Changement de référentiel.
Lois de composition des vitesses et des accélérations.
Référentiels non galiléens

I. Lois de dérivation vectorielle

1) Référentiel absolu. Repère absolu

On choisit un premier référentiel (c'est à dire un solide indéformable) qu'on va appeler **référentiel absolu**, noté $(\mathscr{R}_a)$. On munit ce référentiel d'un repère d'espace appelé **repère absolu**, noté (R_a)

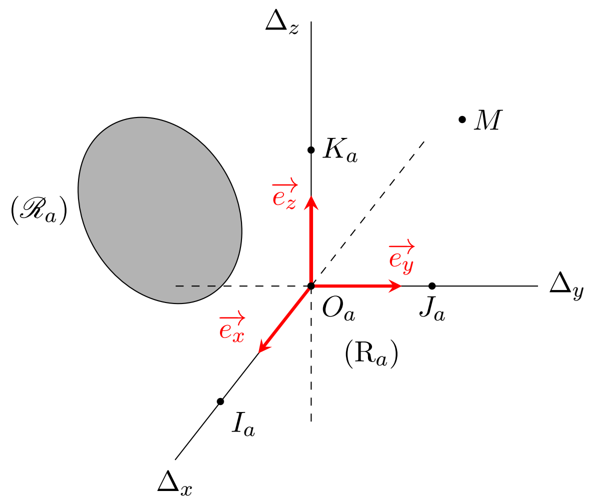

FIGURE 1 – Le référentiel absolu $(\mathscr{R}_a)$ muni du repère absolu (R_a)

- (R_a) est formé de 3 droites orientées Δ_x, Δ_y et Δ_z, immobiles dans $(\mathscr{R}_a)$, orthogonales 2 à 2, qui se coupent en O_a (point origine)
- Les 3 points I_a, J_a et K_a orientent respectivement Δ_x, Δ_y et Δ_z.

À partir de là, tout point M est repéré d'une unique façon par ses 3 coordonnées cartésiennes x_a, y_a et z_a dans (R_a) où :

$$\begin{matrix} x_a & & \Delta_x \\ y_a & \text{sont les abscisses de } M \text{ sur} & \Delta_y \\ z_a & & \Delta_z \end{matrix}$$

Pour tout point M on a :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = (x_a, y_a, z_a) = x_a\,\overrightarrow{e_x} + y_a\,\overrightarrow{e_y} + z_a\,\overrightarrow{e_z} \quad \in \mathbb{R}^3}$$

avec $\overrightarrow{e_x} = (1,0,0)$, $\overrightarrow{e_y} = (0,1,0)$ et $\overrightarrow{e_z} = (0,0,1)$ vecteurs de la **base canonique** de $\mathbb{R}^3$. Ces trois vecteurs sont aussi les vecteurs unitaires (sans dimension) associés à chaque axe Δ_x, Δ_y et Δ_z :

$$\boxed{\overrightarrow{e_x} = \frac{\overrightarrow{O_aI_a}}{O_aI_a} \;\; ; \;\; \overrightarrow{e_y} = \frac{\overrightarrow{O_aJ_a}}{O_aJ_a} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{e_z} = \frac{\overrightarrow{O_aK_a}}{O_aK_a}}$$

Leurs représentation géométriques sont données sur la Figure 1. Le triplet $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ est une base O.N.D. appelée **base cartésienne liée au repère** (R_a).

On s'arrange pour placer les points I_a, J_a et K_a de sorte que la règle de la main droite soit vérifiée. Le repère absolu est alors qualifié de **repère orthonormal direct**. Par la suite on pourra aussi adopter les notations suivantes :

$$\Delta_x = O_ax \;\; ; \;\; \Delta_y = O_ay \;\; ; \;\; \Delta_z = O_az \quad \text{et} \quad \mathrm{R}_a = (O_axyz)$$

2) Référentiel relatif. Repère relatif

Considérons maintenant un autre référentiel (solide indéformable) en mouvement relativement au référentiel absolu $(\mathscr{R}_a)$: il s'agit d'un référentiel qu'on appellera **relatif** et qu'on notera $(\mathscr{R})$. On munit $(\mathscr{R})$ d'un repère d'espace (R) appelé **repère relatif**.

