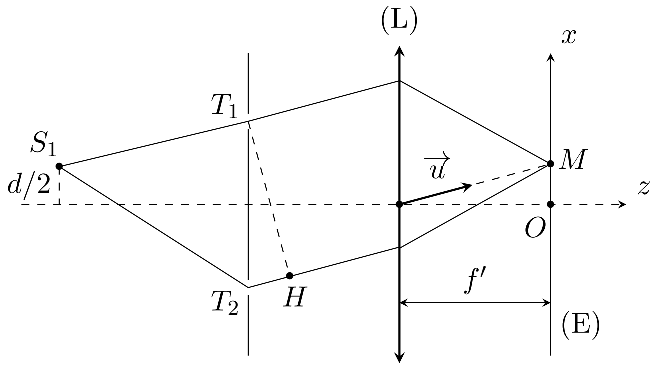
Corrigé du DM n°12 Optique

1 Trous d'Young avec sources en mouvement

1. On considère la source S_1 seule, supposée à la distance $d/2$ de Oz.

   a) La figure est représentée ci-dessous :



   b) Plaçons une source ponctuelle en M et utilisons le principe du retour inverse de la lumière. Tous les rayons lumineux issus de M et qui traversent la lentille (en sens inverse) ressortent parallèles entre eux. D'après le théorème de Malus, les surfaces d'onde associées sont des morceaux de plan perpendiculaires à ces rayons. Sur le schéma, le plan d'onde qui passe par T_1 permet de définir sur le rayon passant par T_2 le point H. Nous avons donc :

$$(MT_1) = (MH)$$

On en déduit que (l'indice de l'air valant 1) :

$$\begin{aligned}\delta(M) &= (S_1M)_2 - (S_1M)_1 \\ &= \{\, S_1T_2 + T_2H + (T_2M)\,\} - \{\, S_1T_1 + (T_1M)\,\} \\ &= S_1T_2 - S_1T_1 + T_2H\end{aligned}$$

Or :

$$T_2H = \overrightarrow{T_2H}.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{T_2T_1}.\overrightarrow{u} + \overrightarrow{T_1H}.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{T_2T_1}.\overrightarrow{u}$$

De plus :

$$\overrightarrow{T_2T_1} = a\,\overrightarrow{u_x} \text{ et } \overrightarrow{u} = \frac{x\,\overrightarrow{u_x} + y\,\overrightarrow{u_y} + f'\,\overrightarrow{u_z}}{\sqrt{x^2+y^2+f'2}}$$

et donc

$$\overrightarrow{T_2T_1}.\overrightarrow{u} = \frac{ax}{\sqrt{x^2+y^2+f'2}} \approx \frac{ax}{f'}$$

si $|x| \ll f'$ et $|y| \ll f'$. Finalement, nous aurons donc :

$$\boxed{\delta(M) \approx \frac{ax}{f'} + S_1T_2 - S_1T_1}$$

   c) Dans un repère d'espace $(Axyz)$ où A est le milieu de T_1 et T_2, les points T_1, T_2 et S_1 ont pour coordonnées :

$$T_1 = (a/2, 0, 0) \;\;;\;\; T_2 = (-a/1, 0, 0) \quad \text{et} \quad S_1 = (d/2, 0, -D)$$

et donc :

$$S_1T_1 = \sqrt{\frac{(a-d)^2}{4} + D^2} \quad \text{et} \quad S_1T_2 = \sqrt{\frac{(a+d)^2}{4} + D^2}$$

