

**DM n°2**  
(Pour le mardi 27 septembre 2022)

Les matériaux piézoélectriques ont la capacité de voir apparaître une différence de potentiel entre leurs faces lorsqu'on exerce sur elles une contrainte (effet direct) mais également de pouvoir se déformer sous l'action d'une différence de potentiel imposée (effet inverse), ce qui en fait des matériaux très intéressants sur le plan des applications. On propose ici d'étudier différentes utilisations de ces matériaux. Les quatre parties de ce problème sont indépendantes.

## I Utilisation en capteur de forces

Les montages ci-après utilisent des amplificateurs linéaires intégrés (ALI) supposés idéaux et fonctionnant en régime linéaire.

### I.A – Mesure de l'intensité d'une force s'exerçant sur une lame piézoélectrique

On suppose qu'une force  $\vec{F}$  régulièrement répartie est exercée sur la face de la lame, celle-ci entraînant l'apparition d'une tension  $V_e$  à ses bornes et de deux charges opposées  $+q$  et  $-q$  sur les faces de la lame. La charge  $q$  est liée à  $V_e$  ainsi qu'à la force  $\vec{F}$  exercée de sorte que  $q = CV_e = KF$  où  $C$ ,  $K$  et  $F$  représentent respectivement une capacité, une constante de proportionnalité et l'intensité de la force  $\vec{F}$ .

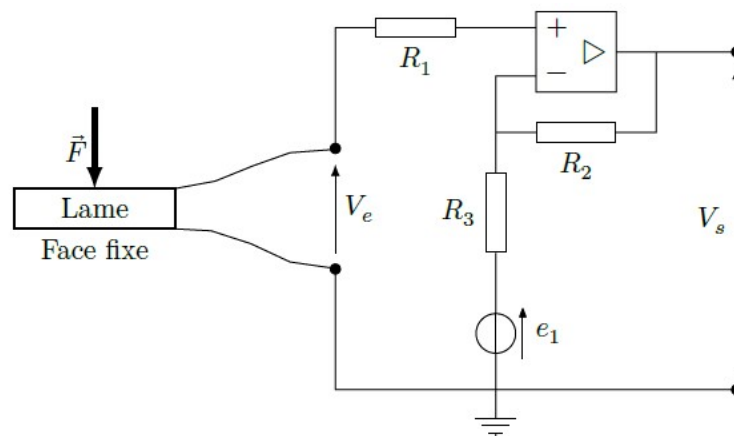


Figure 1

Q 1. Après avoir rappelé le modèle de l'amplificateur linéaire intégré idéal, exprimer la tension  $V_e$  en fonction de  $e_1$ ,  $V_s$  et des différentes résistances (figure 1).

#### Application numérique

Q 2. On donne :  $R_1 = 10\text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 6,5\text{ k}\Omega$ ,  $R_3 = 1,0\text{ k}\Omega$  et  $e_1 = 100\text{ mV}$ . On mesure  $V_s = 6,50\text{ V}$ , en déduire  $V_e$ .

Q 3. Sachant que  $C = 8,0 \times 10^{-13}\text{ F}$  et que  $K = 1,0 \times 10^{-12}\text{ C}\cdot\text{N}^{-1}$ , déterminer l'intensité de la force  $\vec{F}$  s'exerçant sur la lame.

### I.B – Mesure de la fréquence d'une force excitatrice sinusoïdale s'exerçant sur une lame

On considère que la lame est soumise à une action mécanique variant sinusoïdalement dans le temps à la fréquence  $f$ , fréquence que l'on se propose de déterminer à l'aide du montage de la figure 2.

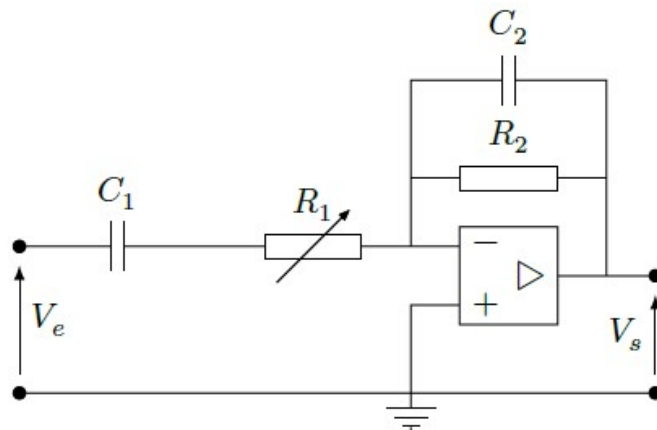


Figure 2

- Q 4. Déterminer l'expression de la fonction de transfert du filtre de la figure 2 et la mettre sous la forme

$$\underline{H}(j\omega) = -\frac{A}{1 + j(\omega/\omega_1 - \omega_2/\omega)}$$

en précisant les expressions de  $A$ ,  $\omega_1$  et  $\omega_2$  en fonction de  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $C_1$  et  $C_2$ .

