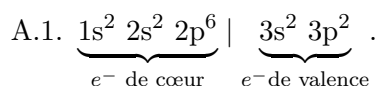


**Correction - DS n°3bis - (Centrale-Mines) : Chimie - Électromagnétisme**

# 1 Chimie

## Partie 1 : ATOMISTIQUE et CRISTALLOGRAPHIE

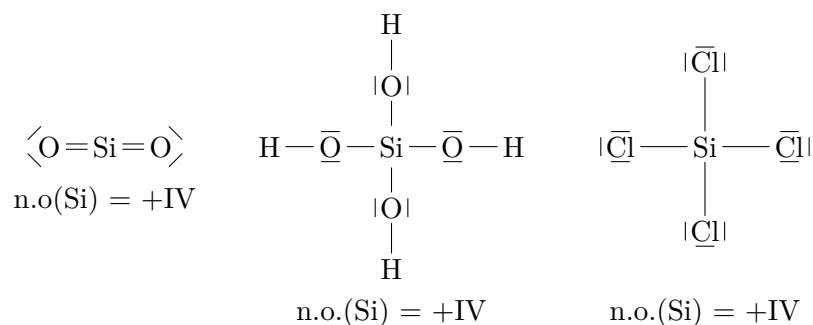
### A. Structure du silicium



Rappelons que les électrons de cœur sont ceux qui ne sont pas des électrons de valence.

A.2. La valeur maximale du nombre quantique principal est  $n = 3$  : 3<sup>ème</sup> période; Il y a 4 électrons de valence, donc :  $10 + 4 = 14^{\text{ème}}$  colonne du tableau périodique. Le carbone C a aussi 4 électrons de valence. C est plus électronégatif car il est situé au dessus de Si (dans la 2<sup>ème</sup> période). On sait que l'électro-négativité augmente de bas en haut et de la gauche vers la droite du tableau.

A.3. Le silicium est tétravalent, ce qui conduit aux composés suivants :



Aucun élément ne possède de charge formelle. La première formule de Lewis est d'ailleurs obtenue en utilisant deux liaisons doubles, ce qui annule les charges formelles aussi bien sur l'oxygène que sur le silicium : le composé en est d'autant plus stable.

Pour calculer le nombre d'oxydation de Si, rappelons qu'on attribue tous les électrons de liaison à l'élément le plus électronégatif, c'est à dire O ou Cl ici. Dans les trois composés, Si a perdu tous ses électrons de valence (= 4), d'où : n.o.(Si) = +IV.

### B. Cristallographie du silicium et du nitrure de silicium

B.1. Les sites T sont aux centres des 8 petits cubes d'arête  $a/2$ . Les sites O sont aux milieux de chaque arête et au centre du cube. Il y a donc

$$\text{Site T : } N_T = 8 \text{ et sites O : } N_O = 1 + 12/4 = 4$$

B.2. La population de Si sera :  $N(\text{Si}) = \underbrace{8/8}_{\text{sommets}} + \underbrace{6/2}_{\text{faces}} + \underbrace{4}_{\text{sites T}} = 8$  atomes par maille cubique.

Un atome de Silicium aura une coordinence de 4 (c'est à dire 4 plus proches voisins) qui correspond à celle d'un atome dans un site T.

B.3. Les atomes sont en contact sur la grande diagonale d'un cube de coté  $a/2$  (on le voit à partir d'un site T) :

$$2r(\text{Si}) = \sqrt{3} \times \frac{a}{2} \times \frac{1}{2} \implies r(\text{Si}) = \frac{\sqrt{3}a}{8}$$

B.4.

$$\rho = \frac{\text{masse des atomes}}{\text{volume de la maille}} = \frac{8 M(\text{Si})}{N_A a^3} = \frac{3\sqrt{3} M(\text{Si})}{8^2 N_A r(\text{Si})^3}$$

et donc :

$$r(\text{Si}) = \left( \frac{3\sqrt{3} M(\text{Si})}{8^2 N_A \rho} \right)^{1/3} \approx 118 \text{ pm}$$

B.5.

$$C = \frac{\text{volume des atomes}}{\text{volume de la maille}} = \frac{8 \times \frac{4}{3} \pi r(\text{Si})^3}{a^3} = \frac{8 \times 4\pi \times 3\sqrt{3}}{3 \times 8^3}$$

et donc

$$C = \frac{\sqrt{3}\pi}{16} = 0,34$$

C'est une valeur bien inférieure à la compacité maximale que l'on peut obtenir avec une structure cfc (0,74).

