Corrigé du DM1

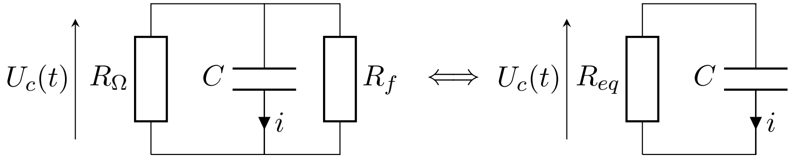
I. Électronique de réception (e3a PSI 2007)

A/ MODÈLES ÉQUIVALENTS D'UN CONDENSATEUR RÉEL

A1. Le voltmètre est équivalent à un résistor de résistance R_Ω. Le schéma équivalent du montage de la figure 4 est donc représenté ci-dessous. On peut alors associer les résistances du voltmètre et du condensateur qui sont en parallèles pour former une résistance équivalente :

$$R_{eq} = \frac{R_\Omega R_f}{R_\Omega + R_f}$$

et se ramener au deuxième schéma équivalent à droite.



Nous avons alors :

$$U_c = -R_{eq} i \text{ avec } i = C\frac{\mathrm{d}U_c}{\mathrm{d}t}$$

d'où :

$$\boxed{\frac{dU_c}{dt} + \frac{U_c}{R_{eq}C} = 0}$$

On peut alors introduire une constante de temps $\tau = R_{eq}C$, ce qui fait que la solution compatible avec la condition initial $U_c(0) = u_0 =$ 5 V s'écrit :

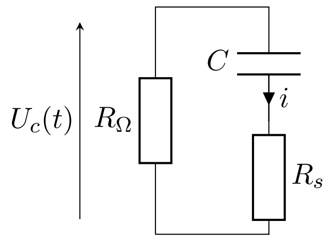
$$U_c(t) = u_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

La courbe permet d'avoir : $\tau = 0{,}9$ s, d'où :

$$\boxed{\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_\Omega} + \frac{1}{R_f} = \frac{C}{\tau} \quad \Longrightarrow \quad R_f = \frac{R_\Omega \tau}{R_\Omega C - \tau} \overset{AN}{=} 9{,}9.10^5\ \Omega}$$

Ce résultat est cohérent puisqu'on obtient une résistance élevée. Pour un condensateur idéal, elle devrait être infinie.

A2. Dans le cas du modèle de la figure 5 le circuit équivalent devient :



Soit u_1 la tension aux bornes du condensateur idéal. Une loi des mailles conduit à :

$$U_c = -R_\Omega i = u_1 + R_s i \ \text{ avec } \ i = C\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t}$$

En dérivant la première équation et en la multipliant par C, il vient :

$$i + (R_\Omega + R_s)C\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \Longrightarrow \quad U_c + (R_\Omega + R_s)C\frac{\mathrm{d}U_c}{\mathrm{d}t} = 0$$

d'où :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}U_c}{\mathrm{d}t} + \frac{U_c}{(R_\Omega + R_s)C} = 0}$$

La nouvelle constante de temps du circuit est alors : $\tau = (R_\Omega + R_s)C = 0{,}9$ s.On en déduit que :

$$R_s = \frac{\tau}{C} - R_\Omega = -9{,}1\ \mathrm{M}\Omega < 0$$

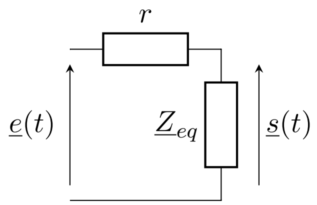
ce qui est impossible !