- Q 5. Indiquer quelle est la nature de ce filtre.

- Q 6. Montrer que le gain passe par un maximum pour une pulsation  $\omega$  que l'on exprimera en fonction de  $\omega_1$  et  $\omega_2$ .

On ajuste à présent la résistance  $R_1$  de manière à ce que les signaux d'entrée et de sortie soient en opposition de phase.

- Q 7. Comment peut-on vérifier expérimentalement que les deux signaux sont en opposition de phase ? Indiquer quel matériel peut être utilisé pour cette opération et comment le relier au montage.

- Q 8. Déterminer la fréquence de la contrainte s'exerçant sur la lame. Calculer sa valeur numérique sachant que  $R_2 = 1,0 \times 10^2 \text{ k}\Omega$ ,  $C_1 = 50 \text{ nF}$ ,  $C_2 = 5,0 \text{ nF}$  et qu'il a fallu régler  $R_1$  à  $10 \text{ k}\Omega$  de manière à ce que les deux signaux soient en opposition de phase.

## 2 Filtrage d'une tension

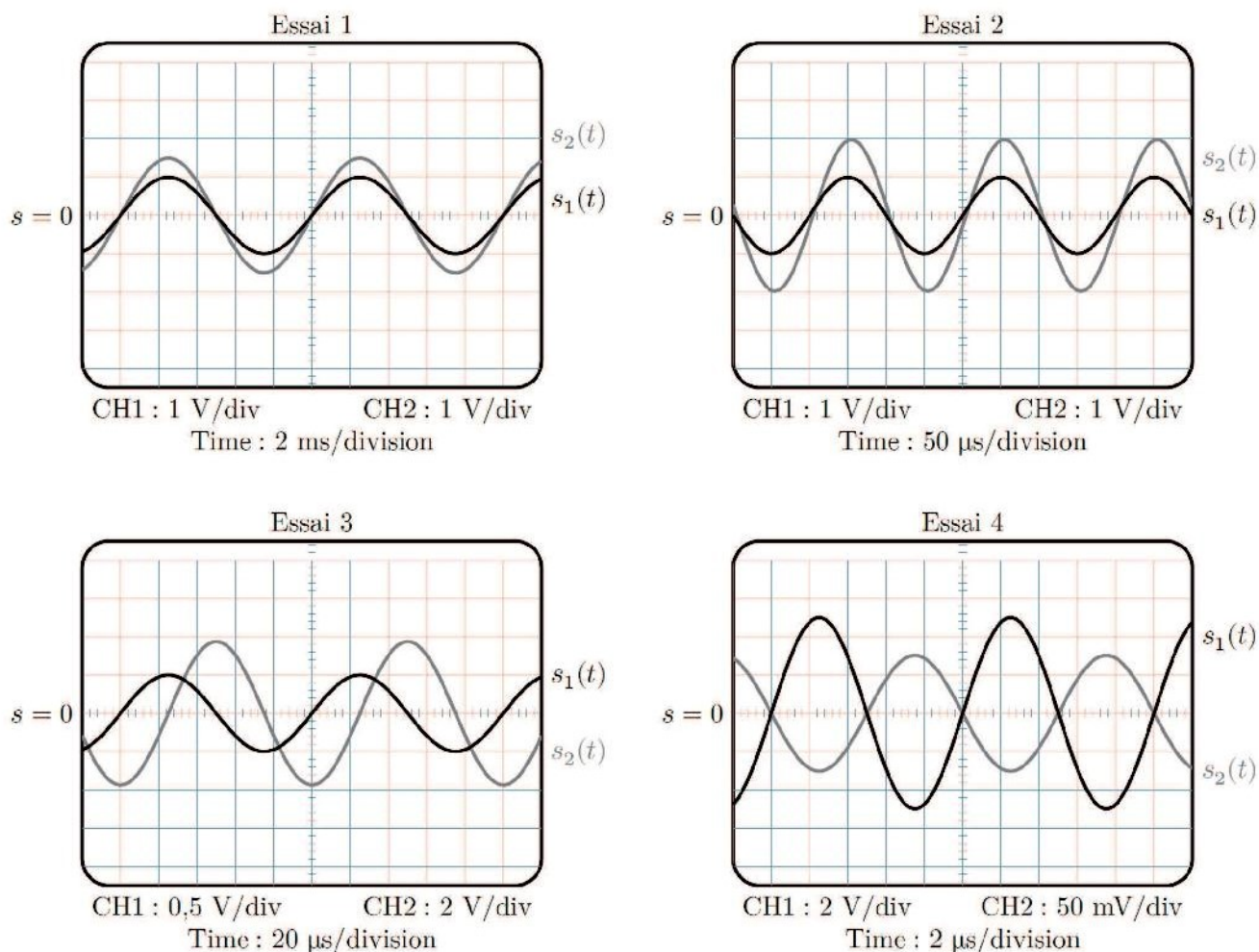
**I.E** – On souhaite enregistrer un signal musical avec une haute fidélité. Le signal à échantillonner possède des harmoniques très élevées, qui risquent de nuire à la qualité de l'enregistrement. Avant la numérisation, le signal doit être filtré. Un document en annexe fournit les spécifications du LMF100, qui est un composant intégré. Il réalise différents types de filtrages, selon les branchements qu'on lui applique. Dans ce document, la grandeur  $s$  est égale à  $j\omega$  où  $\omega$  est la pulsation des signaux sinusoïdaux et  $j^2 = -1$ .