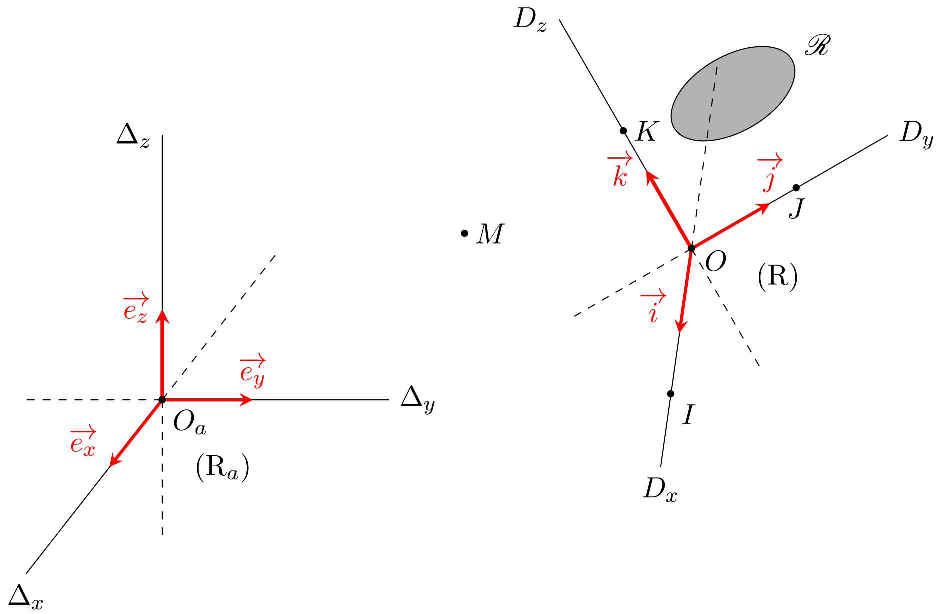

FIGURE 2 – Le référentiel relatif ($\mathscr{R}$) muni du repère relatif (R)

- Le repère relatif (R) est formé de 3 droites orientées D_x, D_y et D_z, immobiles dans ($\mathscr{R}$), orthogonales 2 à 2 et qui se coupent en O (point origine).
- Les 3 points I, J et K orientent respectivement D_x, D_y et D_z.

On introduit les 3 vecteurs unitaires, orthogonaux 2 à 2 et définis par :

$$\boxed{\overrightarrow{i} = \frac{\overrightarrow{OI}}{OI} \;;\; \overrightarrow{j} = \frac{\overrightarrow{OJ}}{OJ} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{k} = \frac{\overrightarrow{OK}}{OK}}$$

dont les représentations géométriques sont données sur la Figure 2 : il s'agit des vecteurs unitaires (san dimension) des axes D_x, D_y et D_z.

Si on choisit correctement les points I, J et K de sorte que $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ obéisse à la règle de la main droite, alors ce triplet forme une base O.N.D. appelée **base cartésienne liée au repère relatif** (R).

Attention : $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ n'est plus (en général) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Par exemple :

Cependant, comme $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est une base, on peut écrire de façon unique le vecteur $\overrightarrow{OM}$ sous la forme :

$$\overrightarrow{OM} = \alpha\,\overrightarrow{i} + \beta\,\overrightarrow{j} + \gamma\,\overrightarrow{k}$$

et comme c'est de plus une base O.N. on a :

$$\left\{\begin{array}{lllll} \alpha & = & \overrightarrow{i}.\overrightarrow{OM} & = & x \quad \text{abscisse de } M \text{ sur } D_x \\ \beta & = & \overrightarrow{j}.\overrightarrow{OM} & = & y \quad \text{abscisse de } M \text{ sur } D_y \\ \gamma & = & \overrightarrow{k}.\overrightarrow{OM} & = & z \quad \text{abscisse de } M \text{ sur } D_z \end{array}\right.$$

d'après la relation vue au chapitre précédent. On écrira donc :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}}$$

Les trois réels x, y et z sont les **coordonnées cartésiennes du point M dans le repère relatif** (R).