B/ ÉTUDE D'UN FILTRE SIMPLIFIÉ

B1. Soit $\underline{Y}_{eq}$ l'admittance complexe équivalente de l'association parallèle $L - r' - C$. Nous avons (avec $r = r'$) :

$$\underline{Y}_{eq} = \frac{1}{jL\omega} + \frac{1}{r} + jC\omega$$

En posant $\underline{Z}_{eq} = 1/\underline{Y}_{eq}$, le montage se réduit à un pont diviseur de tension :



On obtient :

$$\underline{s}(t) = \underline{e}(t)\,\frac{\underline{Z}_{eq}}{r + \underline{Z}_{eq}} = \underline{e}(t)\,\frac{1}{1 + r\underline{Y}_{eq}}$$

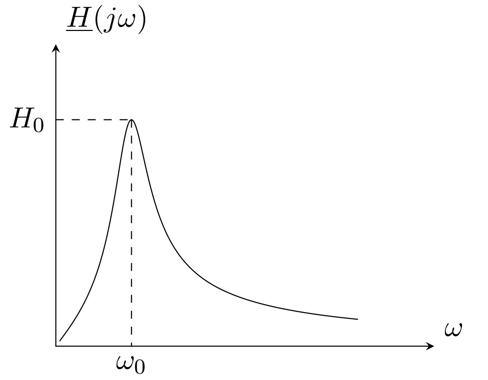
d'où :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{2 + \dfrac{r}{jL\omega} + jrC\omega} = \frac{1/2}{1 + \dfrac{r}{j2L\omega} + \dfrac{jrC\omega}{2}}$$

Par identification à la forme canonique, on trouve $\boxed{H_0 = 1/2}$ et le système de deux équations :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{Q}{\omega_0} & = & \dfrac{rC}{2} \\ Q\omega_0 & = & \dfrac{r}{2L} \end{array}\right. \iff \boxed{Q = \frac{r}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} \quad \text{et} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

Il s'agit d'un filtre passe-bande. L'allure du gain est donné ci-dessous :



Application numérique :

$$\boxed{Q = 1{,}6.10^3 \quad \text{et} \quad \omega_0 = 3{,}2.10^3\ \text{rad.s}^{-1}}$$

Il s'agit d'un facteur de qualité extrêmement élevé : ce filtre est donc très sélectif.

B2. En $\omega = \omega_0$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} |\underline{H}(j\omega_0)| & = & \dfrac{H_0}{2\Delta\omega}\omega_0 + s_1 = H_0 \\ |\underline{H}(j\omega_0)| & = & -\dfrac{H_0}{2\Delta\omega}\omega_0 + s_2 = H_0 \end{array}\right. \Longrightarrow \boxed{\left\{\begin{array}{rcl} s_1 & = & H_0\left(1 - \dfrac{\omega_0}{2\Delta\omega}\right) \\ s_2 & = & H_0\left(1 + \dfrac{\omega_0}{2\Delta\omega}\right) \end{array}\right.}$$

B3. Il y a une erreur dans l'énoncé car si $\omega(t)$ est une pulsation, alors l'expression $e(t) = e_0 \cos\omega(t)$ n'est pas homogène. Il faudrait la remplacer par : $e(t) = e_0\cos(\,\omega(t) \times t)$ en considérant que l'excitation est un signal sinusoïdal d'amplitude e_0 et de pulsation variable $\omega(t) = \Omega_0\cos(\Omega t) + \omega'$.

Lorsque t varie, $\omega(t)$ varie entre $\omega_{min} = \omega' - \Omega_0 = \omega_0 - \Delta\omega - \Omega_0 > \omega_0 - 2\Delta\omega$ lorsque $\cos(\Omega t) = -1$ et $\omega_{max} = \omega' + \Omega_0 = \omega_0 - \Delta\omega + \Omega_0 < \omega_0$

lorsque $\cos(\Omega t) = +1$. On est donc toujours dans la situation où :

$$\omega_0 - 2\Delta\omega < \omega(t) < \omega_0$$

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} s_0(t) &= |\,\underline{H}(j\omega(t)\,|\,e_0 = \left(\frac{H_0}{2\Delta\omega}\omega(t) + s_1\right) e_0 \\ &= H_0 e_0 \left(1 + \frac{\omega(t) - \omega_0}{2\Delta\omega}\right) \end{aligned}$$

En remplaçant $\omega(t)$ par son expression et en simplifiant un peu, on trouve finalement :

$$\boxed{s_0(t) = \frac{H_0 e_0}{2}\left(1 + \frac{\Omega_0}{\Delta\omega}\cos(\Omega t)\right)}$$