B.6. Le silicium est matériau très dur car les atomes de Si sont liés par des liaisons covalentes.

B.7. On parle de *variétés allotropiques*.

B.8. Nombre de  $\text{Si}^{4+}$  par maille cubique :  $\underbrace{\frac{8}{8}}_{\text{sites T}} + \underbrace{\frac{1 + 12/4}{2}}_{\text{sites O}} = 3.$

Nombre de  $\text{N}^{3-}$  par maille : 4 (structure cfc)La stœchiométrie  $\text{Si}_3\text{N}_4$  est donc respectée.

B.9. Soit  $r_T$  le rayon du plus grand cation que l'on peut insérer dans un site T (= habitabilité du site). Ce cation est alors en contact avec un  $\text{N}^{3-}$  le long de la grande diagonale d'un cube d'arête  $a/2$ , d'où :

$$r_T + r(\text{N}^{3-}) = \sqrt{3} \times \frac{a}{2} \times \frac{1}{2} \iff a = \frac{4}{\sqrt{3}} (r(\text{N}^{3-}) + r_T)$$

D'autre part, si les anions sont en contact le long de la diagonale d'une face du grand cube :

$$4r(\text{N}^{3-}) = \sqrt{2} a \iff a = \frac{4r(\text{N}^{3-})}{\sqrt{2}}$$

d'où :

$$r_T = \left( \sqrt{\frac{3}{2}} - 1 \right) r(\text{N}^{3-}) = 31,4 \text{ pm}$$

Ceci est cohérent avec les atomes de Si qui sont dans les sites T (coordination 4) :  $r(\text{Si}) = 27 \text{ pm} < r_T$ .

B.10. Il s'agit d'une liaison ionique : liaison forte car la différence d'électro-négativité est importante. Ce solide doit posséder une température de fusion élevée (une recherche sur internet fournit  $1900^\circ \text{C}$ ).

## Partie 2 : CINÉTIQUE CHIMIQUE

1.

$$v = -\frac{d[\text{RBr}]}{dt} = -\frac{d[\text{I}^-]}{dt} = \frac{d[\text{RI}]}{dt} = \frac{d[\text{Br}^-]}{dt}$$

Si, de plus, la réaction admet un ordre par rapport à chaque réactif, on peut écrire :

$$v = k[\text{RBr}]^\alpha [\text{I}^-]^\beta$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont les ordres partiels par rapport à RBr et à  $\text{I}^-$ .

2. a)  $\frac{[\text{RBr}]_0}{[\text{I}^-]_0} = 21$ . RBr étant en large excès par rapport à  $\text{I}^-$ , on peut supposer que sa concentration ne va pas beaucoup varier au cours de la transformation chimique. Il y a donc dégénérescence de l'ordre par rapport à RBr.

$$[\text{RBr}] \approx [\text{RBr}]_0 \implies v \approx \underbrace{k([\text{RBr}]_0)^\alpha}_{\text{constante}} [\text{I}^-]^\beta = k_{app} [\text{I}^-]^\beta$$

où  $k_{app}$  est la constante de vitesse apparente :

$$k_{app} = k([\text{RBr}]_0)^\alpha$$

- b) Dans le cas où  $\beta = 1$  :

$$-\frac{d[\text{I}^-]}{dt} = k_{app}[\text{I}^-] \implies [\text{I}^-] = [\text{I}^-]_0 \exp(-k_{app}t) \quad \text{donc} \quad \ln[\text{I}^-] = \ln[\text{I}^-]_0 - k_{app}t$$

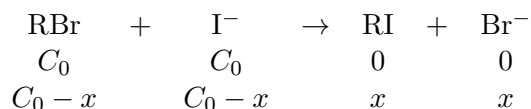
Une régression linéaire sur les couples  $(t, \ln[\text{I}^-])$  conduit à un coefficient de corrélation :  $|r| = 0,99999891$  ce qui confirme l'hypothèse  $\beta = 1$ .

