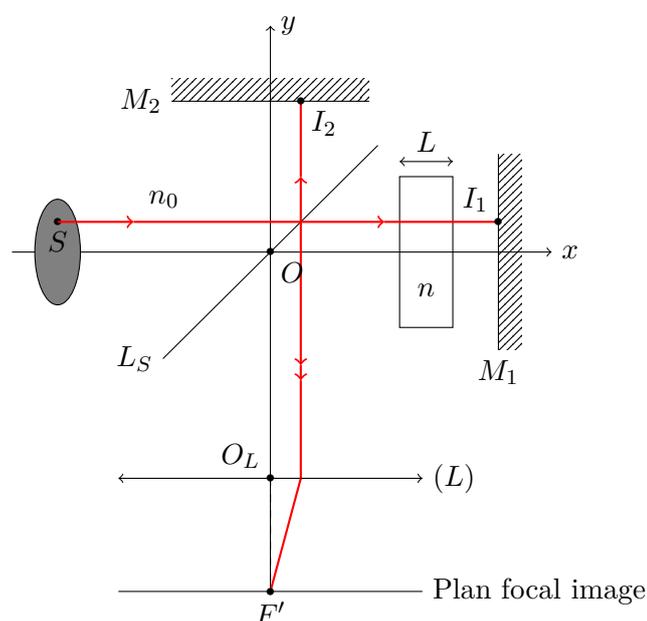
$$p_0 - k = p_0 - \frac{ne}{\lambda} \left( \frac{r_k}{f'} \right)^2 \quad \text{d'où} \quad r_k = f' \sqrt{\frac{k \lambda}{ne}}$$

Dans cette question le jury a vu le meilleur comme le pire. Bien que l'interféromètre de Michelson soit au programme en cours et en TP, certains ne le connaissent manifestement pas et le confondent avec les fentes d'Young! Le tracé des rayons est en général bien fait même si des délires géométriques émaillent certaines copies heureusement peu nombreuses (rayons arrivant en incidence normale au centre d'une lentille convergente pour émerger à  $45^\circ$ , rayons se réfléchissant d'un miroir à un autre en passant derrière la séparatrice ...). Les candidats savent placer convenablement la lentille de sortie. En revanche il n'en est pas de même pour celle d'entrée. Quant à son intérêt ... Plus grave à nos yeux, seule une minorité d'étudiants arrivent à redémontrer la formule donnant le rayon des anneaux. Beaucoup d'entre eux écrivent l'ordre du  $k$ ième anneau est  $k$  et ne savent pas que l'ordre diminue quand on s'éloigne du centre de la figure.

Une cuve est introduite entre un miroir de l'interféromètre et la lame séparatrice. Cette cuve contient de l'air dont on peut faire varier la pression par une simple pompe à main. Un manomètre permet de mesurer la pression relative atteinte. En gonflant lentement, l'air de la cuve reste sensiblement à température ambiante. Une microfuite permet ensuite de ramener très lentement la pression de la cuve à  $p_0$ . Dans votre analyse, la cuve sera idéalisée et vous êtes invités à négliger le rôle des parois du dispositif. Une photodiode est placée à la place de l'écran au centre de la figure d'interférence et permet de décompter le nombre de franges brillantes  $N$  qui défilent lentement lors de la diminution de la pression dans la cuve. La longueur de la cuve traversée par les rayons lumineux est  $L = 4 \text{ cm}$ .

- Q 3** — Reliez la différence de marche supplémentaire due à la présence de la cuve à la variation d'indice  $n - n_0$ , puis au nombre de franges  $N$ , sur la frange centrale éclairant la photodiode. Déduisez-en l'expression de  $N$  en fonction notamment de  $a$  et de la variation de pression  $p - p_0$  dans la cuve.

La photodiode est placée au "centre" de la figure d'interférence, c'est à dire en  $F'$  :  $i = 0$ . Comme à la question précédente, on peut raisonner sur une seule source ponctuelle  $S$ , le rayon émis par  $S$  entrant dans l'interféromètre est horizontal ( $i = 0$ ).



- En l'absence de cuve et en notant  $n_0$  l'indice de l'air ambiant, supposé à la pression  $p_0$  et à la température  $T_0$ , on a :

$$\delta_0(F') = 2n_0e$$

- En présence de cuve remplie d'air sous la pression  $p$  et donc d'indice  $n$ , la différence de marche devient :

$$\delta(F') = \delta_0(F') - 2n_0L + 2nL = 2n_0e + 2(n - n_0)L$$

On retranche  $2n_0L$  compté en trop dans  $\delta_0$  et on ajoute  $2nL$  qui correspond au chemin optique dans la cuve. Le facteur 2 est pour l'aller-retour.

