

MP1 - DS n°7bis (Centrale - Mines)  
 Samedi 19 mars 2022 - Durée 4h

## 1 Le gravimètre à chute libre

Le principe de détermination du champ de pesanteur terrestre consiste ici en la mesure d'intervalles de temps nécessaires à un corps tombant dans le vide pour parcourir une distance donnée. La grande précision de cette technique est obtenue par la mesure de distances par interférométrie et de temps par horloges atomiques.

**Formulaire :**

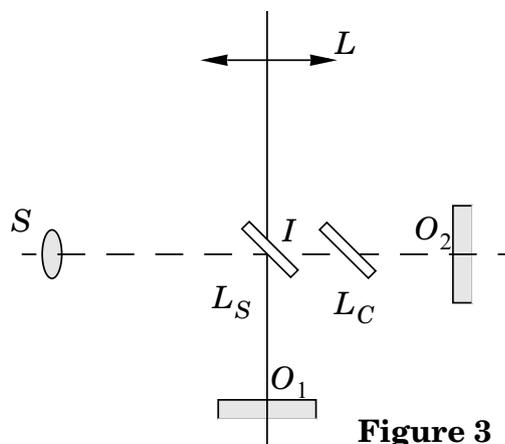
$$\sin p - \sin q = 2 \cos \left( \frac{p+q}{2} \right) \sin \left( \frac{p-q}{2} \right)$$

Vitesse de la lumière dans le vide :  $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$

### 1. Étude de l'interféromètre de Michelson

On considère l'interféromètre de Michelson dont les miroirs  $M_1$  (de centre  $O_1$ ) et  $M_2$  (de centre  $O_2$ ) sont perpendiculaires entre eux. Une lame séparatrice  $L_S$ , de centre  $I$ , semi-réfléchissante, sépare le faisceau incident en deux faisceaux de même intensité lumineuse. Cette lame est inclinée de  $45^\circ$  par rapport à  $O_1I$  et  $O_2I$ . Une lame compensatrice de même épaisseur et de même indice que la lame séparatrice est placée parallèlement à  $L_S$ .

Une source étendue  $S$  éclaire le dispositif.



**Figure 3**

a) Quel est le rôle de la lame compensatrice ?

Dans la suite, on considère que l'ensemble des deux lames est équivalent à une lame semi-réfléchissante infiniment mince. On éclaire le dispositif avec une lampe spectrale (par exemple une lampe à vapeur de mercure).

b) Comment réaliser une source quasi-monochromatique à partir de cette source ?

On supposera par la suite la source monochromatique de longueur d'onde  $\lambda_0$ . Les miroirs sont positionnés de telle sorte que  $|O_1I - O_2I| = e \neq 0$ .

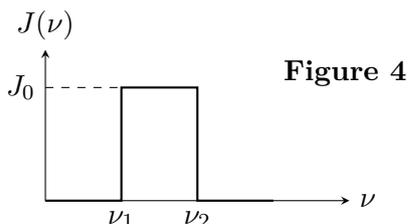
c) Décrire la figure d'interférence. Où sont localisées les franges d'interférence nettes ?

d) Pour observer ces interférences sur un écran, on utilise une lentille convergente. Où doit-on placer l'écran ? Justifier le choix d'une lentille de grande distance focale image.

- e) Un capteur d'intensité lumineuse est placé au foyer image de la lentille convergente  $L$ . Le miroir se déplace dans une direction parallèle à sa normale. Exprimer l'intensité lumineuse enregistrée par ce détecteur en fonction de  $e$  et de la fréquence  $\nu_0 = c/\lambda_0$ .

## 2. Interférogramme en lumière blanche

On remplace la source précédente par une source de lumière blanche. On modélise la répartition spectrale en intensité par une distribution rectangulaire (figure 4) où  $\nu$  est la fréquence.