- c) Le calcul de régression linéaire précédent donne la pente de la droite  $\ln[\text{I}^-] = f(t)$  qui vaut  $-k_{app}$ . On en déduit que :

$$k_{app} = 0,266 \text{ h}^{-1} = 7,39 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$$

3. Dans cette partie les concentrations initiales sont égales et nous poserons :  $[\text{RBr}]_0 = [\text{I}^-]_0 = C_0$ .

- a) Un tableau d'avancement donne (en concentration) :



où  $x$  est l'avancement volumique.

D'autre part :

$$\tau = \frac{n_{\text{RBr}}(0) - n_{\text{RBr}}(t)}{n_{\text{RBr}}(0)} \implies n_{\text{RBr}}(t) = n_{\text{RBr}}(0) (1 - \tau)$$

En divisant par le volume  $V$  de la solution, nous obtenons :

$$[\text{RBr}] = [\text{I}^-] = C_0 (1 - \tau) \quad (1)$$

- b) La vitesse  $v$  de la réaction s'écrit désormais :

$$v = k [\text{RBr}]^\alpha [\text{I}^-] = k [\text{RBr}]^{1+\alpha} = -\frac{d[\text{RBr}]}{dt}$$

ce qui conduit à une équation différentielle à variables séparables dont la solution s'écrit :

$$\int_{C_0}^{[\text{RBr}]} \frac{d[\text{RBr}]}{[\text{RBr}]^{1+\alpha}} = - \int_0^t k dt = -kt$$

Si  $\alpha \neq 0$ , cela conduit à :

$$\boxed{-\frac{1}{\alpha} \left[ \frac{1}{[\text{RBr}]^\alpha} \right]_{C_0}^{[\text{RBr}]} = -kt \quad \text{donc} \quad \frac{1}{[\text{RBr}]^\alpha} = \frac{1}{C_0^\alpha} + \alpha kt}$$

et si  $\alpha = 0$ , cela donne :

$$\boxed{\ln[\text{RBr}] = \ln C_0 - kt}$$

La relation (1) permet de construire le tableau ci-dessous :

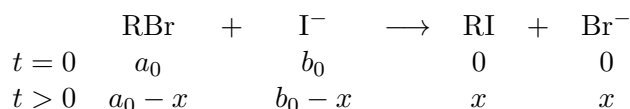
t (en h)	0	0,5	1	2	4	8	12
[RBr] (mol.L <sup>-1</sup> )	4,20.10 <sup>-3</sup>	3,72.10 <sup>-3</sup>	3,34.10 <sup>-3</sup>	2,77.10 <sup>-3</sup>	2,07.10 <sup>-3</sup>	1,37.10 <sup>-3</sup>	1,03.10 <sup>-3</sup>

- Pour  $\alpha = 0$ , une régression linéaire sur les couples  $(t, \ln[\text{RBr}])$  conduit à un coefficient de corrélation  $|r| = 0,984 < 0,999$ .  $\alpha$  **n'est donc pas égal à 0**.
  - Pour  $\alpha = 1$ , une régression linéaire sur les couples  $(t, 1/[\text{RBr}])$  conduit à un coefficient de corrélation  $|r| = 0,999\ 993 > 0,99$  **ce qui confirme que  $\alpha = 1$** .
- c) D'après l'étude précédente, le coefficient directeur de la droite  $1/[\text{RBr}] = f(t)$  est  $k$ . On en déduit :

$$\boxed{k = 61,2 \text{ L.mol}^{-1}.\text{h}^{-1} = 1,70.10^{-2} \text{ L.mol}^{-1}.\text{s}^{-1}}$$

#### 4. On utilise le **tableau III**.

- a) Déterminons la loi d'évolution des concentrations en fonction du temps. En posant  $[\text{RBr}]_0 = a_0$  et  $[\text{I}^-]_0 = b_0$ , le tableau d'avancement s'écrit (en utilisant les concentrations et l'avancement volumique  $x$ ) :