Dans le cas particulier où $D \gg a$ et $D \gg d$, on peut faire un développement limité :

$$S_1T_1 = D\sqrt{1 + \frac{(a-d)^2}{4D^2}} \approx D\left(1 + \frac{(a-d)^2}{8D^2}\right) = D + \frac{(a-d)^2}{8D}$$

et

$$S_1T_2 = D\sqrt{1+\frac{(a+d)^2}{4D^2}} \approx D\left(1+\frac{(a+d)^2}{8D^2}\right) = D+\frac{(a+d)^2}{8D}$$

et donc :

$$S_1T_2 - S_1T_1 = \frac{(a+d)^2-(a-d)^2}{8D} = \frac{ad}{2D}$$

L'expression approchée de $\delta(M)$ est donc :

$$\boxed{\delta(M) = \frac{ax}{f'} + \frac{ad}{2D}}$$

2. On considère à présent les deux sources S_1 et S_2 en mouvement à la vitesse constante v et on supposera que, à $t=0$, $d(0)=0$.

   a) Les deux sources S_1 et S_2 sont incohérentes spatialement : chaque source produit son propre système d'interférences et les contributions doivent être sommées en intensité. Nous aurons donc :

   $$I(M) = I_1(M) + I_2(M)$$

   Chaque source état monochromatique, on peut utiliser la formule de Fresnel :

   $$I_1(M) = 2I_0\left\{1+\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{ax}{f'}+\frac{ad}{2D}\right)\right]\right\}$$

   et pour $I_2(M)$, il suffit de changer d en $-d$, ce qui donne :

   $$I_2(M) = 2I_0\left\{1+\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{ax}{f'}-\frac{ad}{2D}\right)\right]\right\}$$

   Pour sommer les deux cosinus, on peut utiliser la formule rappelée en début d'énoncé. On obtient tous calculs faits :

   $$I(M) = 4I_0\left[1+\cos\left(\frac{\pi}{\lambda}\frac{ad}{D}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\frac{ax}{f'}\right)\right]$$

   avec $d(t)/2 = v\times t$. On obtient donc bien la formule proposée par l'énoncé, à condition de poser :

   $$\boxed{V(t) = \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\frac{av\,t}{D}\right)}$$

   b) Les franges se brouillent (ce qui veut dire que l'intensité devient uniforme sur l'écran) dès que :

   $$\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\frac{av\,t}{D}\right) = 0 \iff \frac{2\pi}{\lambda}\frac{av\,t}{D} = \frac{\pi}{2} + m\pi,\ m\in\mathbb{N}$$

   et donc :

   $$t = \frac{\lambda D}{4av} + m\frac{\lambda D}{2av},\ m\in\mathbb{N}$$

   Nous obtenons donc une suite t_m de dates qui conviennent, espacées de la période temporelle T telle que :

   $$\boxed{T = t_{m+1} - t_m = \frac{\lambda D}{2av}}$$

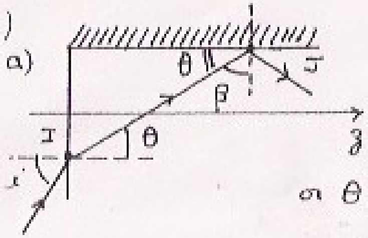
   c) Il faut donc que $T > 1/10$ secondes, ce qui impose :

   $$v < \frac{10\lambda D}{2a}$$

   Calculons un ordre de grandeur raisonnable : $D = 1$ m ; $a = 0{,}5$ mm et $\lambda = 600$ nm. On obtient $v < 6$ mm/s ce qui est une très petite vitesse.

2 Fibre optique

1) a)



Pour que la propagation soit guidée, il faut qu'il y ait une réflexion totale en J, donc que :

$$\beta > \beta_{lim} = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$$

or $\theta = \frac{\pi}{2} - \beta$ donc cela revient à

$$\theta < \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$$

Appliquons la loi de la réfraction à l'entrée de la fibre, en I :

$$n_0 \sin i = n_1 \sin\theta < n_1 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin i < \frac{n_1}{n_0}\cos\left(\arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin i < \frac{n_1}{n_0}\sqrt{1-\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2} = \frac{1}{n_0}\sqrt{n_1^2-n_2^2}$$

Nous obtenons donc:

$$i < \arcsin\left(\frac{1}{n_0}\sqrt{n_1^2-n_2^2}\right) = i_a$$

b) $i_a = 0{,}372$ rad $= 21{,}3°$

2) a) La propagation la plus rapide est celle qui correspond aux rayons // à Oz qui parcourent une distance L : $\tau_{min} = L/v = n_1 L/c$

La propagation la plus lente est celle des rayons arrivant avec un angle i_a donc se propageant avec un angle $\theta_{max} = \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$ dans la fibre.

