

Corrigé du DM n°16 : Thermodynamique

1 Procédé Linde-Hampson de liquéfaction de l'azote

Le diagramme de l'azote corrigé se trouve en fin du devoir.

1. Introduction.

- a) À priori, l'énoncé ne demande pas de démontrer le premier principe industriel. On se contente donc de le rappeler : si on néglige les variations d'énergie cinétique macroscopique et d'énergie potentielle de pesanteur, alors la variation d'enthalpie massique d'un fluide entre l'entrée et la sortie d'une machine (fonctionnant en régime stationnaire) vérifie :

$$h_s - h_e = w_u + q$$

- b) De même, pour un écoulement stationnaire de fluide dans une machine, le second principe s'énonce :

$$s_s - s_e = s_{\text{éch}} + s_{\text{créée}}$$

où $s_{\text{éch}}$ est l'entropie massique échangée et $s_{\text{créée}}$ est l'entropie massique créée lors du passage d'une masse unité de fluide (1kg) dans la machine.

2. Compresseur C

- a) On lit directement :

$$h_1 = 452 \text{ kJ.kg}^{-1} \text{ et } s_1 = 4,40 \text{ kJ.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$$

$$h_2 = 417 \text{ kJ.kg}^{-1} \text{ et } s_2 = 2,72 \text{ kJ.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$$

- b) On remarque qu'aux pressions $p < 1$ bar, les courbes isenthalpiques sont confondues avec les courbes isothermes et on peut donc dire que $h = h(T)$: dans ce domaine, l'azote se comporte comme un gaz parfait. En revanche ce n'est pas le cas pour des pressions $p > 1$ bar
- c) Comme le compresseur fonctionne de façon réversible : $s_{\text{créée}} = 0$ et isotherme : $s_{\text{éch}} = \frac{q_{12}}{T_1}$. Un bilan entropique appliqué au compresseur conduit à :

$$s_2 - s_1 = \frac{q_{12}}{T_1} \implies q_{12} = T_1 (s_2 - s_1) \stackrel{AN}{=} -487 \text{ kJ.kg}^{-1}$$

- d) Un bilan enthalpique donne alors :

$$w_{u,C} = h_2 - h_1 - q_{12} \stackrel{AN}{=} 452 \text{ kJ.kg}^{-1}$$

3. **Détendeur D.** En l'absence de parties mobiles ($w_u = 0$) et d'échanges thermiques ($q = 0$), la détente dans D est isenthalpique. On a donc :

$$h_3 = h_4$$

4. Séparateur S.

- a) Le point 5 est sur la courbe de saturation du côté du liquide (partie appelée *courbe d'ébullition*) à la pression $p = 1$ bar et le point 6 est sur la courbe de saturation du côté du gaz (donc à l'opposé, partie appelée *courbe de rosée*), à la même pression.

On lit directement :

$$h_6 = 228 \text{ kJ.kg}^{-1}; s_6 = 3 \text{ kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$$

$$h_5 = 32 \text{ kJ.kg}^{-1}; s_5 = 0,4 \text{ kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$$

b) On doit vérifier la relation classique des changements d'état :

$$h_6 - h_5 = \frac{s_6 - s_5}{T_{ce}} \implies T_{ce} = \frac{s_6 - s_5}{h_6 - h_5} \stackrel{AN}{=} 75,4 \text{ K}$$

où T_{ce} est la température du changement d'état. Or on lit directement : $T_{ce} = 76 \text{ K}$, ce qui est cohérent.

c) En régime stationnaire, la masse de fluide contenue dans le séparateur ne varie pas au cours du temps : par conséquent la masse de fluide qui entre dans S durant Δt doit être égale à la somme des deux masses qui sortent de S durant le même intervalle de temps :

$$D_m \Delta t = d_m \Delta t + d_\ell \Delta t$$

d'où, si $D_m \Delta t = 1 \text{ kg}$, alors $d_m \Delta t = x$ et $d_\ell \Delta t = y$ et donc : $1 = x + y$.

