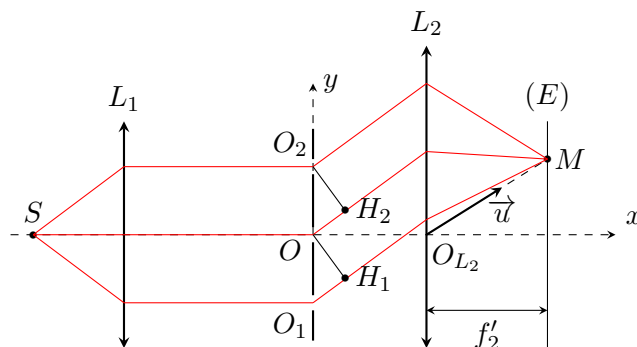


Corrigé du DM n°12

1 Interférence à trois ondes

Dans tout cet exercice, l'indice de l'air sera pris égal à 1.



- 1) Le trajet suivi par les différents rayons lumineux est représenté sur la figure ci-dessus. Dans la suite, on notera $\vec{u}$ le vecteur unitaire de $\overrightarrow{O_{L_2}M}$, qui indique la direction d'émission des trois rayons lumineux qui se croisent en M . Les coordonnées de ce vecteur sont : $\vec{u} = (f'_2, y, 0) / \sqrt{y^2 + f'^2_2}$.

Par définition, le déphasage $\varphi_1(M) - \varphi_O(M) = \varphi_1(M)$ est égal à :

$$\varphi_1(M) = \frac{2\pi}{\lambda} \{ (SM)_1 - (SM)_0 \}$$

où $(SM)_1$ est le chemin optique de S à M en passant par le trou O_1 et $(SM)_0$ est le chemin optique de S à M en passant par le trou O .

Or, d'après le théorème de Malus appliqué à l'onde directe qui vient de S , les deux trous O et O_1 sont situés sur une même surface d'onde (qui est ici un plan d'onde). Il s'ensuit que : $(SO) = (SO_1)$.

De même, en appliquant le principe du retour inverse et le théorème de Malus à l'onde inverse qui proviendrait de M si on y plaçait une source ponctuelle, on constate que O et H_1 sont placés sur un même plan d'onde, ce qui implique : $(OM) = (H_1M)$. On en déduit que :

$$\begin{aligned} (SM)_1 - (SM)_0 &= \{ (SO_1) + O_1H_1 + (H_1M) \} - \{ (SO) + (OM) \} = O_1H \\ &= \vec{u}_1 \cdot \overrightarrow{O_1H_1} = \vec{u}_1 \cdot \overrightarrow{O_1O} \\ &= \frac{ay}{\sqrt{y^2 + f'^2_2}} \approx \frac{ay}{f'_2} \end{aligned}$$

puisque $|y| \ll f'_2$ dans les conditions de Gauss. On aura donc :

$$\varphi_1(M) = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{ay}{f'_2}$$

Par le même raisonnement, on obtient :

$$\varphi_2(M) = -\frac{2\pi}{\lambda} \frac{ay}{f'_2}$$

Dans la suite, nous poserons : $\varphi(y) = \varphi_1(y) = -\varphi_2(y) = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{ay}{f'_2}$

- 2) Par le principe de superposition, $\underline{a}(M, t)$ est la somme des trois vibrations complexes $\underline{a}_0(M, t)$, $\underline{a}_1(M, t)$ et $\underline{a}_2(M, t)$ associées aux trois ondes. On a donc :

$$\begin{aligned}\underline{a}(M, t) &= A e^{i\varphi_0(M)} e^{-i\omega t} + A e^{i\varphi_1(M)} e^{-i\omega t} + A e^{i\varphi_2(M)} e^{-i\omega t} \\ &= A \left(1 + e^{i\varphi(y)} + e^{-i\varphi(y)} \right) e^{-i\omega t} \\ &= A \left(1 + 2 \cos \varphi(y) \right) e^{-i\omega t} \\ &= \underline{A}(M) e^{-i\omega t}\end{aligned}$$

en posant :

