DM n°4 : pour le vendredi 21 octobre 2022

# 1 Décomposition du monoxyde d'azote

**Donnée :** constante des gaz parfaits : $R = 8{,}31$ J.K$^{-1}$.mol$^{-1}$

La décomposition à $\theta = 1151$ °C du monoxyde d'azote a lieu suivant la réaction d'équation :

$$2\ NO_{(g)} \longrightarrow N_{2(g)} + O_{2(g)}$$

avec une constante de vitesse $k$. À volume V constant, on a déterminé la vitesse initiale $v_0$ de cette réaction pour plusieurs valeurs de la pression partielle initial $p_0$ en $NO_{(g)}$. Les résultats sont groupés dans le tableau ci-dessous. On indique que $10^5$ Pa = 760 mmHg :

| $p_0$ (mmHg) | 100 | 150 | 200 | 300 | 400 |
|---|---|---|---|---|---|
| $v_0$ (mol.L$^{-1}$.min$^{-1}$) | 1,4 | 3,0 | 5,5 | 12,5 | 22,5 |

1. Donner la relation entre $p_0$ et la concentration initiale $C_0$ en monoxyde d'azote.
2. Déterminer l'ordre de la réaction en vous basant sur les valeurs de $v_0$.
3. Déterminer la valeur numérique de la constante de vitesse $k$ pour la température $\theta = 1151$ °C.

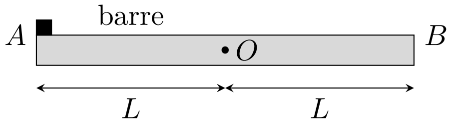
   Plusieurs mesures de $k$ à différentes températures ont donné les résultats du tableau ci-dessous :

| $\theta$ (°C) | 974 | 1057 | 1260 |
|---|---|---|---|
| $k$ (L.mol$^{-1}$.min$^{-1}$) | $1{,}23\times10^{-4}$ | $5{,}22\times10^{-4}$ | $1{,}26\times10^{-3}$ |

4. Écrire l'équation différentielle donnant l'évolution de la concentration $[NO](t)$. En déduire l'expression de la pression partielle $p(t)$ en NO en fonction de $k$, $p_0$, $R$ (constante des gaz parfaits), $T$ (température en K) et du temps $t$.
5. Calculer le temps de demi-réaction $\tau_{1/2}$. Application numérique à $\theta = 1057$ °C.
6. Donner l'expression de la loi d'Arrhénius et en déduire l'énergie d'activation $E_a$ de cette réaction.

# 2 Glissement d'un objet sur une barre en mouvement

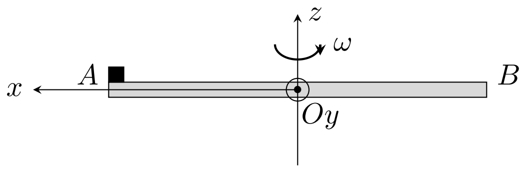
Soit une barre homogène $AB$, de section carrée, de masse $M = 2{,}0$ kg, de longueur $2L = 1{,}0$ m, de moment d'inertie $J = ML^2/3$ par rapport à tout axe $\Delta$ passant par son centre $O$ et orthogonal à la barre. Dans tout le problème, on négligera la longueur de l'arête du carré de la section de la barre devant $L$.




On pose sur cette barre, à son extrémité $A$, un petit palet (en forme de parallélépipède) de masse $m = 10$ g, que l'on supposera ponctuel. Le contact entre le palet et la barre est caractérisé par un coefficient de frottement statique $f_s = 0{,}2$. On désire étudier les conditions dans lesquelles la masse $m$ reste posée sur la barre pour divers mouvements de cette barre.

Dans tout le problème on prendra $g = 9{,}81$ m.s$^{-2}$ avec $\overrightarrow{g}$ uniforme et vertical descendant. Le référentiel terrestre ($\mathscr{R}_T$) sera considéré comme étant galiléen.

**I. L'axe de rotation de la barre est vertical**



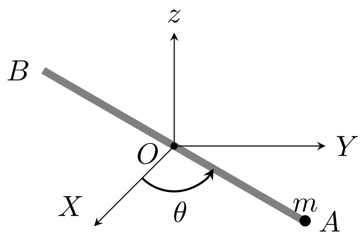

La barre est munie d'un repère d'espace $(Oxyz)$ auquel on associe la base cartésienne $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$.

