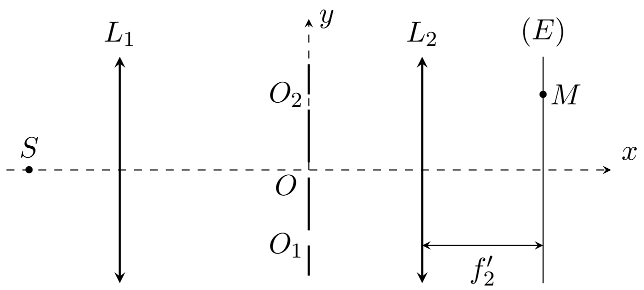
DM n°12
Pour le mardi 18 février 2022

1 Interférence à trois ondes

Une onde monochromatique de longueur d'onde dans le vide $\lambda = 656{,}3$ nm est émise par une source ponctuelle S placée au foyer objet d'une lentille convergente (L_1). On place un écran percé de trois trous, identiques et de très petites dimensions, perpendiculairement à Ox : ces trois trous sont notés O, O_1 et O_2 et sont disposés symétriquement par rapport à (Ox), l'un de ces trois trous étant le point O (origine des coordonnées). On pose $a = O_1O = OO_2 = 1{,}0$ mm.

Un écran d'observation (E) est placé dans le plan focal image d'une lentille convergente (L_2) de distance focale image $f'_2 = 50$ cm. On cherche à calculer l'intensité $I(M)$ en un point M de (E), de coordonnées $(x, y, 0)$ dans le repère $(Oxyz)$.



À une onde monochromatique de pulsation ω :

$$a(M,t) = A\cos(\varphi(M) - \omega t)$$

on associe une vibration complexe donnée par :

$$\underline{a}(M,t) = A\, e^{i\varphi(M)}\, e^{-i\omega t}$$

1) On convient de prendre comme référence l'onde qui est passée par le point O et on note $\varphi_O(M)$ sa phase en M.

Établir les expressions des phases $\varphi_1(M)$ et $\varphi_2(M)$ des ondes qui sont passées respectivement par O_1 et par O_2, en fonction de $\varphi_O(M)$, a, y, λ et f'_2 (on rappelle que la lentille est utilisée dans les conditions de Gauss).

2) Déterminer l'expression de la vibration complexe $\underline{a}(M,t)$ résultant de la superposition des trois ondes en M. On supposera que les trois ondes ont la même amplitude A constante.

3) a) En déduire l'expression de l'intensité lumineuse $I(M)$ en M et montrer qu'elle se met sous la forme :

$$I(y) = I_0\left[1 + \cos\left(\frac{2\pi a y}{\lambda f'_2}\right)\right]^2$$

b) Donner l'allure de cette intensité en fonction de y. On pourra commencer par représenter I en fonction de $\varphi = \dfrac{2\pi a y}{\lambda f'_2}$ à l'aide de la machine à calculer, puis en déduire le graphe de $y \longmapsto I(y)$.

4) Décrire la figure d'interférences obtenue (forme et orientation des franges). Définir l'interfrange i et donner son expression pour le cas étudié ici. Calculer la valeur numérique de i.

2 Caractérisation du spectre d'une diode laser

Un interféromètre de Michelson utilisé en configuration lame d'air peut être utilisé pour caractériser le spectre d'émission d'une diode laser. Les deux miroirs de l'interféromètre sont parfaitement orthogonaux entre eux, mais ne sont pas à la même distance de la séparatrice. Le dispositif est éclairé avec la diode laser étudiée, suivie d'une lentille de très courte focale permettant de rendre le faisceau très divergent. On supposera que les lames séparatrice et compensatrice sont assimilables à une seule lame séparatrice L_S d'épaisseur nulle et orientée à 45°.