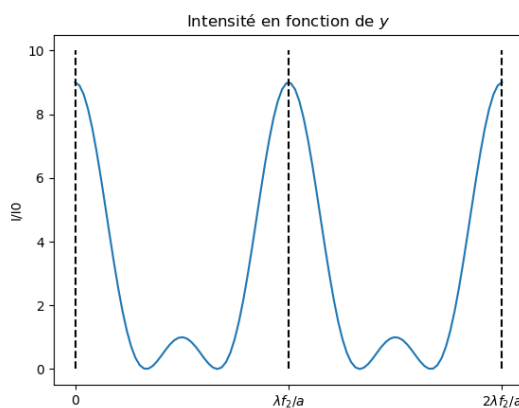
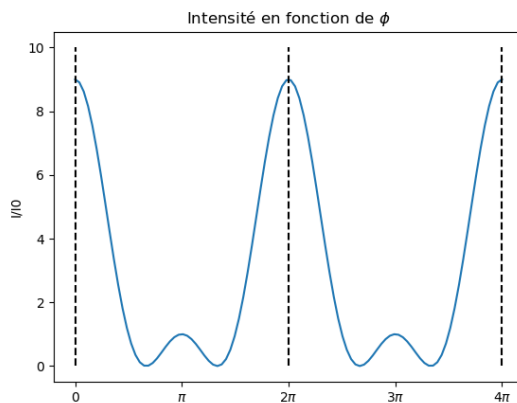
$$\underline{A}(M) = A \left(1 + 2 \cos \varphi(y) \right) = A \left(1 + 2 \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{ay}{f'_2} \right) \right)$$

- 3) a) L'intensité lumineuse $I(M)$ s'écrit, K étant une constante :

$$\begin{aligned}I(M) &= \frac{K}{2} |\underline{A}(M)|^2 = \frac{KA^2}{2} \left(1 + 2 \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{ay}{f'_2} \right) \right)^2 \\ &= I_0 \left(1 + 2 \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{ay}{f'_2} \right) \right)^2\end{aligned}$$

en posant $I_0 = \frac{KA^2}{2}$.

- b) La fonction $\varphi \mapsto I(\varphi)$ est 2π -périodique. Sa courbe représentative est donnée ci-dessous :



- 4) Les franges sont rectilignes et orthogonales à Oy . L'interfrange, défini par $I(y+i) = I(y)$ est égal à :

$$i = \frac{\lambda f'_2}{a} \stackrel{AN}{=} 0,33 \text{ mm}$$

Ainsi les franges sont très reserrées et le phénomène reste peu visible.

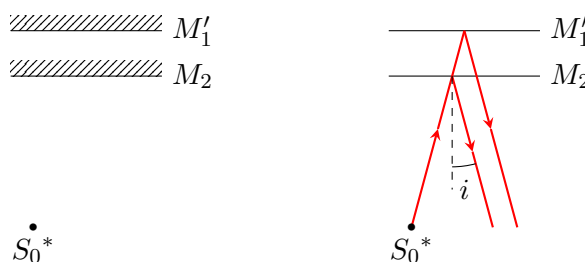
2 Caractérisation du spectre d'une diode laser

I. Détermination de la longueur d'onde centrale de la diode laser

1. Cela signifie Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation.

Il s'agit de placer des atomes dans un état d'énergie excité puis de les faire retomber dans leur état fondamental grâce à des photons incidents (émission stimulée). Les photons émis lors de cette désexcitation stimulée possèdent la même direction et la même énergie que les photons incidents. Le milieu contenant les atomes est enfermé entre deux miroirs dont l'un réfléchit à 100% et l'autre à plus de 50% et qui permet de renvoyer la plus grande partie des photons émis vers le milieu pour provoquer de nouvelles émissions stimulées, afin d'amplifier le phénomène. Les photons qui peuvent sortir constituent le faisceau laser.

2. On peut proposer le modèle des deux miroirs :



M'_1 est le symétrique de M_1 par rapport à la lame séparatrice. S_0^* est le symétrique du point source S_0 par rapport à la lame séparatrice L_s .