d) Il s'agit d'une machine avec une entrée et deux sorties. On a donc :

$$\begin{aligned} d_m h_6 + d_\ell h_5 - D_m h_4 &= P_{th} + P_u = 0 \\ \implies d_m \Delta t h_6 + d_\ell \Delta t h_5 &= D_m \Delta t h_4 \end{aligned}$$

ce qui conduit à :

$$h_4 = y h_5 + x h_6 = y h_5 + (1 - y) h_6$$

5. a) On peut considérer que l'échangeur est constitué de deux circuits qui fonctionnent à contre-courant. Aucun de ces deux circuits ne contient de parties mobiles. Nous aurons donc :

$$D_m (h_3 - h_2) = P_{th1} \quad \text{et} \quad d_m (h_1 - h_6) = P_{th2}$$

Mais comme la paroi qui entoure l'ensemble de ces deux circuits est *calorifugée*, on a de suite : $P_{th1} + P_{th2} = 0$, ce qui entraîne :

$$D_m (h_3 - h_2) + d_m (h_1 - h_6) = 0$$

En multipliant par Δt tel que $D_m \Delta t = 1$ et $d_m \Delta t = x = 1 - y$ on obtient :

$$h_3 - h_2 + (1 - y) (h_1 - h_6) = 0$$

b) Comme $h_3 = h_4 = y h_5 + (1 - y) h_6$ (Détendeur D), on en déduit en reportant dans l'équation précédente :

$$y = \frac{h_2 - h_1}{h_5 - h_1} = \frac{417 - 452}{32 - 452} = 0,083 < 1$$

c) On a :

$$w'_u = \frac{w_u}{y} \stackrel{AN}{=} 5,42 \cdot 10^3 \text{ kJ.kg}^{-1}$$

6. Second principe.

a) On peut maintenant calculer :

$$b) \quad w_{ex} h_3 = h_4 = y h_5 + (1 - y) h_6 \stackrel{AN}{=} 212 \text{ kJ.kg}^{-1}$$

L'entropie massique s_4 peut se calculer à l'aide du *théorème des moments* :

$$s_4 = y s_5 + (1 - y) s_6 \stackrel{AN}{=} 2,78 \text{ kJ.K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$$

ce qui permet de placer le point 4 sur le diagramme entropique. On construit alors point 3 en "remontant" le long de l'isenthalpique qui passe par 4 jusqu'à l'isobare $p = 200 \text{ bar}$. On lit alors :

$$s_3 = 1,72 \text{ kJ.K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$$

- b) On a : $s_4 - s_3 = 1,06 \text{ kJ.K}^{-1}.\text{kg}^{-1} > 0$ ce qui est cohérent avec le second principe puisque l'entropie échangée dans le détenteur est nulle (adiabatique). Cette différence d'entropie s'identifie donc à l'entropie créée par unité de masse.
- c) Au niveau du séparateur il y a une entrée et deux sorties : il faut généraliser le bilan entropique pour un système ouvert en écrivant (par unité de temps) :

$$d_m s_6 + d_\ell s_5 - D_m s_4 = \dot{S}_E + \dot{S}_C = \dot{S}_C$$

en introduisant les taux d'entropie échangée et créée et en notant que $\dot{S}_E = 0$. En multipliant par Δt tel que $D_m \Delta t = 1 \text{ kg}$, $d_m \Delta t = x = 1 - y \text{ kg}$, et $d_\ell \Delta t = y \text{ kg}$, on obtient :

$$(1 - y) s_6 + y s_5 - s_4 = \dot{S}_C \Delta t$$

A.N. : $(1 - y) s_6 + y s_5 - s_4 = 0$ comme cela résulte du théorème des moments ! On voit donc qu'il n'y a pas d'entropie créée, ce qui est dû au fait qu'il n'y a pas véritablement de transformation dans cet appareil.

- d) On peut voir l'échangeur comme une machine adiabatique avec deux entrées et deux sorties. On aura donc :

$$D_m s_3 + d_m s_1 - D_m s_2 - d_m s_6 = \dot{S}_C$$

d'où, en multipliant par Δt :

$$s_3 + (1 - y) s_1 - s_2 - (1 - y) s_6 = s_3 - s_2 + (1 - y) (s_1 - s_6) = \dot{S}_C \Delta t$$

On trouve alors : $\dot{S}_C \Delta t = 0,28 \text{ kJ.K}^{-1}.\text{kg}^{-1} > 0$. Cela montre que la transformation dans l'échangeur est *irréversible* : cette irréversibilité est due à l'échange de chaleur entre des fluides de températures différentes : l'azote entrant à gauche dans l'échangeur à $T_3 = 165 \text{ K}$ est en contact thermique avec la vapeur sortant de S entrant dans l'échangeur à 76 K .