On va raisonner sur le déphasage entre les deux rayons qui se superposent en  $F'$ . Comme :

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \delta(F') = \frac{2\pi}{\lambda} (2n_0e + 2(n - n_0)L)$$

on a :

- Au début de l'expérience, la pression vaut  $p > p_0$  et le déphasage initial vaut :

$$\Delta\varphi_I = \frac{2\pi}{\lambda} (2n_0e + 2(n - n_0)L)$$

- En fin d'expérience, la pression dans la cuve est devenue  $p_0$  et le déphasage final vaut ( $n = n_0$ ) :

$$\Delta\varphi_F = \frac{2\pi}{\lambda} 2n_0e$$

Ainsi  $\Delta\varphi$  a diminué de  $\Delta\varphi_I - \Delta\varphi_F = \frac{2\pi}{\lambda} 2(n - n_0)L$ . À chaque fois qu'il diminue de  $2\pi$

on a observé la passage d'une frange brillante, donc si on a observé  $N$  franges brillantes en tout alors la diminution de  $\Delta\varphi$  vérifie :

$$2N\pi \leq \frac{2\pi}{\lambda} 2(n - n_0)L < 2(N + 1)\pi$$

d'où :

$$\frac{N\lambda}{2L} \leq n - n_0 < \frac{(N + 1)\lambda}{2L}$$

Comme  $\lambda$  est de l'ordre de  $10^{-7}$  m et  $L = 4$  cm, on va assimiler la variation  $n - n_0$  à la valeur inférieure de ces inégalités (on commet alors une erreur de  $10^{-7}/4 \cdot 10^{-2}/2 \approx 10^{-6}$  sur  $n - n_0$ ) et poser :

$$n - n_0 = \frac{N\lambda}{2L} = \frac{a}{T_0} (p - p_0)$$

d'où :

$$N = \frac{2aL}{\lambda T_0} (p - p_0)$$

Le facteur 2 manque dans presque la moitié des copies, les candidats ayant oublié que le rayon lumineux traverse deux fois la cuve.

- Q 4** — Pour  $T_0 = 300$  K et  $\lambda = 530$  nm, le tableau suivant donne le nombre de franges  $N$  pour quelques valeurs de surpression  $p - p_0$  exprimées en bar :

$p - p_0$	0	0,5	0,7	1	1,3	1,5	1,8	2	2,3	2,5
$N$	0	17	26	40	56	68	82	92	102	111

Calculez numériquement le coefficient  $a$  en détaillant votre démarche. Si vous aviez disposé d'un outil d'analyse numérique (calculatrice, ordinateur + python, etc ...), comment aurait-on pu exploiter ces données ?

Cette épreuve se faisait sans machine à calculer. Il faut donc montrer rapidement que  $N$  est proportionnel à  $p - p_0$  sans outils numériques. Déjà, on a bien  $N = 0$  si  $p - p_0 = 0$ . Ensuite, on pose  $N = K(p - p_0)$  et on calcule quelques valeurs de  $K$  lorsque les coefficients sont simples et qu'on peut le faire de tête ou rapidement sur un brouillon :

$p - p_0$	0	0,5	0,7	1	1,3	1,5	1,8	2	2,3	2,5
$N$	0	17	26	40	56	68	82	92	102	111
$K$		34		40		45		46		44,4

$K$  semble augmenter mais la dernière valeur baisse : les points ne sont pas tout à fait alignés. On prend une valeur moyenne (rapidement calculer à la main et en ordre de grandeur), sans oublier le  $10^{-5}$  puisque  $p - p_0$  doit être convertie en Pascal (!) :

$$K \approx 42 \cdot 10^{-5}$$

On en déduit (à la main et en ordre de grandeur) :

$$a = \frac{KT_0\lambda}{2L} = \frac{42 \cdot 10^{-5} \times 3 \cdot 10^2 \times 530 \cdot 10^{-9}}{2 \times 4 \cdot 10^{-2}} \approx 15 \times 530 \times 10^{-10} \approx 8 \cdot 10^{-7} \text{ K.Pa}^{-1}$$

Avec une machine à calculer, on aurait pu faire une régression linéaire sur les couples  $(p - p_0, N)$  et afficher le coefficient de corrélation  $r$ . La machine aurait donné la pente  $K$ . On aurait pu aussi tracer la courbe  $N$  en fonction de  $p - p_0$  et vérifier que les points se situent autour d'une droite moyenne.