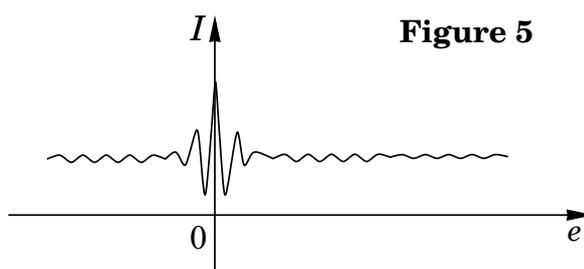
- a)  $\nu_1$  et  $\nu_2$  représentent les fréquences limites du spectre visible. Donner les ordres de grandeurs de  $\nu_1$  et  $\nu_2$ .
- b) Montrer que le détecteur (toujours placé au foyer image de la lentille convergente  $L$ ) enregistre une intensité lumineuse :

$$I = I_0 \left[ 1 + V(e) \cos \left( \frac{2\pi e (\nu_1 + \nu_2)}{c} \right) \right]$$

où  $I_0$  est une constante et où on exprimera  $V(e)$  en fonction de  $e$  et  $\Delta\nu = \nu_2 - \nu_1$ .

- c) Tracer  $V(e)$  et  $\cos \left( \frac{2\pi e (\nu_1 + \nu_2)}{c} \right)$  sur le même graphe en respectant l'ordre de grandeur relatif de  $\nu_1 + \nu_2$  et  $\Delta\nu = \nu_2 - \nu_1$ .

Quand le miroir se déplace, le détecteur enregistre donc le signal ci-dessus (figure 5).



## 3. Le gravimètre absolu balistique

Soient deux plans horizontaux distants de  $h$  (le premier situé à l'altitude  $z_0 > 0$  et le second à l'altitude  $z_0 + h$ ). À l'instant  $t = 0$  un point matériel de masse  $m$  est lancé verticalement vers le haut avec une vitesse initiale  $v_0$  à partir de l'altitude  $z = 0$ . Il traverse chacun de ces plans deux fois (une fois en montant, une fois en descendant). L'accélération de la pesanteur est supposée uniforme et vaut  $\vec{g} = -g \vec{e}_z$ .

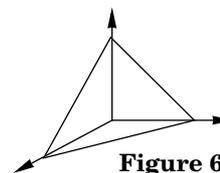
- a) En notant  $\Delta t_{\text{inf}}$  (resp.  $\Delta t_{\text{sup}}$ ) l'intervalle de temps entre les deux traversées du plan inférieur (resp. du plan supérieur), montrer à l'aide du principe fondamental de la dynamique que :

$$\Delta t_{\text{inf}} = 2 \sqrt{\frac{v_0^2}{g^2} - \frac{2(z_0 + h)}{g}} \quad \text{et} \quad \Delta t_{\text{sup}} = 2 \sqrt{\frac{v_0^2}{g^2} - \frac{2z_0}{g}}$$

- b) En déduire que l'accélération de la pesanteur  $g$  s'exprime en fonction de  $h$ ,  $\Delta t_{\text{inf}}$  et  $\Delta t_{\text{sup}}$  selon la relation ci-dessous :

$$g = \frac{8h}{(\Delta t_{\text{sup}})^2 - (\Delta t_{\text{inf}})^2}$$

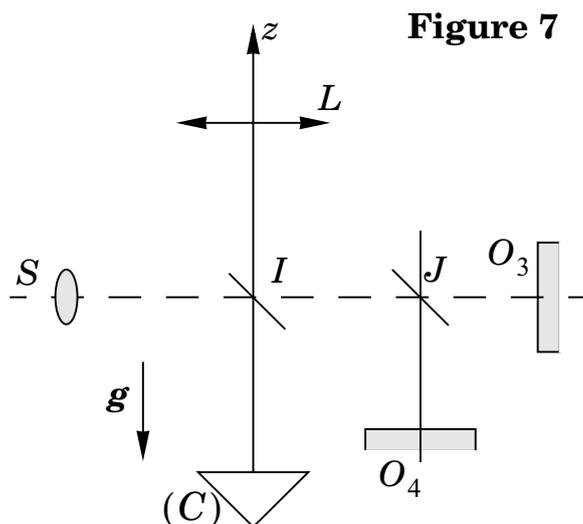
Pour mesurer  $h$ ,  $\Delta t_{\text{inf}}$  et  $\Delta t_{\text{sup}}$  on utilise l'interféromètre de Michelson étudié précédemment en y apportant les modifications suivantes. Le miroir  $M_1$  est remplacé par un coin de cube réfléchissant. Ce réflecteur est composé de trois miroirs plans identiques formant les faces d'un trièdre rectangle (figure 6).