I. Détermination de la longueur d'onde centrale de la diode laser

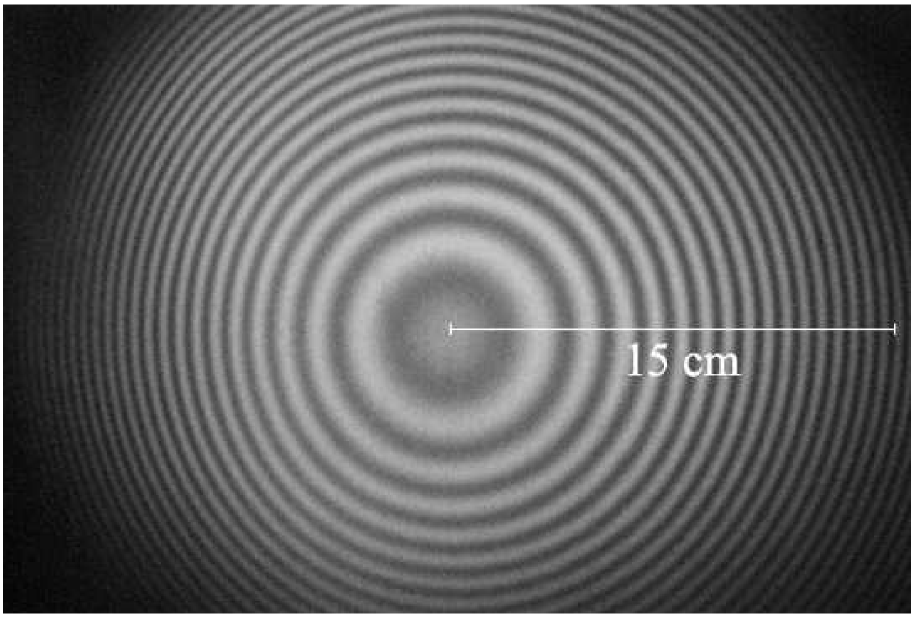
On note d l'épaisseur de la lame d'air que forment les deux miroirs.

1. Que signifient les lettres de l'acronyme LASER ?
2. On modélise l'ensemble de la diode laser et de la lentille de courte focale par une source ponctuelle S_0 monochromatique de longueur d'onde λ_0. Faire un schéma simplifié de l'interféromètre dans la configuration lame d'air.
3. On observe les interférences dans le plan focal image d'une lentille convergente (L), de distance focale image $f' = 2{,}00$ m. Montrer qu'en un point M de l'écran, repéré par l'angle i par rapport à l'axe optique de la lentille, la différence de marche entre les deux rayons issus de l'interféromètre vaut $\delta(M) = 2d\cos i$.
4. Écrire l'expression littérale de l'intensité lumineuse (ou éclairement) I en fonction de l'angle i. Justifier la forme des franges observées sur l'écran et reproduites à la figure 1.
5. L'épaisseur de la lame d'air vaut $d = 1{,}75$ mm. Au centre de l'écran, l'intensité n'est pas maximale. Si p_0 est l'ordre d'interférence au centre, on posera par la suite $p_0 = p_c + \varepsilon$ avec $p_c \in \mathbb{N}$ et $0 < \varepsilon < 1$.

   Déterminer l'ordre d'interférence du plus petit anneau brillant. On suppose que la zone observée sur l'écran est de suffisamment petite taille pour qu'en chaque point de l'écran, on ait $i \ll 1$. Montrer que le rayon R_m du $m^{\text{ième}}$ anneau brillant vaut :

   $$R_m = f' \sqrt{\frac{(m-1+\varepsilon)\lambda_0}{d}}$$

6. La figure observée est représentée figure 1. Relever dans un tableau le rayon des dix premiers anneaux brillants. On prendra soin de réfléchir au nombre de chiffres significatifs pertinents.



7. En déduire une valeur numérique de la longueur d'onde λ_0 de la diode laser. On détaillera très précisément la méthode employée. À quelle couleur correspond cette longueur d'onde ?
8. Un expérimentateur utilise la vis de chariotage pour augmenter régulièrement la valeur de d (d étant initialement positif). Comment évolue la figure observée à l'écran ? On constate également que le contraste de la figure d'interférences diminue au fur et à mesure que d augmente. Proposer une explication.