**I.E.1)** Quel type de filtre doit-on utiliser et pourquoi ? Préciser la bande de fréquences qu'il doit sélectionner.

**I.E.2)** Proposer une valeur de la fréquence d'échantillonnage adaptée à la situation.

**I.F** – Quatre essais ont été réalisés en laboratoire, à quatre fréquences différentes, avec un filtre d'ordre 2 réalisé avec le LMF100. Sur les quatre oscillogrammes relevés **figure 5**,  $s_2(t)$  désigne la tension de sortie du filtre et  $s_1(t)$  la tension d'entrée.

Déduire de ces quatre essais la nature du filtre testé, ainsi que ses caractéristiques : fréquence propre, fréquence de coupure, facteur de qualité. Expliciter clairement la démarche et commenter les résultats obtenus.



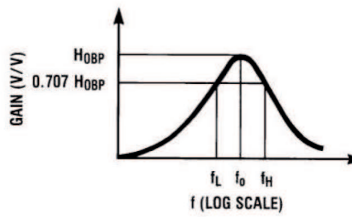
**Figure 5**



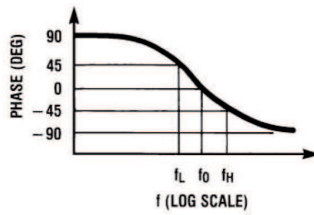
## Annexe

Filtres réalisables avec le LMF100

$$H_{BP}(s) = \frac{H_{OBP} \frac{\omega_0}{Q} s}{s^2 + \frac{s\omega_0}{Q} + \omega_0^2}$$



(a)



(b)

$$Q = \frac{f_0}{f_H - f_L}; f_0 = \sqrt{f_L f_H}$$

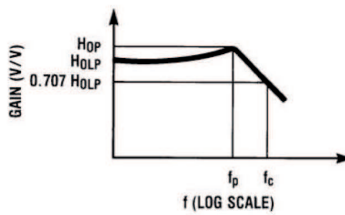
$$f_L = f_0 \left( \frac{-1}{2Q} + \sqrt{\left(\frac{1}{2Q}\right)^2 + 1} \right)$$

$$f_H = f_0 \left( \frac{1}{2Q} + \sqrt{\left(\frac{1}{2Q}\right)^2 + 1} \right)$$

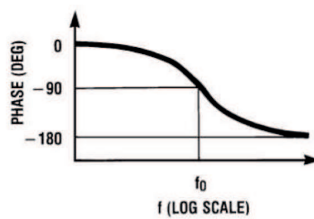
$$\omega_0 = 2\pi f_0$$

FIGURE 1. 2nd-Order Bandpass Response

$$H_{LP}(s) = \frac{H_{OLP} \omega_0^2}{s^2 + \frac{s\omega_0}{Q} + \omega_0^2}$$



(a)



(b)