Par définition de la vitesse de réaction  $v$  :

$$v = -\frac{d[\text{RBr}]}{dt} = \frac{dx}{dt} = k[\text{RBr}][\text{I}^-] = k(a_0 - x)(b_0 - x)$$

avec  $k = k(323\text{K})$ . Cette équation différentielle à variables séparables se résout en :

$$\int_0^x \frac{dx'}{(a_0 - x')(b_0 - x')} = \int_0^t k dt' = kt$$

et donc :

$$\int_0^x \frac{dx'}{a_0 - x'} - \int_0^x \frac{dx'}{b_0 - x'} = (b_0 - a_0)kt$$

d'où :

$$\boxed{\ln \left[ \frac{(b_0 - x)a_0}{(a_0 - x)b_0} \right] = (b_0 - a_0)kt}$$

- b) Dans cet expérience, le réactif limitant est RBr et le temps de demi-réaction est défini pour  $x = a_0/2$ , ce qui conduit à :

$$k = \frac{1}{(b_0 - a_0)t_{1/2}} \ln \left[ \frac{(2b_0 - a_0)}{b_0} \right]$$

Application numérique :  $k(323\text{K}) = 6,9 \cdot 10^{-5} \text{ L} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ .

- c) Pour cette deuxième expérience à  $T = 353 \text{ K}$ , les deux concentrations initiales sont égales. En posant  $[\text{RBr}]_0 = [\text{I}^-]_0 = a_0$ , on obtient l'équation différentielle :

$$\frac{dx}{dt} = k'(a_0 - x)^2$$

avec  $k' = k(353\text{K})$ . Cette équation se résout en écrivant :

$$\int_0^x \frac{dx'}{(x' - a_0)^2} = \int_0^t k' dt' = k't \iff -\frac{1}{x - a_0} - \frac{1}{a_0} = k't$$

Pour  $t = t_{1/2}$ ,  $x = a_0/2$  et donc  $k't_{1/2} = \frac{1}{a_0}$ , d'où :

$$k' = \frac{1}{a_0 t_{1/2}}$$

Application numérique :  $k(353\text{K}) = 2,8 \cdot 10^{-3} \text{ L} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ .

- d) D'après la loi d'Arrhénius, l'énergie d'activation  $E_a$  est liée à la constante de vitesse  $k$  par l'équation :

$$\frac{d \ln k}{dT} = \frac{E_a}{RT^2} \implies \ln k(T) = -\frac{E_a}{RT} + K$$

où  $K$  est une constante. En posant  $T_1 = 323\text{K}$  et  $T_2 = 353\text{K}$ , nous obtenons par différence :

$$\ln k' - \ln k = -\frac{E_a}{RT_2} + \frac{E_a}{RT_1} \iff \ln \left( \frac{k'}{k} \right) = \frac{E_a}{R} \frac{T_2 - T_1}{T_1 T_2}$$

soit :

$$E_a = \frac{R T_1 T_2}{T_2 - T_1} \ln \left( \frac{k'}{k} \right)$$

Application numérique :  $E_a = 1,2 \cdot 10^5 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \approx 120 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ , ce qui est un bon ordre de grandeur.

## 2 Gravimétrie

**Q26.** Pour toute surface fermée  $S_F$  :

$$\oint_{S_F} \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi G M_{\text{int}}$$

où  $M_{\text{int}}$  est la masse intérieure à la surface  $S_F$ . L'analogie avec l'électrostatique consiste à remplacer la charge par la masse, le champ électrique par le champ de gravitation et  $1/\epsilon_0$  par  $-4\pi G$ .

**Q27.** Le problème est à symétrie sphérique et  $\vec{g} = \mathcal{G}(r) \vec{e}_r$ . On prend comme surface de Gauss  $S_g$  une sphère de rayon  $r > R$ . Dans ce cas,  $M_{\text{int}} = M_T$  et donc :

$$\oint_{S_g} \vec{g} \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 \mathcal{G}(r) = -4\pi G M_T$$

d'où :

$$\mathcal{G}(r) = -G \frac{M_T}{r^2}$$

En particulier :

$$\vec{G}(O) = G \frac{M_T}{R_T^2} \vec{e}_z \iff g_0 = G \frac{M_T}{R_T^2} = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$$