- c) Montrer qu'un rayon lumineux incident est renvoyé dans la direction opposée après trois réflexions sur les trois faces du réflecteur. Quel intérêt présente ce réflecteur par rapport à un miroir plan ?

Le miroir  $M_2$  est remplacé par un ensemble de deux miroirs plans fixes  $M_3$  (de centre  $O_3$ ) et  $M_4$  (de centre  $O_4$ ) et une lame semi-réfléchissante considérée comme infiniment mince et telle que  $|O_3J - O_4J| = d$  (Figure 7).

La source  $S$  est toujours une source de lumière blanche caractérisée par la densité spectrale de la Figure 4 et le détecteur est toujours situé au foyer image de la lentille  $L$ .



- d) On suppose que  $d \gg \frac{c}{2\Delta\nu}$ . On masque le coin de cube avec un cache. Quelle sera l'intensité détectée par le capteur ?
- e) On retire le cache du coin de cube qui se comporte alors comme un miroir plan orthogonal à l'axe  $Iz$  vertical. Ce coin de cube est catapulté vers le haut à l'instant  $t = 0$ . Compte tenu de la question précédente, l'intensité détectée par le capteur est la somme :
- de l'intensité correspondant au couple C -  $M_3$  ;
  - de l'intensité correspondant au couple C -  $M_4$ .

Montrer que le détecteur enregistre alors quatre maxima d'intensité lumineuse (on notera  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_3$  et  $t_4$  ces instants successifs). En déduire l'expression de l'intensité du champ de pesanteur au lieu de l'expérience en fonction de  $d$  et de ces instants.

- f) Application numérique : une mesure donne  $t_4 - t_1 = 9,7406$  ms et  $t_3 - t_2 = 3,6171$  ms avec  $d = 100,00 \mu\text{m}$ . En déduire la valeur de  $g$  sur le lieu de l'expérience.
- g) Pourquoi avoir utilisé une source de lumière blanche plutôt qu'une source monochromatique ?

## 2 Une eau traitée par électrolyse

Les procédés de traitement de l'eau des piscines reposent majoritairement sur l'utilisation de produits chlorés. En effet, la plupart des bactéries nuisibles sont détruites par adjonction d'ions hypochlorites  $\text{ClO}^-$ . Les ions hypochlorites étant des composés peu stables, il est nécessaire d'en assurer le renouvellement dans l'eau de bain. La technique la plus répandue en France est la chloration à l'eau de Javel. L'inconvénient principal de cette méthode est le recours important aux produits chimiques. Le risque d'irritation pour la peau et les yeux en cas de mauvais dosage est également à considérer. Nous étudions dans la suite un système alternatif basé sur l'électrolyse d'une solution aqueuse de chlorure de sodium.

### Données numériques :

Constante d'Avogadro  $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

Rayon ionique de l'ion  $\text{Na}^+$  :  $R^+ = 97 \text{ pm}$

Rayon ionique de l'ion  $\text{Cl}^-$  :  $R^- = 181 \text{ pm}$

Masse molaire atomique de Na :  $M_{Na} = 23,0 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$

Masse molaire atomique de Cl :  $M_{Cl} = 35,5 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$

Potentiel standard du couple  $\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}$  :  $E^0(\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}) = 1,23 \text{ V}$

Potentiel standard du couple  $\text{H}_2\text{O}/\text{H}_2$  :  $E^0(\text{H}_2\text{O}/\text{H}_2) = 0 \text{ V}$

Potentiel standard du couple  $\text{Cl}_2/\text{Cl}^-$  :  $E^0(\text{Cl}_2/\text{Cl}^-) = 1,30 \text{ V}$

Constante de Faraday :  $F = N_A \times e = 96\,500 \text{ C} \cdot \text{mol}^{-1}$

### 2.1 Étude du réseau cristallin NaCl

La structure du chlorure de sodium est représentée FIGURE 1. Les ions chlorure ( $\text{Cl}^-$ ) cristallisent dans un système cubique à faces centrées. Les ions sodium ( $\text{Na}^+$ ) occupent tous les sites octaédriques et forment également un réseau cubique à faces centrées, décalé d'une demi-arête de celui des ions  $\text{Cl}^-$ .