3) Universalité du temps

On dispose maintenant de deux référentiels $(\mathscr{R}_a)$ et $(\mathscr{R})$ munis respectivement de leurs repères d'espace (R_a) et (R). Prenons alors 2 horloges **identiques**, déclenchées simultanément à un même instant initial, et plaçons la première immobile dans $(\mathscr{R}_a)$ et la seconde immobile dans $(\mathscr{R})$.

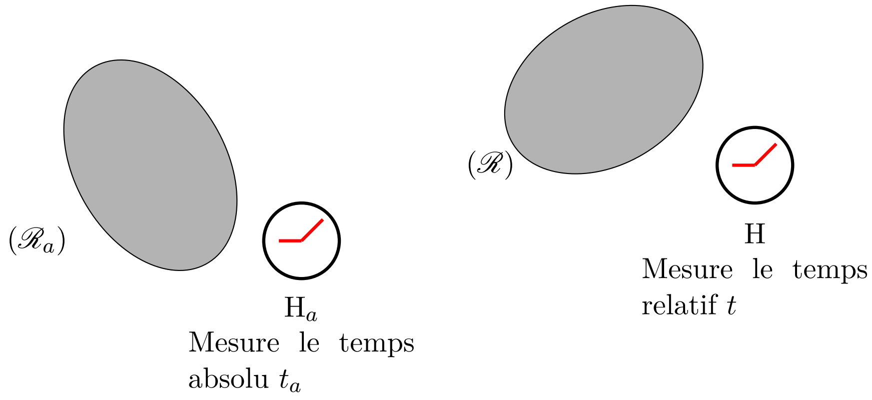

FIGURE 3 – Deux horloges H_a et H respectivement immobiles par rapport à $(\mathscr{R}_a)$ et $(\mathscr{R})$

À-t-on toujours $t_a = t$?

Postulat :

Les deux horloges mesurent le même temps, quel que soit le mouvement de $(\mathscr{R})$ par rapport à $(\mathscr{R}_a)$. On dit qu'en mécanique classique (celle de Newton), le temps est **universel**.

Remarque :

Ceci n'est pas vérifié expérimentalement. Les 2 horloges finissent immanquablement par indiquer des temps différents : $t_a \neq t$. Le temps ne s'écoule donc pas de la même façon dans les deux référentiels. Cependant, pour mesurer une différence notable, il faut que la vitesse de $(\mathscr{R})$ par rapport à $(\mathscr{R}_a)$ ne soit pas petite devant c, célérité de la lumière dans le vide.

Par la suite on supposera que le temps est universel et on le notera t.

4) Dérivation d'un vecteur dans un repère

Exemple introductif :

Considérons un point M mobile par rapport au référentiel absolu $(\mathscr{R}_a)$ et donc par rapport au repère absolu (R_a).

Ses 3 coordonnées caratésiennes $x_a(t)$, $y_a(t)$ et $z_a(t)$ dans (R_a) dépendent du temps.