ou encore, en fonction de la masse volumique moyenne  $\mu_m$  de la Terre :  $\mu_m = \frac{3M_T}{4\pi R_T^3}$  :

$$g_0 = \frac{4G\mu_m\pi R_T}{3}$$

**Q28.** Le calcul est le même qu'aux questions précédentes. On adapte simplement le résultat :

$$\vec{g}_B = -\frac{GM_B}{r^2} \vec{e}_r$$

où  $M_B = \mu' \frac{4}{3} \pi R^3$  donc :

$$\vec{g}_B = -\frac{4G(\mu_m + \Delta\mu)\pi R^3}{3r^2} \vec{e}_r$$

**Q29.** La projection de  $-\vec{e}_r$  sur l'axe vertical  $\vec{e}_z$  est  $-\vec{e}_r \cdot \vec{e}_z = \frac{h}{r}$  donc  $g_{Bz} = \frac{4G(\mu_m + \Delta\mu)\pi R^3}{3r^3} h$

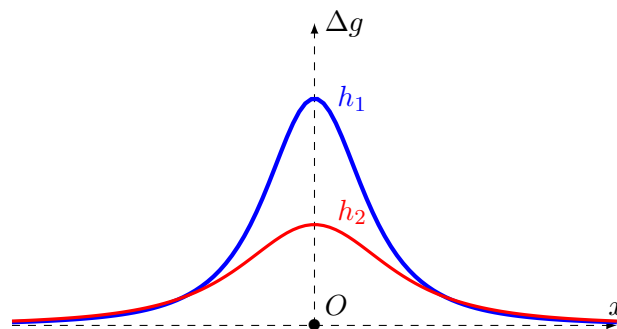
qu'on écrit aussi  $g_{Bz} = \frac{4G(\mu_m + \Delta\mu)\pi R^3}{3(h^2 + x^2)^{3/2}} h$ .

**Q30.** En utilisant la théorème de superposition, on peut considérer que le champ de gravitation de l'ensemble { Terre + boule de masse volumique  $\mu_m + \Delta\mu$  } est celui créé par la Terre de masse volumique uniforme  $\mu_m$ , auquel on superpose le champ créé par une boule de masse volumique uniforme  $\Delta\mu$ . Comme  $g_0$  est la part du champ de gravitation créé par la Terre, on obtient bien que  $g_z - g_0$  est la part du champ créé uniquement par la boule de masse volumique  $\Delta\mu$ .

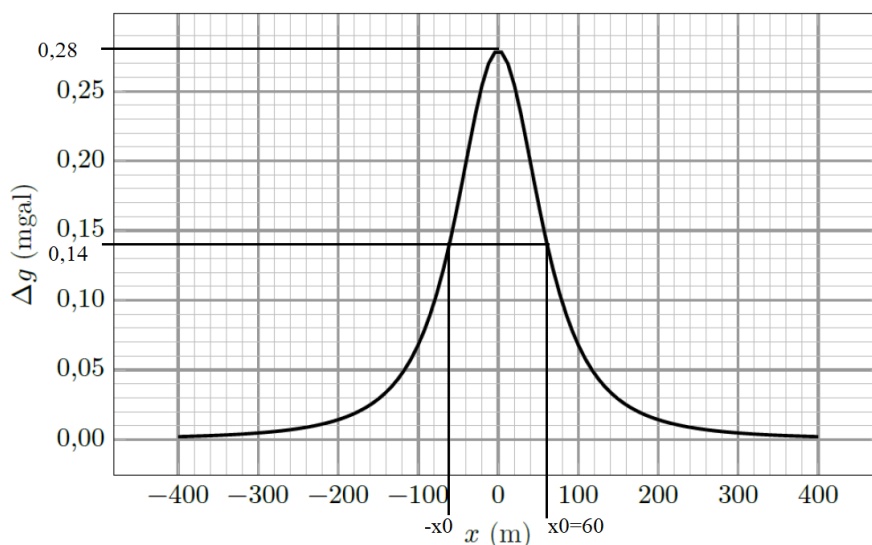
**Q31.** On reprend simplement le résultat de la question 29 en l'absence du terme  $\mu_m$  ; il vient

