

DM n°6

Pour le vendredi 18 novembre 2022

I. Exercice

On considère, dans le vide, le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ créé au point M par une répartition de charges à symétrie sphérique de centre O . On pose $\vec{OM} = r \vec{e}_r$. Ce champ est radial et ne dépend que de r : $\vec{E}(M) = E(r) \vec{e}_r$, avec :

$$E(r) = \begin{cases} \frac{k}{2\varepsilon_0} & \text{pour } r \in [0, R] \\ \frac{kR^2}{\varepsilon_0 r^2} & \text{pour } r \in [R, +\infty[\end{cases}$$

k et R étant des constantes positives.

On donne :

$$\operatorname{div} (E(r) \vec{u}_r) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E(r))$$

1. On pose, par convention, $\lim_{r \rightarrow +\infty} V(r) = 0$. Déterminer le potentiel $V(r)$ de cette distribution de charges, pour $r \in [R, +\infty[$ et pour $r \in [0, R]$.
2. Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction $V(r)$.
3. Déterminer la charge volumique $\rho(r)$ de cette distribution de charges, pour les valeurs $r \in [0, R]$ et $r \in [R, +\infty[$. Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction $\rho(r)$.
4. Déterminer en fonction de k et de R , la charge totale q_0 de cette répartition de charges à symétrie sphérique.
5. Montrer que pour $r > R$, cette distribution volumique crée le même champ électrostatique qu'une charge électrique ponctuelle q_0 placée au point O .

II. Matériau semi-conducteur

Aucune connaissance sur les matériaux semi-conducteurs n'est requise pour traiter ce problème. Les deux parties A. et B. sont indépendantes.

$k_B = 1,38.10^{23} \text{ J.K}^{-1}$ représente la constante de Boltzmann, $N_A = 6,02.10^{23} \text{ mol}^{-1}$ représente la constante d'Avogadro et $e = 1,60.10^{-19} \text{ C}$ représente la charge élémentaire.

A. Conductivité d'un matériau semi-conducteur

On considère un matériau conducteur dans lequel les électrons libres sont uniformément répartis dans le volume du matériau. On note n_e le nombre par unité de volume de ces électrons. Les interactions entre les électrons sont négligées et celles entre les électrons et les ions du réseau cristallin sont modélisées par une force de type frottement visqueux subie par chaque électron de masse m selon la relation vectorielle $\vec{f} = -\frac{m}{\tau} \vec{v}$, où τ est une constante propre au matériau et où \vec{v} est la vitesse d'un électron dans le référentiel lié au matériau conducteur (supposé galiléen). Un champ électrique \vec{E} uniforme et permanent est appliqué dans le matériau. On négligera le poids de l'électron devant les autres forces.

1. Quelle est l'unité de τ dans le Système International? Justifier.
2. En appliquant le principe fondamental de la dynamique à un électron dans le référentiel lié au matériau, montrer que sa vitesse tend vers une valeur constante que l'on précisera en fonction de \vec{E} , m , τ et de la charge élémentaire e .
Comme τ est de l'ordre de 10^{-12} s , le régime transitoire est très court. On suppose donc que la vitesse limite est atteinte quasiment instantanément.
3. En déduire l'expression du vecteur densité de courant électrique \vec{j} en fonction de e , m , τ , n_e et \vec{E} . Donner alors l'expression de

la conductivité électrique γ du matériau, définie par $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ en fonction des paramètres précédents.

4. Dans le cas du cuivre, chaque atome libère un seul électron qui participera à la conduction électrique. La masse molaire du cuivre est $M_{\text{Cu}} = 63,5 \text{ g.mol}^{-1}$, la densité du cuivre par rapport à l'eau est $d = 8,9$ et la masse volumique de l'eau est $\mu_{\text{eau}} = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$.

Donner l'expression littérale du nombre d'électrons de conduction par unité de volume n_e en fonction de d , M_{Cu} , μ_{eau} et de la constante d'Avogadro N_A . Faire l'application numérique.

Comparer avec la densité électronique du silicium, semi-conducteur très répandu, qui est de l'ordre de 10^{19} cm^{-3} à température ambiante.

5. Un dispositif permet de faire varier la température du silicium. On mesure la conductivité γ du silicium entre 4,2 K (température de liquéfaction de l'hélium) et 12 K. Le tableau de mesures suivant a été relevé :

T (K)	4,2	4,6	5,0	5,4	6,2
γ (S.m ⁻¹)	$1,7 \cdot 10^{-6}$	$1,7 \cdot 10^{-5}$	$1,1 \cdot 10^{-4}$	$5,7 \cdot 10^{-4}$	$8,0 \cdot 10^{-3}$

T (K)	7,0	8,0	10,0	12,0
γ (S.m ⁻¹)	$6,1 \cdot 10^{-2}$	0,43	6,7	42

Montrer à l'aide d'une représentation graphique ou d'une régression linéaire, que la conductivité suit une loi du type :

$$\gamma(T) = A \exp\left(-\frac{B}{T}\right)$$

où A et B sont deux constantes. Calculer les valeurs numériques de A et B .

6. Évaluer la conductivité du silicium à 300 K. La comparer à celle du cuivre qui est de l'ordre de $\gamma_{\text{Cu}} = 10^8 \text{ S.m}^{-1}$.
7. Montrer que la densité électronique n_e des électrons de conduction dans le silicium suit une loi dite de Boltzmann, c'est-à-dire que $n_e = K \exp\left(-\frac{E_s}{k_B T}\right)$ où K est une constante et où k_B est la constante de Boltzmann. On donnera la valeur numérique de la grandeur E_s en électron-volt.