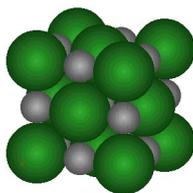
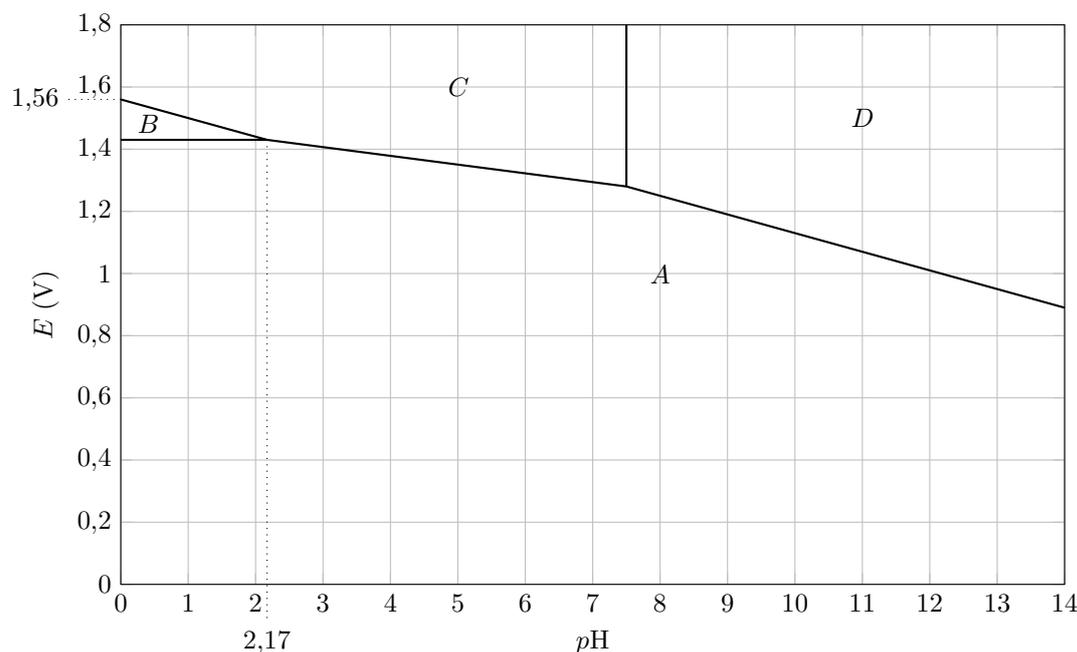


FIGURE 1 – Structure du chlorure de sodium.

1. Définir et calculer le paramètre de maille  $a$ .
2. Calculer la masse volumique du cristal de NaCl. Commenter le résultat obtenu.

### 2.2 Exploitation du diagramme $E$ - pH du chlore

La FIGURE 2 donne le diagramme potentiel-pH de l'élément chlore. Les espèces considérées, qui sont toutes en solution, sont  $\text{Cl}_{2(aq)}$ ,  $\text{Cl}_{(aq)}^-$ ,  $\text{HClO}_{(aq)}$  et  $\text{ClO}_{(aq)}^-$ . La concentration de tracé est  $C = 1,0 \cdot 10^{-1} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ . Les frontières entre deux espèces ont été calculées en traduisant l'égalité des concentrations molaires en élément chlore de chaque espèce sur la frontière, la somme de ces concentrations étant égale à  $C$ .

FIGURE 2 – Diagramme  $E - pH$  du chlore.

1. Justifier que les espèces  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  sont respectivement  $\text{Cl}_{(aq)}^-$ ,  $\text{Cl}_{2(aq)}$ ,  $\text{HClO}_{(aq)}$  et  $\text{ClO}_{(aq)}^-$ .
2. Déterminer le  $pK_a$  du couple  $\text{HClO}/\text{ClO}^-$ .
3. Écrire la demi-équation redox entre les espèces  $A$  et  $D$ .
4. Déterminer la pente de la frontière  $D/A$  et en effectuer la vérification graphique.
5. Déterminer le potentiel standard du couple  $D/A$ .