$e(t)$ est en fait un signal modulé en fréquence, avec une amplitude de modulation fréquentielle égale à Ω_0. Lorsque le temps varie, $s_0(t)$ varie entre :

$$s_{min} = \frac{H_0 e_0}{2}\left(1 - \frac{\Omega_0}{\Delta\omega}\right) \quad \text{et} \quad s_{max} = \frac{H_0 e_0}{2}\left(1 + \frac{\Omega_0}{\Delta\omega}\right)$$

En faisant la différence entre les valeurs crête à crête, on obtient $s_{max} - s_{min} = H_0 e_0 \dfrac{\Omega_0}{\Delta\omega}$, grandeur proportionnelle à Ω_0 et, connaissant H_0, e_0 et $\Delta\omega$, on peut en déduire Ω_0.

II. Résolution de problème

1. L'excitation du filtre est $e(t) = E_0\cos(\omega t)$ et la réponse est la tension $u(t)$ aux bornes de la résistance R : $u(t) = Ri(t) = RI_0\cos(\omega t + \varphi)$ avec $\omega = 2\pi f$. Ainsi, l'amplitude de $u(t)$ sera $U_m = RI_0$ et son déphasage par rapport à $e(t)$ sera φ.
   La fonction de transfert de ce filtre est donnée par un théorème pont diviseur de tension. Dans le domaine complexe, on obtient :

   $$\underline{u}(t) = \underline{e}(t)\frac{R}{R + r + jL\omega + \dfrac{1}{jC\omega}} \Longrightarrow \underline{H}(j\omega) = \frac{R}{R + r + jL\omega + \dfrac{1}{jC\omega}}$$

   Le gain et le déphasage entre l'excitation et la réponse sont donc donnés par :

   $$G(\omega) = \frac{U_m}{E_0} = \frac{R}{\sqrt{(R+r)^2 + (L\omega - 1/C\omega)^2}}$$

   et

   $$\varphi = \arg\underline{H}(j\omega) = -\arctan\left(\frac{L\omega - 1/C\omega}{R + r}\right)$$

   On lit sur l'oscillogramme (en faisant attention au nombre de volts/div) :

   $$E_0 = 7{,}56 \text{ V} \;\; ; \;\; U_m = 2{,}52 \text{ V} \implies G(\omega) = 0{,}33$$

   et on mesure un décalage temporel $\tau = 0{,}054$ ms et une période $T = 0{,}29$ ms. Comme $u(t)$ est en retard sur $e(t)$, le déphasage est négatif et s'écrit :

   $$\varphi = -\,2\pi\,\frac{\tau}{T} \approx -\,0{,}37\pi$$

   On en déduit :

   $$L\omega - \frac{1}{C\omega} = (R + r)\,\tan\varphi$$

que l'on reporte dans le gain pour trouver :

$$G(\omega) = \frac{R}{R+r}\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\varphi}} = \frac{R}{R+r}\cos\varphi$$

et donc :

$$\boxed{r = R\left(\frac{\cos\varphi}{G(\omega)} - 1\right) \overset{AN}{=} 17\,\Omega}$$

puis :

$$\boxed{L = \frac{1}{C\omega^2} + \frac{(R+r)\,\tan\varphi}{\omega} = \frac{T^2}{4\pi^2 C} + \frac{(R+r)T\,\tan\varphi}{2\pi} \approx 10\text{ mH}}$$

Les ordres de grandeurs sont cohérents avec les valeurs rencontrées en travaux pratiques.

2. Le problème est que la masse de l'oscilloscope doit coïncider avec celle du générateur. Il n'est donc pas possible de mesurer à la fois la tension aux bornes du générateur et celle aux bornes de la bobine sans changer l'organisation des composants de ce montage.