Peu de valeurs numériques justes hélas. Pour l'exploitation à l'ordinateur, le jury attendait à minima les mots de "régression linéaire".

Nous utilisons par la suite la valeur en ordre de grandeur de  $a = 1,0 \times 10^{-6} \text{ K.Pa}^{-1}$ .

La loi empirique de Gladstone-Dale pour l'air peut être expliquée dans le cadre du modèle de l'électron élastiquement lié. Nous assimilons une molécule d'un gaz composant l'air à un noyau et deux électrons optiquement actifs. Nous notons  $\vec{r}(t)$  le vecteur position d'un électron par rapport au noyau,  $\vec{v}(t)$  sa vitesse,  $m_e$  la masse de l'électron et  $-e$  sa charge électrique. L'interaction entre le noyau et l'électron est modélisée par deux forces s'exerçant sur l'électron : une force de rappel élastique  $-m_e\omega_0^2 \vec{r}$  et une force de frottement fluide  $-m_e\Gamma \vec{v}$ . L'électron est soumis au champ électrique de l'onde plane que nous considérons localement identique à  $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i\omega t}$ .

- Q 5** – Établir l'équation différentielle régissant l'évolution de la position de l'électron. Pourquoi n'avons nous pas pris en compte l'effet du champ magnétique de l'onde sur l'électron ? Nous nous intéressons à la solution en régime forcé de cette équation. En utilisant la notation complexe, donnez l'expression de la vitesse  $\vec{v}$  d'un électron en fonction du champ électrique.

L'électron est soumis à la force de rappel élastique, à la force de frottement fluide et à la force électromagnétique exercée par l'onde. En général on néglige la partie magnétique de cette force dans le cas où l'électron n'est pas relativiste, c'est à dire dans le cas où sa vitesse est négligeable devant  $c$ .

En effet, pour une OPPH le champ magnétique est relié au champ électrique par :

$$\vec{B} = \frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \vec{E} \quad \text{d'où} \quad \|\vec{B}\| = \frac{k}{\omega} \|\vec{E}\| = \frac{\|\vec{E}\|}{v_\varphi}$$

puisque  $\vec{k} \perp \vec{E}$  et en introduisant la vitesse de phase  $v_\varphi = \frac{\omega}{\|\vec{k}\|} = \frac{c}{n}$  avec  $n$  indice optique du milieu.

La force magnétique vérifie donc :

$$\|\vec{F}_m\| = e \|\vec{v} \wedge \vec{B}\| \leq e \|\vec{v}\| \times \|\vec{B}\| = \frac{\|\vec{v}\|}{v_\varphi} \times e \|\vec{E}\|$$

La partie électrique de la force étant  $\|\vec{F}_e\| = e \|\vec{E}\|$ , on obtient le quotient :

$$\frac{\|\vec{F}_m\|}{\|\vec{F}_e\|} = \frac{\|\vec{v}\|}{v_\varphi} = \frac{n \|\vec{v}\|}{c} \ll 1$$

si l'électron n'est pas relativiste ( $n$  est toujours de l'ordre de 1).

D'après le principe fondamental de la dynamique, on a donc :

$$m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = -m_e \omega_0^2 \vec{r} - m_e \Gamma \vec{v} - e \vec{E}$$

Pour trouver la solution en régime forcé, on travaille avec les grandeurs complexes associées :

$$\underline{r}(t) = \underline{R}_0 e^{i\omega t} \quad \text{et} \quad \underline{v}(t) = \underline{V}_0 e^{i\omega t} \quad \text{avec} \quad \underline{v}(t) = \frac{d\underline{r}(t)}{dt} = i\omega \underline{r}(t)$$

On a donc :

$$m_e i\omega \underline{v}(t) = -m_e \omega_0^2 \underline{r}(t) - m_e \Gamma \underline{v}(t) - e \underline{E}_0 e^{i\omega t}$$

donc :

$$m_e \left( \Gamma + i\omega + \frac{\omega_0^2}{i\omega} \right) \underline{v}(t) = -e \underline{E}_0 e^{i\omega t}$$

soit :

$$\underline{v}(t) = -\frac{e}{m_e} \frac{i\omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\Gamma\omega} \underline{E}_0 e^{i\omega t}$$

Même si l'équation différentielle a été souvent trouvée, les correcteurs ont souvent cherché un bilan des forces correctement fait. Nombre de candidats confondent le fait de négliger  $B$  et de négliger son effet via la force de Lorentz. Dire que  $B$  est en  $E/c$  donc négligeable ne répondait pas à la question.