La longueur totale parcourue est alors : $L_{max} = \frac{L}{\cos\theta_{max}}$ et donc :

$$\tau_{max} = \frac{n_1 L_{max}}{c} = \frac{n_1 L}{c}\frac{1}{\cos\theta_{max}}$$

or $\cos\theta_{max} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)\right) = \frac{n_2}{n_1}$

Il vient donc : $\tau_{max} = \frac{n_1 L}{c}\frac{n_1}{n_2}$

et donc

$$\boxed{\delta\tau_{max} = \tau_{max} - \tau_{min} = \frac{n_1 L}{c}\left(\frac{n_1 - n_2}{n_2}\right)}$$

b) AN : $\delta\tau_{max} = 1{,}58.10^{-7}$ s $= 0{,}158$ µs

3) Une impulsion émise à t_0 sera reçue entre $t_0+\tau_{min}$ et $t_0+\tau_{max}$ et celle émise à t_0+T sera reçue entre $t_0+T+\tau_{min}$ et $t_0+T+\tau_{max}$. Pour que ces deux impulsions ne se recouvrent pas en sortie, il est nécessaire que :

$$t_0+\tau_{max} < t_0+T+\tau_{min} \Leftrightarrow \delta\tau_{max} < T$$

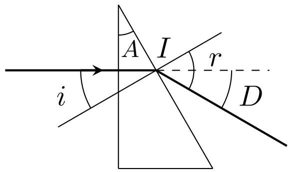
Le débit de la fibre est alors $N = \frac{1}{T}$ bit par seconde donc :

$$N < \frac{1}{\delta\tau_{max}} \overset{AN}{=} 6{,}31.10^6 \text{ bits/s}$$

Cette fibre est largement adaptée à la transmission téléphonique mais pas au standard télévision. Cependant on sait faire beaucoup mieux dans la technologie des fibres optiques et on peut largement les adapter au standard télévision.

3 Biprisme de Fresnel

1) Étudions la réfraction du rayon lumineux en I (cf Figure ci-dessous) :



L'angle d'incidence par rapport à la normal vaut i et l'angle de réfraction vaut r. La loi de Snell - Descartes donne alors :

$$n \sin i = \sin r$$

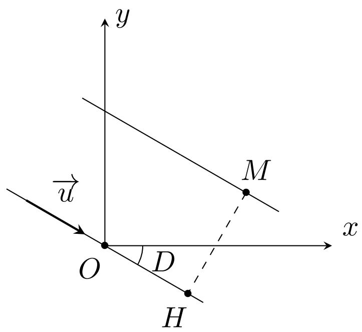
D'autre part, on remarque que $i = A$ et, comme A est petit, on peut linéariser le sinus, ce qui conduit à :

$$\sin r \approx nA \approx r$$

puisque n est de l'ordre de quelques unités et que $A \ll 1$, ce qui montre que $\sin r \ll 1$ et donc qu'on peut assimiler r et $\sin r$. Enfin, on remarque que :

$$\boxed{D = r - i = (n-1)A}$$

2) Considérons deux rayons lumineux qui émergent du prisme : l'un passant par le point O et l'autre par le point M. Ces deux rayons sont parallèles et sont inclinés d'un angle D par rapport à Ox.