**1)** Un moteur impose à la barre un mouvement de rotation uniforme autour de $(Oz)$ à la vitesse angulaire $\omega$. Montrer qu'il existe une valeur critique $\omega_m$ telle que si $\omega < \omega_m$, la palet reste posé sans glisser sur la barre.

**2)** Le moteur est retiré. Le référentiel terrestre étant muni du repère d'espace $(OXYz)$, la barre est astreinte à tourner dans le plan $(OXY)$. Un ressort spirale de raideur $C = 0{,}2$ N.m.rad$^{-1}$, dont une extrémité est fixe, l'autre étant liée à la barre, exerce sur cette dernière un couple dont le moment s'écrit :

$$\overrightarrow{M_O} = -C\,\theta\,\overrightarrow{e_z}$$

où $\theta$ est l'angle entre $OX$ et $AB$.




On écarte la barre d'un angle $\theta_0 > 0$ par rapport à sa position d'équilibre et on la lâche sans vitesse initiale. La liaison pivot en $O$ est supposée parfaite.

a) En appliquant le théorème du moment cinétique au système { barre + palet }, exprimer $\theta(t)$ lorsque $m$ reste sans glisser sur la barre. On posera :

$$\Omega = \sqrt{\frac{3C}{(M+3m)L^2}}$$

b) En appliquant le principe fondamental de la dynamique au palet de masse $m$ dans le référentiel de la tige [1], calculer les réactions normale $\overrightarrow{N}$ et tangentielle $\overrightarrow{T}$ exercées par la barre sur $m$, exprimées dans la base $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$, en fonction de paramètres à prendre parmi $m$, $L$, $\theta_0$, $\Omega$, $g$ et $t$.

1. On remarquera que la rotation de la tige n'est pas uniforme

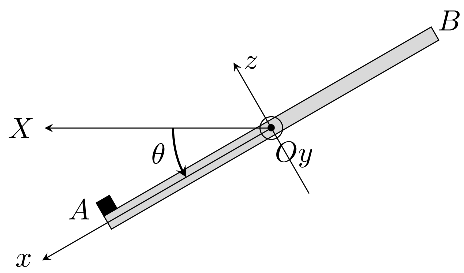
c) On pose $y = \sin^2(\Omega t)$. Étudier $\|\overrightarrow{T}\|$ en fonction de $y$. En déduire que la masse $m$ reste posée sans glisser sur la barre si :

$$\theta_0 < \begin{cases} \dfrac{f_s g}{L\Omega^2} & \text{lorsque} \quad \dfrac{f_s g}{L\Omega^2} < 1 \\[2ex] \sqrt{\dfrac{f_s g}{L\Omega^2}} & \text{lorsque} \quad \dfrac{f_s g}{L\Omega^2} > 1 \end{cases}$$

En déduire la valeur limite de $\theta_0$ au-delà de laquelle $m$ quitte la barre avec les valeurs numériques de l'énoncé.

**II. L'axe de rotation de la barre est horizontal**

La barre est maintenant en rotation autour de l'axe horizontal $Oy$ fixe dans le référentiel terrestre (la liaison pivot sera encore supposée parfaite), la rotation étant repérée par l'angle $\theta$ entre $OX$ et $AB$, $OX$ étant un axe fixe dans $(\mathscr{R}_T)$.




Un ressort spirale de raideur $C$ est à nouveau attaché à la barre (son autre extrémité étant fixe), exerçant une action dont le moment peut d'écrire :

$$\overrightarrow{M_O} = -C\theta\,\overrightarrow{e_y}$$

**1)** a) Déterminer l'équation liant $\theta_{eq}$, position d'équilibre du système {barre + palet} et les données du problème en supposant que la masse $m$ ne glisse pas.

b) En appliquant le principe fondamental de la dynamique au palet seul déterminer les réactions tangentielle $\overrightarrow{T}$ et normale $\overrightarrow{N}$ de la barre sur $m$, pour cette position d'équilibre.

c) Un ressort spiral de constante $C = 0{,}2$ N.m.rad$^{-1}$ est-il suffisant pour maintenir $m$ sur la barre ?

**2)** **Résolution de problème** : on supprime le ressort et on lâche la barre depuis $\theta = 0$ sans vitesse initiale. Quelle est la valeur $\theta_m$ de $\theta$ pour laquelle la masse $m$ commence à glisser sur la barre ?

# 3 Enroulement d'un fil

Un cylindre de révolution de rayon $R$, repose sur un support plan horizontal qui est fixe par rapport au référentiel terrestre $(\mathscr{R}_T)$ supposé galiléen. On attache à la base du cylindre une extrémité d'un fil parfaitement flexible, infiniment mince et de masse négligeable, et on l'enroule plusieurs fois dans le sens trigonométrique autour de cette base.