**Q 6** — Pourquoi ne prenons-nous pas en compte le mouvement des noyaux des molécules induit par le champ électrique de l'onde plane ? Montrez alors que le vecteur densité de courant électronique total peut s'écrire :

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{\kappa n^* e^2}{m_e} \frac{i\omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\Gamma\omega}$$

où  $\kappa$  est un facteur numérique que l'on déterminera et  $n^*$  est le nombre volumique, c'est-à-dire le nombre de molécules par unité de volume du gaz.

Le noyau d'une molécule possède une charge électrique  $2e$  et une masse  $m_n \gg m_e$ . En régime sinusoïdal permanent, la vitesse complexe du noyau vérifie (PFD) :

$$m_n i\omega \underline{v}_n^\gamma = 2e \vec{E} \quad \text{d'où} \quad \underline{v}_n^\gamma = \frac{2e}{m_n i\omega} \vec{E}$$

La vitesse obtenue serait alors beaucoup plus faible que celle des électrons à cause de la forte masse du noyau (la force électrique étant du même ordre de grandeur pour les électrons et les noyaux).

Le vecteur densité de courant s'écrit donc :

$$\vec{j} = -e(2n^*) \underline{v} = \frac{2n^* e^2}{m_e} \frac{i\omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\Gamma\omega} \vec{E}_0 e^{i\omega t} = \frac{2n^* e^2}{m_e} \frac{i\omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\Gamma\omega} \vec{E}$$

puisque la densité d'électrons optiquement actifs est  $2n^*$ . On a donc  $\kappa = 2$ .

Remarque :

Il s'agit d'une loi d'Ohm locale avec une conductivité  $\gamma$  complexe.

Comme précédemment, dire que le noyau est plus lourd que l'électron ne justifie pas à lui seul le fait qu'on néglige son mouvement. Si on ne met pas en regard les forces subies, on n'a rien démontré du tout.

- Q 7** – À quel type de filtre correspond  $\gamma$  ? Soit  $\gamma_0$  le maximum du module de  $\gamma$ , déterminez l'expression de  $\gamma_0$ . Nous définissons la fonction de transfert  $H(\omega) = \frac{\gamma}{\gamma_0}$ , exprimez cette fonction de transfert et précisez l'expression de son facteur de qualité  $Q$ . Représentez le gain de ce filtre dans un diagramme de Bode pour un facteur de qualité de l'ordre de la centaine.

Révisons donc un peu d'électrocinétique filtres. En mettant  $i\Gamma\omega$  en facteur au dénominateur, on s'aperçoit qu'on a affaire à un filtre passe-bande ! En effet, on a :

$$\gamma = \frac{2n^* e^2}{\Gamma m_e} \frac{1}{1 + \frac{\omega_0^2}{i\Gamma\omega} + \frac{i\omega}{\Gamma}} = \frac{2n^* e^2}{\Gamma m_e} \frac{1}{1 + i \frac{\omega_0}{\Gamma} \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

On reconnaît la fonction de transfert d'un filtre passe-bande de pulsation centrale  $\omega_0$ , de facteur de qualité :

$$Q = \frac{\omega_0}{\Gamma}$$

et de valeur maximale  $\gamma_0 = \frac{2n^* e^2}{\Gamma m_e}$ . En notant  $H(\omega) = \gamma/\gamma_0$ , on peut mettre  $H(\omega)$  sous la forme canonique suivante :

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + iQ \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

Diagramme de Bode du gain (révisons un peu)

On recherche les asymptotes basse et haute fréquence pour le gain en décibels :

$$H_{\text{dB}} = 20 \log_{10} |H(\omega)| = 20 \log_{10} \left( \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}} \right) = -10 \log_{10} \left( 1 + Q^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \right)$$

- Asymptote basse fréquence :  $\omega \ll \omega_0$

$$1 + Q^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \simeq 1 + Q^2 \left( \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \simeq Q^2 \left( \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2$$

et donc :

$$H_{\text{dB}} \simeq -20 \log_{10} Q + 20 \log_{10} \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)$$

C'est une droite de pente +20 dB/décade.