D'après le théorème de Malus, les surfaces d'onde sont perpendiculaires aux rayons issus de le source ponctuelle S. Il s'ensuit que M et H sont sur la même surface d'onde et donc que $(SM) = (SH)$. D'après la relation fondamentale des phases, comme :

$$\varphi(M) = \varphi(S) + \frac{2\pi}{\lambda}(SM) \quad \text{et} \quad \varphi(O) = \varphi(S) + \frac{2\pi}{\lambda}(SO)$$

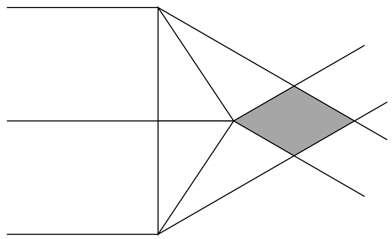
on en déduit que :

$$\varphi(M) - \varphi(O) = \frac{2\pi}{\lambda}\{(SM)-(SO)\} = \frac{2\pi}{\lambda}\{(SH)-(SO)\} = \frac{2\pi}{\lambda}\overline{OH}$$

Or, $\overline{OH} = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{OM}$ et donc :

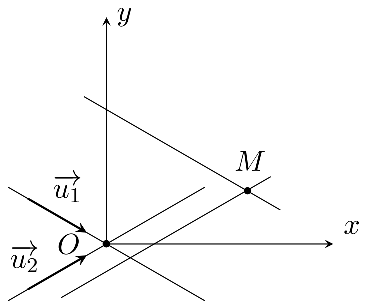
$$\boxed{\varphi(M) - \varphi(O) = \frac{2\pi}{\lambda}\overrightarrow{u}.\overrightarrow{OM}}$$

3) Considérons la figure ci-dessous :



Les deux faisceaux se superposent dans la région en gris qui est en forme de losange.

4) Considérons les deux rayons lumineux qui se croisent en M : le premier étant passé par le prisme supérieur et le second par le prisme inférieur. On peut aussi introduire les deux rayons qui se croisent en O (le premier étant toujours passé par le prisme supérieur et le second par le prisme inférieur).



D'après les question précédentes, nous avons :

$$\varphi_1(M) - \varphi_1(O) = \frac{2\pi}{\lambda}\,\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{OM} \text{ et } \varphi_2(M) - \varphi_2(O) = \frac{2\pi}{\lambda}\,\overrightarrow{u_2}.\overrightarrow{OM}$$

Or :

$$\varphi_1(O) = \varphi(S) + \frac{2\pi}{\lambda}\,(SO)_1 \quad \text{et} \quad \varphi_2(O) = \varphi(S) + \frac{2\pi}{\lambda}\,(SO)_2$$

Cependant, on remarque que $(SO)_1 = (SO)_2$ par symétrie du montage. Il en résulte que $\varphi_1(O) = \varphi_2(O)$ et donc que :

$$\varphi_1(M) - \varphi_2(M) = \frac{2\pi}{\lambda}\,(\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2}).\overrightarrow{OM}$$

D'autre part :

$$\overrightarrow{u_1} = \begin{pmatrix} \cos D \\ -\sin D \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{u_2} = \begin{pmatrix} \cos D \\ \sin D \end{pmatrix}$$

d'où :

$$\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2\,\sin D \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ -2\,(n-1)A \end{pmatrix}$$

et donc, sachant que $\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{u_x} + y\,\overrightarrow{u_y}$, on obtient :

$$\boxed{\varphi_1(M) - \varphi_2(M) \approx -\frac{4\pi}{\lambda}\,(n-1)Ay}$$

5) La lumière étant monochromatique, on peut appliquer la formule de Fresnel :

$$\boxed{I(M) = \frac{I_0}{2}\left\{1 + \cos\left(\frac{4\pi}{\lambda}\,(n-1)Ay\right)\right\}}$$

Les franges sont des segments de droite parallèles à Oy. L'interfrange se calcule comme d'habitude, en posant :

$$\forall\, y,\; I(y+i) = I(y)$$

ce qui donne

$$\boxed{i = \frac{\lambda}{2(n-1)A}}$$