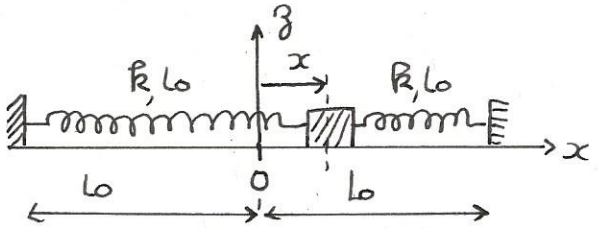
5. Oscillateur



1) Ressort de gauche : $\vec{F_g} = -k(l_0 + x - l_0)\vec{e_x}$
$= -kx\,\vec{e_x}$

Ressort de droite : $\vec{F_d} = k(l_0 - x - l_0)\vec{e_x}$
$= -kx\,\vec{e_x}$

d'où $\boxed{\vec{F} = \vec{F_g} + \vec{F_d} = -2kx\,\vec{e_x}}$

Nous allons noter $x_0 > 0$ l'écart initial de M plutôt que a

2) a) On va au contraire supposer l'immobilité du corps et étudier quand cela est possible :

BDF : $\vec{F} = -2kx_0\,\vec{e_x}$
$\vec{R} = R_T\,\vec{e_x} + R_N\,\vec{e_z}$
$\vec{P} = -mg\,\vec{e_z}$

PFD :

$$\begin{cases} /\vec{e_x} & -2kx_0 + R_T = 0 \\ /\vec{e_z} & R_N - mg = 0 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} R_T = 2kx_0 \\ R_N = mg \end{cases}$$

L'équilibre est possible si :

$$\left|\frac{R_T}{R_N}\right| < f \iff \boxed{\frac{2kx_0}{mg} < f}$$

Dans le cas où $\frac{2kx_0}{mg} \geq f$ le corps va commencer à glisser sur le support

b) Dans la suite on posera $\boxed{K = 2k}$ pour simplifier les expressions. On suppose donc que :

$$\frac{Kx_0}{mg} \geq f \iff x_0 \geq \frac{fmg}{K} \quad (1)$$

M va donc glisser pour $t > 0$ dans le sens $-\vec{e_x}$: $\vec{R_T}$ sera donc dans le sens $+\vec{e_x}$ et :

$$\vec{R_T} = +fmg\,\vec{e_x} \quad (R_N = mg)$$

PFD/$\vec{e_x}$:

$m\ddot{x} = -Kx + fmg$ donc

$$\boxed{\ddot{x} + \omega^2 x = fg} \quad \text{avec } \omega^2 = \frac{K}{m}$$

On a donc :

$$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) + \frac{fmg}{K}$$

$$x(0) = x_0 = A + \frac{fmg}{K}$$

$$\dot{x}(0) = 0 = \omega B \Rightarrow \underline{B = 0}$$

d'où :

$$\boxed{x(t) = \underbrace{\left(x_0 - \frac{fmg}{K}\right)}_{\geq 0 \text{ d'après (1)}}\cos(\omega t) + \frac{fmg}{K}}$$

M va s'immobiliser à l'instant $t_1 > 0$ tel que $\dot{x}(t_1) = 0$.

$$\dot{x}(t_1) = -\omega\left(x_0 - \frac{fmg}{K}\right)\sin(\omega t_1) = 0$$

La plus petite valeur strictement positive de t_1 qui convient vérifie :

$$\boxed{\omega t_1 = \pi \iff t_1 = \pi/\omega_1}$$

et donc :

$$\boxed{x_1 = x(t_1) = \frac{2fmg}{K} - x_0}$$

L'énoncé nous indique $x_1 < 0$ ce qui suppose que :

$x_0 > \frac{2fmg}{K}$ ce qui est compatible avec (1)

3) a) Regardons si le corps peut rester immobile en x_1

BDF : $\vec{F} = -Kx_1\,\vec{e_x}$
$\vec{R} = R_T\,\vec{e_x} + R_N\,\vec{e_z}$
$\vec{P} = -mg\,\vec{e_z}$

PFD

$$\begin{cases} /\vec{e_x} & -Kx_1 + R_T = 0 \\ /\vec{e_z} & R_N - mg = 0 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} R_T = Kx_1 \\ R_N = mg \end{cases}$$

L'équilibre est possible ssi

$$\left|\frac{R_T}{R_N}\right| < f \iff \frac{K|x_1|}{mg} < f$$

Au contraire, si $|x_1| \geq \frac{fmg}{K}$ le corps va se remettre en mouvement.

b) Le glissement va se produire dans le sens $+\vec{e_x}$ donc $\vec{R_T}$ sera dans le sens $-\vec{e_x}$ et :

$$\vec{R_T} = -fmg\,\vec{e_x}$$

PFD/$\vec{e_x}$: $m\ddot{x} = -Kx - fmg$

donc $\boxed{\ddot{x} + \omega^2 x = -fg}$ avec $\omega^2 = K/m$