- Asymptote haute fréquence :  $\omega \gg \omega_0$

$$1 + Q^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \simeq 1 + Q^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \simeq Q^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2$$

d'où :

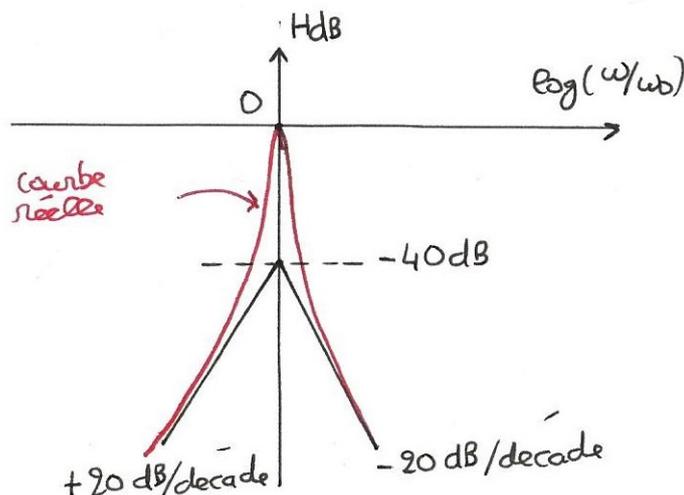
$$H_{\text{dB}} \simeq -20 \log_{10} Q - 20 \log_{10} \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)$$

C'est une droite de pente -20 dB/décade.

- Point particulier :  $\omega = \omega_0$

$$H_{\text{dB}} = 0$$

On commence par tracer les deux asymptotes : pour  $Q = 100$ , leur ordonnée à l'origine vaut  $-20 \log_{10} Q = -40$  dB. On trace ensuite à la main la courbe réelle qui passe par le point particulier (elle est située au dessus des asymptotes pour  $Q > 1$ ).



Cette question a été massacrée. Le filtre n'est très souvent pas reconnu. Les étudiants se lancent dans des dérivées inutiles pour trouver le maximum. En moyenne seuls 3% d'entre eux ont fait un diagramme de Bode correct. Certains reconnaissent un filtre passe-bas puis tracent un diagramme correspondant à un passe-bande, ou l'inverse. Aucune cohérence alors que ces filtres sont étudiés en cours et en TP. Beaucoup semblent ignorer que la valeur du facteur de qualité influe sur le positionnement de la courbe par rapport aux asymptotes.

- Q 8** – L'air est assimilé à un milieu neutre électriquement mais polarisable : une onde électromagnétique dans le domaine du visible induit un mouvement des électrons qui se traduit par l'apparition d'un vecteur densité de courant selon la question précédente. Donnez alors les équations de Maxwell dans ce milieu. Montrer qu'en introduisant une permittivité relative  $\varepsilon_r$  complexe que l'on identifiera, on peut écrire l'équation de propagation pour le champ électrique sous la forme  $\Delta \vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$

Comme le milieu est neutre électriquement, la densité volumique de charges  $\rho$  est nulle. On donne directement les équations de Maxwell avec les grandeurs complexes :

$$\text{(Maxwell Gauss)} \quad \text{div} \vec{E} = 0; \quad \text{(Maxwell Thomson)} \quad \text{div} \vec{B} = 0$$

$$\text{(Maxwell Faraday)} \quad \text{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad \text{(Maxwell Ampère)} \quad \text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

L'équation de propagation pour  $\vec{E}$  s'obtient à partir du rotationnel de l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\text{rot rot} \vec{E} = \overrightarrow{\text{grad}} \text{div} \vec{E} - \Delta \vec{E} = - \Delta \vec{E}$$

Or :

$$\text{rot rot} \vec{E} = \text{rot} \left( - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = - \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = - \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

De plus, comme :

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = i\omega \vec{E} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = (i\omega)^2 \vec{E} \quad \text{on a} \quad \boxed{\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{i\omega} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}}$$

On obtient donc :

$$\Delta \vec{E} = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \underbrace{\left( 1 + \frac{\gamma}{i\omega \varepsilon_0} \right)}_{=\varepsilon_r} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

d'où, par identification :

$$\boxed{\varepsilon_r = 1 + \frac{\gamma}{i\omega \varepsilon_0}}$$

En dehors des quelques étudiants qui, en fin de Spé ne connaissent toujours pas les équations de Maxwell, cette question a été plutôt bien traitée même si certains candidats se sont évertués à faire apparaître coûte que coûte la permittivité relative dès le début des calculs.

