Corrigé TD n°8 Champ et potentiel électrostatique

14 Plasma

On donne en coordonnées sphériques : $\Delta\, a(r) = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\dfrac{\mathrm{d}a(r)}{\mathrm{d}r}\right)$

On étudie un milieu électriquement neutre, constitué de cations portant une charge électrique e et d'électrons libres de charge $-e$, porté à une température T (plasma ; en général T est de l'ordre de plusieurs milliers de K). On place une petite boule (supposée ponctuelle) de charge électrique q dans ce plasma, en un point O considéré comme l'origine des coordonnées. Celle-ci modifie la répartition des ions et des électrons. Les densités particulaires (nombre de particules par unité de volume) à la distance r de O sont alors données par :

$$n_{\text{ions}} = n_0 \exp\left(-\frac{eV(r)}{k_BT}\right) \quad \text{et} \quad n_{\text{e}} = n_0 \exp\left(+\frac{eV(r)}{k_BT}\right)$$

où n_0 est une constante. Les expressions précédentes constituent la loi de Boltzmann, k_B étant la constante de Boltzmann et T la température du plasma. $V(r)$ est le potentiel électrique qui existe à la distance r de O (avec la convention $V = 0$ à l'infini).

1) On a :

$$\rho(r) = e\,n_{\text{ions}} - e\,n_e = en_0\left\{\exp\left(-\frac{eV(r)}{k_BT}\right) - \exp\left(+\frac{eV(r)}{k_BT}\right)\right\}$$
$$= -e\,n_0\,\mathrm{sh}\left(\frac{eV(r)}{k_BT}\right)$$

Comme $eV(r) \ll k_BT$ on peut en donner une expression approchée (équivalent) sachant que $\mathrm{sh}(x) \underset{0}{\sim} x$:

$$\boxed{\rho(r) \approx -\frac{e^2n_0}{k_BT}\,V(r)}$$

2) On utilise l'équation de Poisson. V étant à symétrie sphérique, le laplacien s'exprime simplement :

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}V(r)}{\mathrm{d}r}\right) = \frac{e^2n_0}{\varepsilon_0k_BT}\,V(r)}$$

3) On a $V(r) = \dfrac{F(r)}{r}$ et donc :

$$V'(r) = \frac{r\,F'(r) - F(r)}{r^2} \quad ; \quad r^2\,V'(r) = r\,F'(r) - F(r)$$

et donc :

$$\frac{\mathrm{d}(r^2V')}{\mathrm{d}r} = F'(r) + r\,F"(r) - F'(r) = r\,F"(r)$$

On obtient alors l'équation différentielle :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}r^2} - \frac{e^2n_0}{\varepsilon_0k_BT}\,F = 0}$$

En remarquant (directement sur l'équation différentielle) que $\frac{e^2n_0}{\varepsilon_0k_BT}$ est homogène à l'inverse du carré d'une longueur qu'on appellera L_D, on peut écrire :

$$\frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}r^2} - \frac{1}{L_D^2}\,F = 0$$

L'équation caractéristique est $x^2 - 1/L_D^2 = 0$ et elle admet deux racine réelles $x_\pm = \pm\frac{1}{L_D}$. La solution est donc :

$$F(r) = A\,\exp\left(-\frac{r}{L_D}\right) + B\,\exp\left(\frac{r}{L_D}\right)$$

et donc :

$$V(r) = A\,\frac{\exp\left(-\frac{r}{L_D}\right)}{r} + B\,\frac{\exp\left(\frac{r}{L_D}\right)}{r}$$

4) Tout d'abord le potentiel doit tendre vers 0 lorsque $r \longrightarrow \infty$, ce qui implique $B = 0$. Ensuite lorsque $r \longrightarrow 0$ on se rapproche de la charge pontuelle q et le potentiel tend vers l'expression du potentiel créé par cette charge ponctuelle :

$$V(r) \underset{0}{\sim} \frac{A}{r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \, r} \quad \text{d'où} \quad A = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}$$

Finalement :

$$\boxed{V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \, r} \, \exp\left(-\frac{r}{L_D}\right)}$$