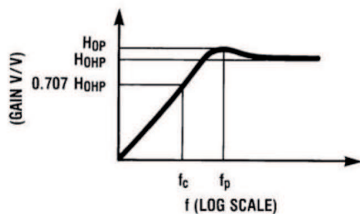
$$f_c = f_0 \times \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right) + \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right)^2 + 1}}$$

$$f_p = f_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

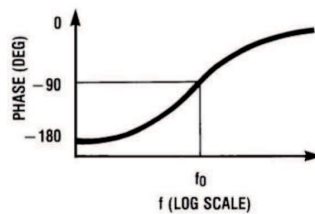
$$H_{OP} = H_{OLP} \times \frac{1}{Q \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$$

FIGURE 2. 2nd-Order Low-Pass Response

$$H_{HP}(s) = \frac{H_{OHP} s^2}{s^2 + \frac{s\omega_0}{Q} + \omega_0^2}$$



(b)



$$f_c = f_0 \times \left[ \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right) + \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right)^2 + 1}} \right]^{-1}$$

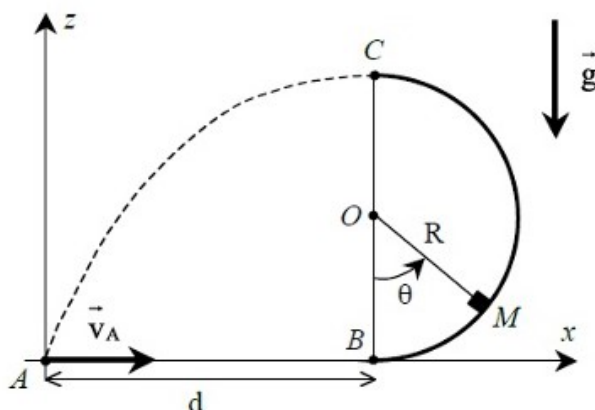
$$f_p = f_0 \times \left[ \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \right]^{-1}$$

$$H_{OP} = H_{OHP} \times \frac{1}{Q \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$$

FIGURE 3. 2nd-Order High-Pass Response

### 3 Mouvement d'un palet sur une piste circulaire

Un palet, point matériel de masse  $m$ , est lancé au niveau du point  $A$  avec une vitesse horizontale  $\vec{v}_A$ .  $AB$  est horizontal et  $BC$  est une piste en demi-cercle de rayon  $R$  et de centre  $O$ . On suppose que le palet se déplace sans frottement. On veut que celui-ci garde le contact avec le support jusqu'au point  $C$  et qu'après sa chute (au-delà de  $C$ ), il retombe exactement à son point de départ en  $A$ . On notera que la vitesse du mobile en  $C$  est horizontale (tangente au support).



Dans tout l'exercice, on supposera que  $d = 3R$ .

1. En utilisant le théorème de l'énergie cinétique, calculer la vitesse  $v_C$  du palet au point  $C$  en fonction de  $v_A$ ,  $g$  et  $R$ .
2. En utilisant le principe fondamental de la dynamique, déterminer la composante  $N$  de la réaction du support pour une position quelconque du palet  $M$  en fonction de  $m$ ,  $g$ ,  $R$ ,  $v$  (sa vitesse en ce point) et  $\theta$  (sa position angulaire sur le demi-cercle). Donner sa valeur en  $C$ . En déduire une condition sur  $v_A$  pour que le palet ne décolle pas de la piste.
3. Le point matériel est alors en chute libre à partir de  $C$ . Déterminer les équations horaires  $(x(t), z(t))$  de sa trajectoire.
4. On veut que le point  $M$  retombe en  $A$ . Montrer que la valeur de sa vitesse en  $C$  est  $v_C = \frac{3}{2} \sqrt{gR}$ . En déduire l'expression de la vitesse  $v_A$  requise.
5. En réalité, la vitesse à donner au palet en  $A$  est  $v'_A = 1,1 v_A$  où  $v_A$  est la vitesse précédemment calculée. Ceci peut s'interpréter par l'existence de frottement solide le long de la piste horizontale entre  $A$  et  $B$ . La force tangentielle de frottement est opposée au déplacement et a pour norme  $T = f N$ ,  $f$  étant le coefficient de frottement de Coulomb et  $N$  la réaction normale de la piste.

Appliquer à nouveau le théorème de l'énergie cinétique entre  $A$  et  $C$ . Déterminer alors le travail de la force de frottement et en déduire la valeur numérique du coefficient  $f$ .