3. Cf. le cours et la figure ci-dessus. Les deux rayons qui convergent vers M dans le plan focal image de la lentille sortent de l'interféromètre en étant parallèles et ils proviennent d'un seul rayon lumineux émis par S_0 (division d'amplitude). On peut utiliser le modèle des deux miroirs ou bien le modèle des deux sources.
4. Comme les deux ondes qui interfèrent sont issues d'un même point source et qu'elles sont monochromatiques de même longueur d'onde λ_0 , on peut utiliser la formule de Fresnel. Si on appelle I_0 l'intensité au niveau de la source S_0 , les deux ondes émergeant de l'interféromètre ont chacune une intensité $I_0/4$. Il vient donc :

$$I = 2 \left(\frac{I_0}{4} \right) \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} 2d \cos i \right) \right]$$

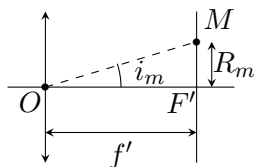
L'intensité est constante pour i constant, ce qui donne des anneaux de centre F' . Ce sont des franges d'égale inclinaison.

5. L'ordre d'interférence est :

$$p(i) = \frac{2d}{\lambda_0} \cos i = p_0 \cos i$$

où $p_0 = \frac{2d}{\lambda_0} = p_c + \varepsilon$ est l'ordre au centre, c'est à dire en $i = 0$. On voit que l'ordre d'interférence $p(i)$ décroît lorsque i augmente. C'est pourquoi l'ordre du plus petit anneau

brillant est p_c . En numérotant les anneaux brillants par rayons croissants, l'ordre de l'anneau brillant numéro m est alors $p_c - m + 1$.



Comme :

$$p(i) = \frac{2e}{\lambda_0} \cos i \approx p_0 \left(1 - \frac{i^2}{2} \right)$$

le centre de l'anneau brillant numéro m correspond à i_m tel que $\tan(i_m) \approx i_m = \frac{R_m}{f'}$ et $p(i_m) = p_c - m + 1$. Il vient donc :

$$p_c - m + 1 = p_0 - p_0 \frac{i_m^2}{2} = p_0 - p_0 \frac{R_m^2}{2f'^2}$$

d'où :

$$\frac{R_m^2}{2f'^2} = \frac{1}{p_0} (p_0 - p_c + m - 1) = \frac{\lambda_0}{2d} (m + \varepsilon - 1)$$

et donc :

$$R_m = f' \sqrt{\frac{(m - 1 + \varepsilon) \lambda_0}{d}}$$

6. Les mesures sont données dans le tableau ci-dessous :

num.anneau	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
R_m (cm)	2,9	4,6	5,85	6,9	7,75	8,6	9,3	10,0	10,7	11,3

7. On peut faire une régression linéaire sur les couples (m, R_m^2) , ce qui correspond à une fonction affine de coefficient directeur $\frac{f'^2 \lambda_0}{d}$. On trouve alors un coefficient de corrélation : $r = 0,99987$ ce qui confirme l'hypothèse d'une fonction affine $y = ax + b$. Le coefficient directeur est alors : $a = 1,328 \cdot 10^{-3}$, ce qui conduit à :

$$\lambda_0 = 580 \text{ nm}$$

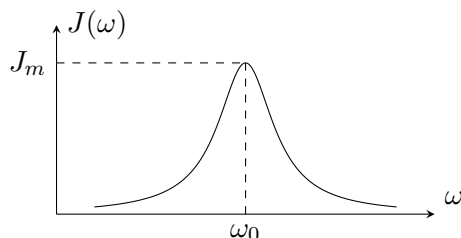
ce qui correspond à du jaune.

8. On peut raisonner avec un anneau (brillant ou sombre) d'ordre d'interférence p fixé. Comme $p = \frac{2d}{\lambda_0} \cos i$, si d augmente, alors $\cos i$ doit diminuer pour que p reste constant. On en déduit que i doit augmenter et donc le rayon de l'anneau $R = f'i$ aussi. Ainsi, les rayons des anneaux augmentent.