*On considère les espèces  $\text{H}_2\text{O}$ ,  $\text{O}_{2(g)}$  et  $\text{H}_{2(g)}$ . La pression de tracé est fixée à 1 bar et la concentration de tracé à  $1,0 \text{ mol.L}^{-1}$ .*

6. Déterminer l'équation de la frontière  $\text{O}_{2(g)}/\text{H}_2\text{O}$ .
7. Déterminer l'équation de la frontière  $\text{H}_2\text{O}/\text{H}_{2(g)}$ .
8. Tracer succinctement sur votre copie l'allure du diagramme potentiel-pH de l'eau superposé à celui du chlore aqueux. Quels commentaires pouvez-vous formuler ?

### 2.3 Étude de la cellule d'électrolyse

On envisage dans la suite une piscine de particulier de contenance  $V_0 = 150 \text{ m}^3$ . Pour produire  $\text{ClO}^-$  on installe un électrolyseur directement dans le bassin qui contient préalablement du sel dissout  $\text{Na}_{(aq)}^+$ ;  $\text{Cl}_{(aq)}^-$ . Le pH de l'eau est maintenu entre 7,0 et 7,4. On suppose qu'initialement l'eau est dégazée et ne contient pas de  $\text{Cl}_2$ .

L'électrolyseur est constitué de deux électrodes en titane. Le schéma de principe est donné FIGURE 3. La tension  $U$  et le courant  $i$  sont des grandeurs positives. Lors de la mise sous tension de l'électrolyseur, on observe :

- une production de  $\text{H}_{2(g)}$  à la cathode ;

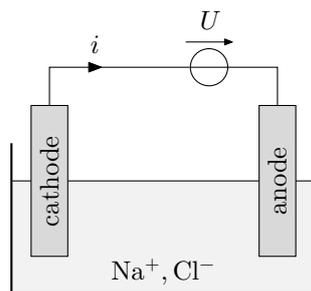


FIGURE 3 – Électrolyseur

- une production majoritaire de  $\text{Cl}_2(aq)$  et d'un peu de  $\text{O}_2(g)$  à l'anode

L'électrolyseur est placé en amont du système de filtrage de l'eau.

1. Avant la mise en fonctionnement de l'électrolyseur, l'eau de la piscine doit être salée avec une teneur en chlorure de sodium (sel) d'environ  $C_s = 5 \text{ g.L}^{-1}$  (on prendra cette valeur pour les applications numériques). Quelle masse de sel le particulier doit-il acheter lors de la première mise en route du dispositif?
2. Écrire les demi-réactions électroniques des réactions se déroulant à l'anode et à la cathode.
3.
  - a) Recopier l'allure du graphique présenté Figure 4 en indiquant sur les portions de courbes les transformations chimiques correspondantes.
  - b) On néglige dans cette question la résistance interne de l'électrolyseur. Construire sur la figure précédente la tension à appliquer pour une intensité  $i$  donnée.
  - c) Quel est selon vous le phénomène responsable de l'obtention majoritaire du dichlore et non du dioxygène à l'anode?

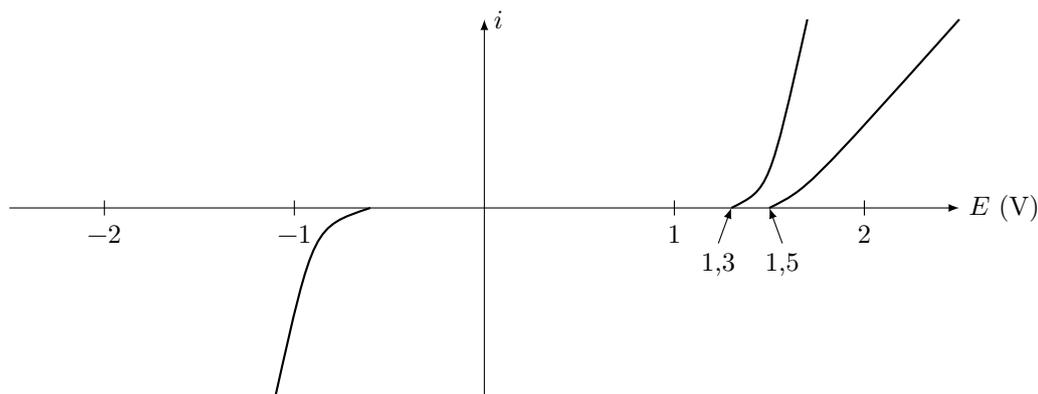


FIGURE 4 – Courbes intensité - potentiel

*Si on suppose que  $\text{Cl}_2$  est la seule espèce produite à l'anode alors la production horaire de  $\text{Cl}_2$  est  $m' = 26 \text{ g.h}^{-1}$ .*