2 Congélation d'un lac - Mines Ponts

1. On raisonne dans un premier temps sur le seul système couche de glace, de section $S = 1 \text{ m}^2$ et d'épaisseur $L(t)$ à l'instant t . Ce système constitue un conducteur thermique dont les extrémités sont à des températures distinctes : $T_0(t)$ pour $x = 0$ et T_e pour $x = L(t)$ (on suppose qu'il n'y a pas de discontinuité de la température en $L(t)$).

- a) En l'absence de puissance volumique, l'équation de diffusion thermique unidimensionnelle s'écrit :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Si on néglige c , cela revient à :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \implies T(x, t) = Ax + B$$

et donc :

$$T(x, t) = \frac{T_e - T_0(t)}{L(t)} x + T_0(t)$$

- b) Selon la loi de Fourier :

$$\vec{j}_Q(x, t) = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \vec{u}_x$$

et donc :

$$\vec{j}_Q(x, t) = \lambda \frac{T_0(t) - T_e}{L(t)} \vec{u}_x$$

2. Entre les instants t et $t + dt$, l'épaisseur de glace s'accroît d'une quantité dL .

- a) À pression constante, la chaleur dégagée par la solidification d'un kg d'eau liquide est ℓ_s : chaleur latente de solidification. On raisonne en valeur absolue : si la couche de glace s'accroît de dL , ce qui correspond à une masse de glace formée $dm_s = \rho S dL$, cela provoque un dégagement de chaleur de $|dm_s \ell_s| = \rho S dL \ell_f$ (on a $\ell_s = -\ell_f$).
- b) Cette chaleur doit "s'écouler" vers la zone la plus froide, c'est à dire vers l'air. Cela peut être modélisé par une condition aux limite disant que le flux thermique à travers S en $x = L$, $j_Q(L, t)$, est tel que :

$$j_Q(L, t) S dt = -\rho S dL \ell_f \implies j_Q(L, t) dt = -\rho dL \ell_f < 0$$

D'autre part, en reprenant l'expression de j_Q obtenue à la question précédente, on obtient :

$$\lambda \frac{T_0(t) - T_e}{L(t)} dt = -\rho \ell_f dL$$

et donc :

$$L dL = \frac{\lambda}{\rho \ell_f} (T_e - T_0(t)) dt$$

- c) La continuité du flux thermique se traduit par :

$$\vec{j}_Q(0^+, t) \cdot (-\vec{u}_x) + h (T_a - T_0(t)) = 0$$

donc :

$$\lambda \frac{T_0(t) - T_e}{L(t)} = h (T_a - T_0(t))$$

d'où :

$$T_0(t) = \frac{\frac{Lh}{\lambda} T_a + T_e}{1 + \frac{Lh}{\lambda}}$$

3. En substituant l'expression de $T_0(t)$ dans l'équation de la question b), on obtient :

$$dL = \frac{h}{\rho \ell_f} \frac{T_e - T_a}{1 + \frac{Lh}{\lambda}} dt = L_0 \frac{h^2}{\lambda \ell_f \rho} \frac{T_e - T_a}{1 + \frac{L}{L_0}} dt = \frac{L_0}{1 + \frac{L}{L_0}} \frac{dt}{2\tau}$$

donc :

$$\left(1 + \frac{L}{L_0}\right) dL = L_0 \frac{dt}{2\tau} \implies L + \frac{L^2}{2L_0} = L_0 \frac{t}{2\tau}$$

ou encore :

$$L^2 + 2L_0 L - L_0^2 \frac{t}{\tau} = 0$$

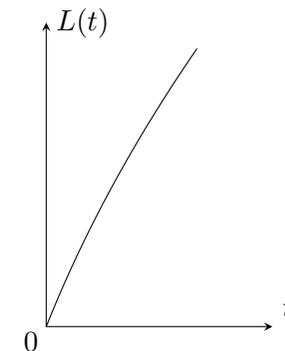
Le discriminant vaut : $\Delta = 4L_0^2 + 4L_0^2 \frac{t}{\tau} > 0$ et la seule racine réelle est :

$$L(t) = -L_0 + L_0 \sqrt{1 + \frac{t}{\tau}}$$

On en déduit (en utilisant la question 2.c) :

$$T_0(t) - T_a = \frac{T_e - T_a}{1 + \frac{L}{L_0}} = \frac{T_e - T_a}{\sqrt{1 + \frac{t}{\tau}}}$$

4. A.N. : $L_0 = 5$ cm et $\tau = 1,8 \cdot 10^4$ s ≈ 5 h.



3 Échangeur thermique (étude locale)

1. En notant $u = cT + u_0$ (u_0 constante) l'énergie interne massique de l'eau liquide à la température T (énergie interne massique d'une phase condensée idéale), on obtient l'enthalpie massique de l'eau liquide à la température T :

$$h(T, P) = u(T) + Pv = cT + Pv + u_0$$

avec v volume massique constant.