B. Étude électrostatique d'une jonction NP à l'équilibre

Considérons un matériau semi-conducteur formé de silicium. Lorsque celui-ci est pur, il n'est formé que d'atomes de silicium. Si on remplace une petite proportion de ces atomes par un autre type d'atomes et ce de manière uniforme dans tout le volume du matériau, on parle de **dopage**.

En pratique, on utilise deux types de dopages :

- Un dopage au phosphore (symbole P) : ces atomes perdent facilement un électron de valence et se transforment en cations P^+ . On parle de dopage P (pour positif).
- Un dopage au bore (symbole B) : ces atomes captent facilement un électron de valence pour se transformer en anions B^- . On parle de dopage N (pour négatif).

Considérons deux cristaux de silicium, le premier dopé N (situé en $x < 0$) et le second dopé P (situé en $x > 0$), accolés l'un à l'autre dans le plan $x = 0$: il s'agit d'une jonction NP (voir figure 1).

Au voisinage de la jonction, dans une région dite "zone de charge d'espace", le cristal acquiert une distribution de charge électrique non nulle que l'on se propose d'étudier. Les propriétés qui en

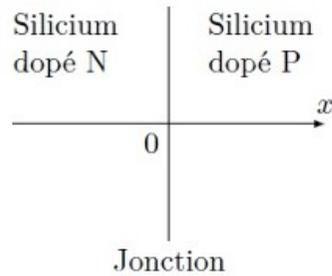


FIGURE 1 – Jonction NP

résultent sont à la base de la caractéristique des diodes, des transistors et de tous les circuits intégrés. Dans toute cette partie, les charges électriques sont immobiles dans le référentiel du matériau semi-conducteur.

8. On supposera que dans le silicium on peut appliquer les lois de l'électrostatique à condition de remplacer ε_0 par $\varepsilon_0\varepsilon_r$ où ε_r est la permittivité relative du silicium. On suppose que la densité volumique de charge ρ autour de la jonction située dans le plan $x = 0$ a l'allure suivante (Figure 2) :

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -L_1 \\ \rho_1 & \text{si } -L_1 \leq x \leq 0 \text{ avec } \rho_1 < 0 \\ \rho_2 & \text{si } 0 \leq x \leq L_2 \text{ avec } \rho_1 > 0 \\ 0 & \text{si } x > L_2 \end{cases}$$

La jonction est suffisamment large pour supposer que la distribution de charge est totalement invariante par toute translation parallèlement au plan (yOz) .

Sachant que la distribution de charges est globalement neutre, établir la relation vérifiée par L_1 , L_2 , ρ_1 et ρ_2 .

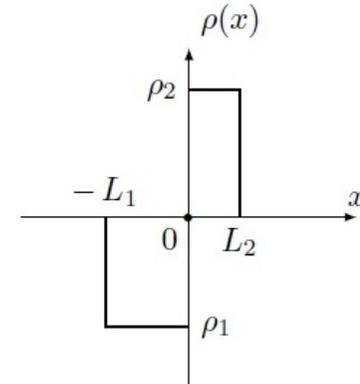


FIGURE 2 – Profil de densité volumique de charge dans la jonction NP

On admettra que, en dehors de la zone de charge d'espace, le champ électrique est nul en tout point d'abscisse x telle que $x < -L_1$ et $x > L_2$.

9. Rappeler l'équation de Maxwell-Gauss où l'on remplacera ε_0 par $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$.

Déterminer alors le champ électrique en tout point M appartenant à la zone de charge d'espace $(-L_1 \leq x \leq L_2)$. On distinguera entre les diverses régions de l'espace suivant les valeurs de x . Représenter graphiquement l'allure de la composante selon \vec{u}_x du champ électrique en fonction de x .

10. En déduire l'expression du potentiel électrostatique $V(x)$ dans les différentes régions de l'espace. On choisira l'origine des potentiels dans le plan $x = 0$. Représenter graphiquement $V(x)$ en fonction de x .
11. Donner l'expression de la différence de potentiel $U_0 = V(L_2) - V(-L_1)$ entre deux points situés de part et d'autre de la zone de

charge d'espace en fonction de ρ_1 , L_1 , L_2 et de ε .

La région ($x > 0$) a été dopée avec du phosphore à raison de N_2 atomes P par m^3 , tandis que la région ($x < 0$) a été dopée avec du bore avec un nombre N_1 d'atomes B par unité de volume. Dans la zone de charge d'espace, chaque atome P est ionisé en P^+ . Les électrons qui ont été ainsi libérés ont traversé spontanément le plan $x = 0$, et chaque atome B situé dans la zone de charge d'espace a capté un électron se transformant ainsi en ion B^- .

12. En déduire ρ_1 et ρ_2 en fonction de e (charge électrique élémentaire), N_1 et N_2 . En pratique $N_1 \gg N_2$. Comparer L_1 et L_2 et en déduire l'expression de la largeur totale de la zone de charge d'espace, que l'on appellera δ , en fonction de L_2 .
13. En déduire une expression approchée de la largeur δ de la zone de charge d'espace en fonction de ε , U_0 , e et L_2 .

On donne : $U_0 = 0,30 \text{ V}$; $\varepsilon = 1,4 \cdot 10^{-10} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$ et $N_2 = 1,6 \cdot 10^{21} \text{ m}^{-3}$. Calculer la valeur numérique de δ .