II. Amortisseur de véhicule

1. Appliquons le principe fondamental de la dynamique à la masse M, en l'absence de mouvement. Les seules forces agissant étant le poids et la tension du ressort, il vient, en projetant sur $\vec{u}_z$:

$$\boxed{-k\left(L_{\text{éq}} - L_0\right) - Mg = 0 \quad\Rightarrow\quad L_{\text{éq}} = L_0 - \frac{Mg}{k}}$$

2. a) λ est la période spatiale du profil de la route. Comme le déplacement horizontal du véhicule se fait à vitesse constante : $X = V\,t$, ce qui conduit à :

$$\boxed{z_A(t) = A_m \cos\left(\frac{2\pi V\,t}{\lambda}\right)}$$

(on néglige le rayon de la roue). Par la suite on pourra poser $\omega = \frac{2\pi V}{\lambda}$, homogène à une pulsation, pour mettre $z_A(t)$ sous la forme : $z_A(t) = A_m\cos(\omega t)$

b) En présence d'un mouvement vertical de M, les forces exercées sur celle-ci deviennent : la tension du ressort $\vec{T} = -k\ (z_B - z_A - L_0)\,\vec{u}_z = -k\ (L_{\text{éq}} + z - z_A - L_0)\,\vec{u}_z$, le poids $\vec{P} = -Mg\,\vec{u}_z$ et la force d'amortissement fluide $\vec{f} = -h\ (\dot{z}_B - \dot{z}_A)\ \vec{u}_z = -h\ (\dot{z} - \dot{z}_A)\ \vec{u}_z$. En projetant l'équation du principe fondamental de la dynamique sur $\vec{u}_z$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} M\,\ddot{z} &= -k\ (L_{\text{éq}} + z - z_A - L_0) - Mg - h\ (\dot{z} - \dot{z}_A) \\ &= -k\ (z - z_A) - h\ (\dot{z} - \dot{z}_A) \end{aligned}$$

d'où :

$$\boxed{\ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q}\,\dot{z} + \omega_0^2\,z = \frac{\omega_0}{Q}\,\dot{z_A} + \omega_0^2\,z_A}$$

3. a) On peut transposer l'équation différentielle précédente dans le domaine complexe. Sachant que dériver ces grandeurs par rapport au temps revient à les multiplier par $j\omega$, il vient :

$$\left(-\omega^2 + \frac{\omega_0}{Q}\,j\omega + \omega_0^2\right)\underline{Z}\exp(j\omega t) = \left(\frac{\omega_0}{Q}\,j\omega + \omega_0^2\right)A_m\exp(j\omega t)$$

d'où :

$$\boxed{\underline{H} = \frac{\underline{Z}}{A_m} = \frac{\left(\frac{\omega_0}{Q}\,j\omega + \omega_0^2\right)}{\left(\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{\omega_0}{Q}\,j\omega\right)}}$$

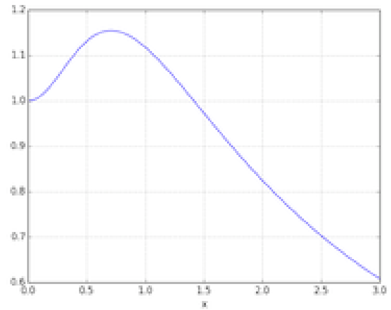
b) En régime critique, le discriminant de l'équation caractéristique $r^2 + \frac{\omega_0}{Q}\,r + \omega_0^2 = 0$ est nul, d'où :

$$\boxed{\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\,\omega_0^2 = 0 \quad\Rightarrow\quad Q = \frac{1}{2}}$$

Afin de pouvoir tracer la courbe, il est préférable d'introduire la *pulsation réduite* $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$ et de tracer $Z_m/A_m = |\,\underline{H}\,|$ qui sont deux grandeurs sans dimension. Avec $Q = 1/2$, nous pouvons écrire :

$$\frac{Z_m}{A_m} = \left|\frac{1 + 2jx}{1 - x^2 + 2jx}\right| = \left|\frac{1 + 2jx}{(1 + jx)^2}\right| = \frac{\sqrt{1 + 4\,x^2}}{1 + x^2}$$

La représentation de Z_m/A_m est donnée ci-dessous :



c) À très basse vitesse, $\omega \to 0$ et $Z_m \to A_m$: le camion oscille lentement en suivant l'amplitude (supposée faible) du profil de la route. À haute vitesse ($\omega >> \omega_0$), $Z_m \to 0$: il n'y a plus d'oscillations.