L'autre extrémité du fil est fixée à un petit objet $M$, supposé ponctuel et de masse $m$, posé sur le support horizontal. On suppose que le contact entre l'objet $M$ et le support se fait sans frottements.

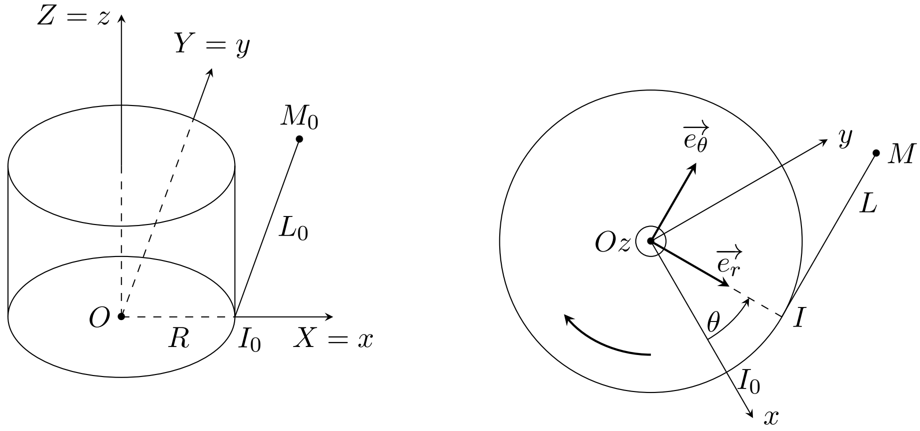
Données :

$$R = 20 \text{ cm}\,;\; m = 40 \text{ g}\,;\; L_0 = 50 \text{ cm}$$

Grâce à un moteur le cylindre est animé d'un mouvement de rotation autour de son axe vertical $Oz$ fixe dans $(\mathscr{R}_T)$. Ce mouvement de rotation se fait dans le sens horaire, à la vitesse angulaire $\Omega$ constante.

- Le référentiel terrestre $(\mathscr{R}_T)$ est muni du repère d'espace $(OXYZ)$.
- Le référentiel du cylindre $(\mathscr{C})$ est muni du repère d'espace $(Oxzy)$ tel que $OZ = Oz$ et qu'à l'instant $t = 0$, $OX = Ox$ et $OY = Oy$.

À l'instant initial $t = 0$, la particule possède une vitesse nulle *par rapport au référentiel terrestre* et $I_0M_0$ est parallèle à l'axe $OY = Oy$.




Vue en perspective (instant $t = 0$) Vue du dessus (instant $t$)

On admet que le fil reste tendu au cours du mouvement ; le point matériel glisse sur le plan horizontal et on note $L$ la longueur $IM$ de fil non enroulé à l'instant $t$. À l'instant $t$, on appelle $\theta$ l'angle dont s'est enroulé le fil (voir figure ci-dessus).

L'étude sera menée dans le référentiel du cylindre $(\mathscr{C})$, muni du repère d'espace $(Oxyz)$ auquel on associe la base cartésienne $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ orthonormale directe. On introduit aussi les deux vecteurs de la base polaire $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta})$.

**1)** Le fil étant inextensible, donner la relation entre $L$, $L_0$, $R$ et $\theta$.

**2)** Exprimer les composantes de $\overrightarrow{OM}$ suivant les vecteurs unitaires $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta})$ en fonction de $L_0$, $R$ et $\theta$. En déduire que le vecteur vitesse $\overrightarrow{v}_{M/\mathscr{C}}$ peut se mettre sous la forme $\overrightarrow{v} = v(t)\,\overrightarrow{e_r}$ et donner l'expression de $v(t)$.

**3)** Écrire le principe fondamental de la dynamique pour le point $M$ dans le référentiel du cylindre.

**4)** En projetant cette relation sur $\overrightarrow{e_r}$ en déduire l'équation différentielle vérifiée par $\theta$. Montrer que la dérivée par rapport au temps de $L\,\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ est une constante.

**5)** a) Exprimer $\theta$ en fonction de $t$, $R$, $L_0$ et $\Omega$.

b) Calculer l'instant $t_1$ pour lequel le fil s'est enroulé d'un tour. On donne $\Omega = 1{,}2$ rad.s$^{-1}$.

**6)** Établir la relation donnant la tension $T$ du fil en fonction de $t$, $R$, $L_0$ et $\Omega$.