Le contraste diminue en raison de la longueur de cohérence ℓ_c de la lumière utilisée. Le contraste reste bon tant que $|\delta| \leq \ell_c/2$. Si δ devient de l'ordre de ℓ_c voire supérieur, le phénomène d'interférence se brouille.

II. Détermination de la largeur spectrale de la diode laser

1. On a :



On cherche ensuite les deux valeurs de ω solutions de $J(\omega) = J_m/2$, ce qui conduit à l'équation :

$$\left(\frac{\omega - \omega_0}{\omega_1}\right)^2 = 1 \iff \omega_{\pm} = \omega_0 \pm \omega_1$$

La largeur à mi-hauteur est donc : $\Delta\omega = \omega_+ - \omega_- = 2\omega_1$

2. Les deux ondes qui interfèrent n'étant pas monochromatiques, il faut utiliser la *formule de Fresnel généralisée*. On peut le justifier de la façon qualitative suivante : les ondes dont la pulsation est contenue dans la bande infinitésimale de pulsations comprises entre ω et $\omega + d\omega$ peuvent être assimilées à une seule onde monochromatique qui produira une intensité en F' donnée par (Formule de Fresnel) :

$$2J(\omega) \left[1 + \cos\left(\frac{\omega}{c}\delta\right) \right] d\omega \quad \text{avec} \quad \delta = 2d(t) = 2v_0 \times (t - t_0)$$

Comme des ondes de pulsations différentes ne peuvent pas produire d'interférences, les contributions des différentes bandes de pulsations s'additionnent en intensité et donc :

$$I(F', t) = \int_0^{+\infty} 2J(\omega) \left[1 + \cos\left(\frac{\omega}{c}\delta(t)\right) \right] d\omega$$

d'où :

$$f(\omega, t) = 2J(\omega) \left[1 + \cos\left(\frac{2\omega v_0 \times (t - t_0)}{c}\right) \right]$$

3. En utilisant les deux intégrales fournies, on calcule facilement l'intégrale précédente, avec $x = 2v_0 \times (t - t_0)$:

$$I(t) = 2J_m \pi \omega_1 \left[1 + e^{-\omega_1 2v_0 |t-t_0|/c} \cos\left(\frac{2\omega_0 v_0 \times (t - t_0)}{c}\right) \right]$$

4. On remarque que $t_0 = 50$ s, ce qui correspond à l'intensité maximale $I_{\max} = 4J_m \pi \omega_1$. On en déduit que :

$$\frac{I}{I_{\max}} = \frac{1}{2} \left[1 + e^{-\omega_1 2v_0 |t-t_0|/c} \cos\left(\frac{2\omega_0 v_0 (t - t_0)}{c}\right) \right]$$

La courbe en noir permet d'accéder à l'*enveloppe exponentielle*. Pour $t = t_1 = 100$ s, on mesure :

$$\frac{1}{2} \left[1 + e^{-\omega_1 2v_0 |t_1-t_0|/c} \right] = 0,57$$

ce qui donne :

$$\omega_1 = 7,08.10^{12} \text{ rad.s}^{-1}$$

On peut ensuite mesurer ω_0 à l'aide de la seconde courbe qui permet d'accéder aux oscillations du cosinus. On relève 12 périodes en $(63-59) = 4$ s, ce qui donne une période temporelle : $T_0 = 333$ ms. Or :

$$2\omega_0 v_0 / c = \frac{2\pi}{T_0} \iff \omega_0 = \frac{2\pi c}{2v_0 T_0} \stackrel{A.N}{=} 3,40.10^{15} \text{ rad.s}^{-1}$$

On en déduit :

$$\lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega_0} \stackrel{A.N}{=} 555 \text{ nm}$$

ce qui est une valeur proche de la première détermination mais avec un écart néanmoins relativement important de 25 nm, c'est à dire 4,5%

On en déduit la longueur de cohérence de la lumière de cette diode laser :

$$\ell_c = \frac{2\pi c}{\Delta\omega} = \frac{\pi c}{\omega_1} = 133 \mu\text{m}$$

On sait que :

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \implies \Delta\lambda = \lambda_0 \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = 2,3 \text{ nm}$$