Remarque :

Contrairement à l'énergie interne qui ne dépend que de T , l'enthalpie d'une phase condensée idéale dépend des deux variables d'état T et P .

On applique le premier principe industriel à une tranche située en x et $x + dx$. Bilan en puissance :

$$D_m [h(x + dx) - h(x)] = \delta P_{th} + P_c + P_u$$

où P_c est la puissance thermique échangée par conduction thermique à travers les sections d'entrée (en x) et de sortie (en $x + dx$) de la tranche et P_u la puissance utile. Or :

- $P_u = 0$ car par de parties mobiles.
- $\vec{j}_Q = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \vec{u}_x = \vec{0}$ puisqu'on néglige λ . On en déduit : $P_c = 0$.
- La pression P étant constante :

$$\begin{aligned} h(x + dx) - h(x) &= cT(x + dx) + Pv - cT(x) - Pv \\ &= c(T(x + dx) - T(x)) \\ &= c \frac{dT}{dx} dx \end{aligned}$$

On en déduit :

$$D_m c \frac{dT}{dx} dx = -g(T(x) - T_a) dx$$

avec le signe "−" puisque si $T(x) > T_a$, la chaleur est cédée par le fluide dans la canalisation au milieu extérieur et elle est donc négative! On obtient :

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{g}{D_m c} (T(x) - T_a)$$

d'où :

$$\alpha = \frac{g}{D_m c} \quad \text{et} \quad \beta = T_a$$

2. On résout :

$$\frac{dT}{dx} + \frac{g}{D_m c} T(x) = \frac{g}{D_m c} T_a$$

et donc :

$$T(x) = A \exp\left(-\frac{gx}{D_m c}\right) + T_a$$

Comme $T(0) = T_1$, on en tire $A = T_1 - T_a$, soit :

$$T(x) = (T_1 - T_a) \exp\left(-\frac{gx}{D_m c}\right) + T_a$$

On veut $T(L) = T_2$ ce qui donne :

$$T_2 = (T_1 - T_a) \exp\left(-\frac{gL}{D_m c}\right) + T_a$$

d'où :

$$L = \frac{D_m c}{g} \ln\left(\frac{T_1 - T_a}{T_2 - T_a}\right) \stackrel{AN}{\approx} 20 \text{ m}$$

En pratique, si on ne dispose pas de l'espace pour avoir cette longueur, on construit l'échangeur thermique en forme de serpentins pour gagner de la place (c'est ce qui est fait pour les échangeurs thermiques des réfrigérateurs de cuisine par exemple).

3. Pour une longueur dx on a $\delta P_{\text{th}} = g(T(x) - T_a) dx$. Pour calculer la puissance totale échangée sur toute la longueur L , on intègre :

$$\begin{aligned} P_{\text{th}} &= \int_0^L g(T(x) - T_a) dx \\ &= g(T_1 - T_a) \int_0^L \exp\left(-\frac{gx}{D_m c}\right) dx \\ &= (T_1 - T_a) D_m c \left(1 - \exp\left(-\frac{gL}{D_m c}\right)\right) \end{aligned}$$

En remarquant d'après la question précédente que :

$$\exp\left(-\frac{gL}{D_m c}\right) = \frac{T_2 - T_a}{T_1 - T_a}$$

et en remplaçant ce terme, on obtient l'expression simple :

$$P_{\text{th}} = D_m c (T_1 - T_2)$$

Remarque :

Cette expression n'est pas étonnante. On aurait pu l'obtenir directement en appliquant le premier principe industriel entre $x = 0$ et $x = L$:

$$D_m (h(L) - h(0)) = D_m c (T_2 - T_1) = -P_{\text{th}}$$

d'où le résultat :

$$P_{\text{th}} = D_m c (T_1 - T_2)$$