- Q 9** – On néglige les frottements fluides et on suppose que la pulsation de l'onde  $\omega$  est très inférieure à  $\omega_0$ , montrez alors que cette permittivité relative se simplifie en :

$$\varepsilon_r = 1 + \frac{\kappa e^2 n^*}{m_e \varepsilon_0 \omega_0^2}$$

Quelle est la relation entre la permittivité relative et l'indice  $n$  ? En remarquant que  $n^2 - 1 \ll 1$ , donnez l'expression de l'indice en fonction de  $n^*$ ,  $e$ ,  $m_e$ ,  $\varepsilon_0$  et  $\omega_0$ .

Négliger les frottement fluides revient à faire  $\Gamma = 0$ . L'expression de  $\gamma$  devient alors :

$$\gamma = \frac{2n^*e^2}{m_e} \frac{i\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \simeq \frac{2n^*e^2}{m_e} \frac{i\omega}{\omega_0^2} \quad \text{lorsque } \omega \ll \omega_0$$

On obtient alors :

$$\varepsilon_r = 1 + \frac{\gamma}{i\omega\varepsilon_0} = 1 + \frac{2n^*e^2}{m_e} \frac{1}{\varepsilon_0\omega_0^2}$$

ce qui correspond bien à la forme demandée par l'énoncé, avec  $\kappa = 2$ .

En regardant l'équation de d'Alembert vérifiée par  $\vec{E}$ , on constate que la vitesse de phase  $v_\varphi$  de l'onde dans ce milieu (qui est donc réelle dans l'approximation étudiée) vérifie :

$$\frac{1}{v_\varphi^2} = \mu_0\varepsilon_0\varepsilon_r = \frac{\varepsilon_r}{c^2} \quad \text{d'où } n = \frac{c}{v_\varphi} = \sqrt{\varepsilon_r}$$

On a donc :

$$n = \sqrt{1 + \frac{2n^*e^2}{m_e\varepsilon_0\omega_0^2}} \simeq 1 + \frac{n^*e^2}{m_e\varepsilon_0\omega_0^2}$$

au premier ordre en  $\frac{n^*e^2}{m_e\varepsilon_0\omega_0^2} \ll 1$

RAS

**Q 10** – Reliez le nombre volumique  $n^*$  à la pression et la température de l'air. Déduisez-en l'expression de l'indice en fonction de la pression, de la température et des autres constantes. Exprimez alors le coefficient  $a$  en fonction de  $e$ ,  $m_e$ ,  $\varepsilon_0$ ,  $k_B$  et  $\omega_0$ . Calculez la valeur numérique de  $\omega_0$  et commentez le résultat obtenu.

Un volume  $V$  contient  $n^*V$  molécules donc  $n^*V/\mathcal{N}_A$  moles de molécules, avec  $\mathcal{N}_A$  constante d'Avogadro. On applique ensuite la loi des gaz parfaits :

$$pV = \frac{n^*V}{\mathcal{N}_A} RT \implies p = n^*k_B T$$

où  $k_B = R/\mathcal{N}_A$  est la constante de Boltzmann. En reprenant l'expression de  $n$  obtenue à la question précédente, on obtient :

$$n = 1 + \frac{e^2}{k_B m_e \varepsilon_0 \omega_0^2} \frac{p}{T}$$

La température est supposée fixée à la valeur  $T_0$ . En notant  $n_0$  la valeur de l'indice à  $p_0$  et  $T_0$ , on obtient par différence :

$$n - n_0 = \frac{1}{T_0} \frac{e^2}{k_B m_e \varepsilon_0 \omega_0^2} (p - p_0) = \frac{a}{T_0} (p - p_0)$$

et donc :

$$a = \frac{e^2}{k_B m_e \varepsilon_0 \omega_0^2}$$

On en déduit  $\omega_0 = 1,5 \cdot 10^{16} \text{ rad.s}^{-1}$  (faire le calcul à la main et en ordre de grandeur : pas de machine à calculer pour cette épreuve) qui est dans le domaine des ultraviolets proches. La condition  $\omega \ll \omega_0$  est donc vérifiée dans le domaine visible.

Très peu d'applications numériques justes. Comment des candidats peuvent-ils laisser des pulsations en  $10^{-16} \text{ rad.s}^{-1}$  ?