Par définition :

$$\overrightarrow{O_aM}(t) = (\, x_a(t), y_a(t), z_a(t)\,)$$

et

$$\overrightarrow{O_aM}(t+\Delta t) = (\, x_a(t+\Delta t), y_a(t+\Delta t), z_a(t+\Delta t)\,)$$

Formons le taux d'accroissement du vecteur :

$$\frac{\overrightarrow{O_aM}(t+\Delta t) - \overrightarrow{O_aM}(t)}{\Delta t}$$
$$= \frac{(\, x_a(t+\Delta t), y_a(t+\Delta t), z_a(t+\Delta t)\,) - (\, x_a(t), y_a(t), z_a(t)\,)}{\Delta t}$$
$$= \left(\frac{x_a(t+\Delta t) - x_a(t)}{\Delta t}, \frac{y_a(t+\Delta t) - y_a(t)}{\Delta t}, \frac{z_a(t+\Delta t) - z_a(t)}{\Delta t} \right)$$

Prenons-en la limite lorsque $\Delta t \longrightarrow 0$. On obtient :

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{O_a M}(t+\Delta t) - \overrightarrow{O_a M}(t)}{\Delta t}$$
$$= \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{x_a(t+\Delta t) - x_a(t)}{\Delta t}, \lim_{\Delta t \to 0} \frac{y_a(t+\Delta t) - y_a(t)}{\Delta t}, \lim_{\Delta t \to 0} \frac{z_a(t+\Delta t) - z_a(t)}{\Delta t} \right)$$
$$= (\, \dot{x_a}(t), \dot{y_a}(t), \dot{z_a}(t) \,)$$

Par **définition**, le premier terme est la dérivée de $\overrightarrow{O_a M}$ dans le repère absolu (R_a) et on l'écrit :

$$\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{O_a M}}{\mathrm{d}t} \right)_{\mathrm{R}_a} = (\, \dot{x_a}(t), \dot{y_a}(t), \dot{z_a}(t) \,) = \dot{x_a}(t)\, \overrightarrow{e_x} + \dot{y_a}(t)\, \overrightarrow{e_y} + \dot{z_a}(t)\, \overrightarrow{e_z}$$

D'autre part et par définition, il s'agit du vecteur vitesse du point M dans le repère absolu (R_a), noté $\overrightarrow{v}_{M/\mathrm{R}_a}$. On a donc :

$$\boxed{\overrightarrow{v}_{M/\mathrm{R}_a} \overset{\text{déf}}{=} \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{O_a M}}{\mathrm{d}t} \right)_{\mathrm{R}_a} = \dot{x_a}(t)\, \overrightarrow{e_x} + \dot{y_a}(t)\, \overrightarrow{e_y} + \dot{z_a}(t)\, \overrightarrow{e_z}}$$

Plus généralement, si $\overrightarrow{b}$ est un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$, on peut l'écrire de façon unique dans la base $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ liée à (R_a) :

$$\overrightarrow{b} = b_x\, \overrightarrow{e_x} + b_y\, \overrightarrow{e_y} + b_z\, \overrightarrow{e_z}$$

On dira que $\overrightarrow{b}$ est un vecteur mobile dans le repère (R_a) si et seulement si :

$$\boxed{b_x = b_x(t) \;\;;\;\; b_y = b_y(t) \quad \text{et} \quad b_z = b_z(t)}$$

Ce sont donc des fonctions du temps définies en général sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On pose alors, **par définition** :

$$\boxed{\left(\frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{b}}{\mathrm{d}t} \right)_{\mathrm{R}_a} \overset{\text{déf}}{=} \dot{b_x}(t)\, \overrightarrow{e_x} + \dot{b_y}(t)\, \overrightarrow{e_y} + \dot{b_z}(t)\, \overrightarrow{e_z}}$$

Remarque :

On dit que le vecteur $\overrightarrow{b}$ est **fixe dans le repère absolu** (R_a) si et seulement si ses 3 coordonnées b_x, b_y et b_z dans la base $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ ne dépendent pas du temps. Dans ce cas on aura donc :

$$\overrightarrow{b} \text{ vecteur fixe dans } (\mathrm{R}_a) \iff \left(\frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{b}}{\mathrm{d}t} \right)_{\mathrm{R}_a} = 0$$