4. Calculer la valeur de  $i$  correspondant à ce fonctionnement idéal où  $\text{Cl}_2$  est la seule espèce produite.
5. En réalité le rendement faradique de  $\text{Cl}_2$  est de 0,75. Quelle est la production horaire de  $\text{Cl}_2$  réellement obtenue?

6. La tension d'alimentation de l'électrolyseur est  $U = 7,5 \text{ V}$  et la résistance interne de l'électrolyseur est  $R = 0,15 \Omega$ . La valeur de l'intensité  $i$  étant celle calculée à la question 6., calculer la puissance électrique nécessaire à l'électrolyse. En déduire l'énergie électrique utilisée lors de la production de 1 kg de  $\text{Cl}_2$ . Commenter le résultat.

## 2.4 Obtention de $\text{ClO}^-$

1. Écrire l'équation modélisant la réaction chimique qui, à partir de  $\text{Cl}_2(\text{aq})$  en solution aqueuse, forme  $\text{Cl}^-_{(\text{aq})}$  et  $\text{ClO}^-_{(\text{aq})}$ . On l'équilibrera avec des ions  $\text{H}_3\text{O}^+_{(\text{aq})}$ . Quels sont les deux couples rédox mis en jeu ?
2. Comment appelle-t-on ce type de réaction ? Déterminer sa constante d'équilibre  $K^0$  en fonction des potentiels standard des deux couples en présence. Application numérique : calculer  $K^0$  et conclure.

## 3 Moteur thermique

Une mole d'air décrit un cycle moteur 1-2-3-4-5-1 totalement *réversible*.

Dans l'état 1 :  $T_1 = 300 \text{ K}$  et  $P_1 = 1,0 \text{ bar}$ .

1  $\rightarrow$  2 : compression adiabatique avec  $V_2 = V_1/10$  ;

2  $\rightarrow$  3 : échauffement isochore avec  $T_3 = 1\,190 \text{ K}$  ;

3  $\rightarrow$  4 : échauffement isobare et  $T_4 = 1\,500 \text{ K}$  ;

4  $\rightarrow$  5 : détente adiabatique ;

5  $\rightarrow$  1 : refroidissement isochore.

On supposera que l'air est un gaz parfait d'exposant adiabatique  $\gamma = 1,40$  constant. On donne la constante des gaz parfait :  $R = 8,31 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$ .

- 1) Déterminer les capacités thermiques molaires  $C_{Vm}$  et  $C_{Pm}$  à volume et à pression constantes en fonction de  $\gamma$  et  $R$ . En donner les valeurs numériques.
- 2) Déterminer en les justifiant les températures, volumes et pressions en chaque point du cycle. Pour chaque grandeur d'état, on fera un calcul littéral et on rangera les valeurs numériques dans un tableau de la forme :

État	1	2	3	4	5
$T$ (en K)	300		1190	1500	
$P$ (en bar)	1,0				
$V$ (en L)					

- 3) Représenter ce cycle dans un diagramme de Clapeyron.

- 4) On appelle :

$Q_1$  la chaleur reçue par le gaz au cours d'un cycle :  $Q_1 > 0$ .

$Q_2$  la chaleur cédée par ce gaz au cours d'un cycle :  $Q_2 < 0$ .

Déterminer  $Q_1$  et  $Q_2$  en fonction de  $C_{Vm}$ ,  $C_{Pm}$  et de certaines températures du tableau de la question 1. On justifiera un calcul littéral puis on en donnera les valeurs numériques.

- 5) Quel est le rendement  $r$  de ce moteur ? Application numérique : calculer  $r$ .
- 6) Comparer au rendement de Carnot  $r_C$  d'un moteur di-therme réversible fonctionnant entre deux sources de chaleur de températures  $T_1$  et  $T_4$ .