II. Détermination de la largeur spectrale de la diode laser

Pour déterminer la largeur spectrale de la diode laser, on réalise un enregistrement de l'interférogramme observé avec l'interféromètre de Michelson. L'interféromètre est réglé en configuration lame d'air, et la vis de chariotage est reliée à un moteur qui permet de faire varier l'épaisseur $d(t)$ de la lame d'air linéairement avec t, selon une vitesse v_0 :

$$d(t) = v_0 \times (t - t_0)$$

On observe les interférences dans le plan focal image d'une lentille convergente, de distance focale image $f' = 2{,}00$ m, et on place une photodiode au foyer image F' de la lentille. La photodiode délivre un courant proportionnel à l'intensité lumineuse (ou éclairement) qu'elle reçoit.

La lumière émise par la diode possède une densité spectrale en pulsation ayant la forme d'une lorentztienne :

$$J(\omega) = \frac{J_m}{1 + \left(\dfrac{\omega - \omega_0}{\omega_1}\right)^2}$$

1. Tracer l'allure de la courbe $J(\omega)$ en fonction de ω et déterminer sa largeur à mi-hauteur $\Delta\omega$ en fonction de ω_1.
2. Montrer que l'intensité $I(F', t)$ au foyer image de la lentille s'écrit sous la forme :

$$I(F', t) = \int_0^{+\infty} f(\omega, t)\,\mathrm{d}\omega$$

On donnera l'expression de la fonction $f(\omega, t)$.

3. On donne les deux intégrales suivantes, valables lorsque $\omega_1 \ll \omega_0$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\omega}{1+\left(\dfrac{\omega-\omega_0}{\omega_1}\right)^2} = \pi\omega_1$$

et

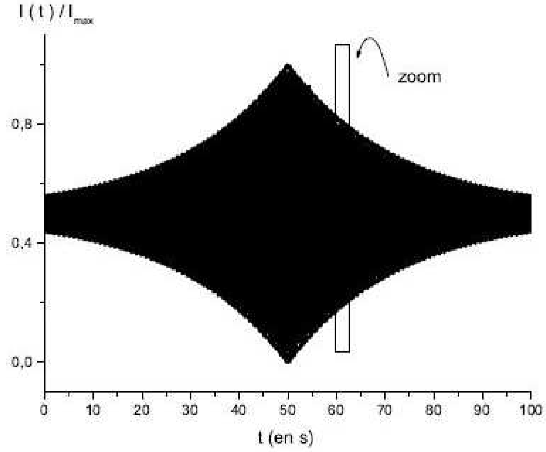
$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(\omega x/c)}{1+\left(\frac{\omega-\omega_0}{\omega_1}\right)^2}\,\mathrm{d}\omega = \pi\omega_1\, e^{-\omega_1|x|/c}\cos\left(\frac{\omega_0 x}{c}\right)$$

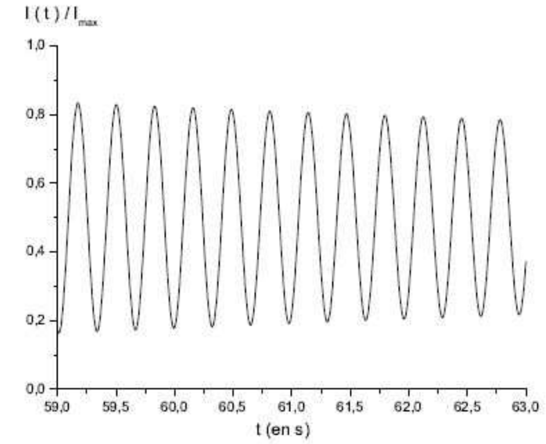
En déduire l'expression de l'intensité en $I(F', t)$ en fonction du temps.

4. On obtient les enregistrements représentés sur les deux figures ci-contre pour lesquelles $v_0 = 50\ \mu$m.min^{-1}, la seconde figure étant un "zoom" réalisé sur la zone rectangulaire indiquée sur première.

   a) Déduire d'une de ces figures la valeur numérique de la pulsation centrale ω_0 de la diode laser. Quelle est alors longueur d'onde centrale λ_0 associée ? Indiquer la couleur de la lumière émise.

   b) En analysant les figures, déterminer la valeur numérique de la largeur $\Delta\omega$ de la raie lorentzienne. On expliquera soigneusement la méthode utilisée. En déduire la longueur de cohérence ℓ_c de la lumière émise par cette diode.





   c) Déterminer la largeur spectrale de la diode laser en longueur d'onde $\Delta\lambda$ et faire l'application numérique.