$$\Delta g = g_{Bz} - g_0 = \frac{4G\Delta\mu\pi R^3 h}{3(h^2 + x^2)^{3/2}}$$

- Q32.** Le tracé de la fonction  $\Delta g(x)$  est celui d'une fonction paire de valeur maximale  $\Delta g_{\max} = \frac{4\pi G \Delta \mu R^3}{3h^2}$  atteinte en  $x = 0$  avec une largeur à mi-hauteur  $\Delta x = 2x_0$  telle que  $(x_0^2 + h^2)^{3/2} = 2h^3$ , d'où  $x_0 = h\sqrt{2^{2/3} - 1}$ . Les tracés sont représentés dans la figure ci-dessous.

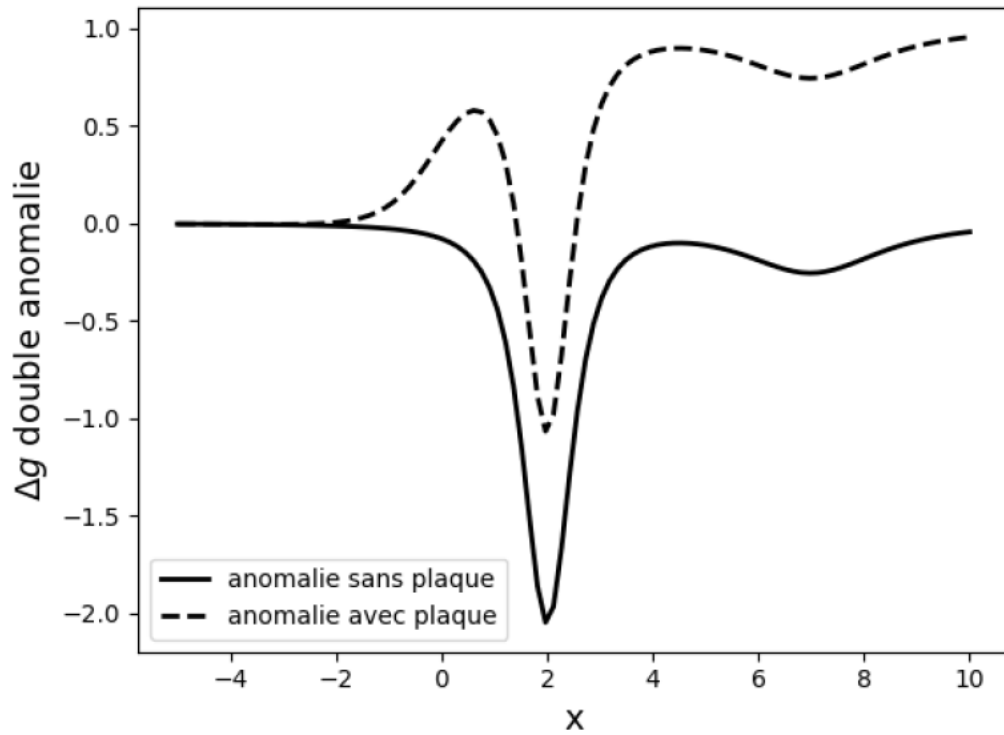


- Q33.** D'après ce qui précède, la largeur à mi-hauteur  $\Delta x = 2x_0$  est donc liée à la profondeur  $h$  par  $\Delta x = 2h\sqrt{2^{2/3} - 1}$  tandis que  $\Delta g_{\max} = \frac{4\pi G \Delta \mu R^3}{3h^2}$ .
- Q34.** Sur la courbe proposée on lit la largeur à mi-hauteur  $\Delta x = 120$  m (voir figure ci-dessous), donc  $h = 78$  m et la valeur maximale  $\Delta g_{\max} = 0,28$  mgal =  $0,28 \cdot 10^{-3} \times 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} = 2,8 \cdot 10^{-6} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  permet de déterminer  $R = \left( \frac{3h^2 \Delta g_{\max}}{4\pi G \Delta \mu} \right)^{1/3} = 39$  m.



- Q35.** Il faut que l'effet cumulé de l'or et de la grotte s'annulent, donc disposer l'or au centre d'une part et faire en sorte que la masse totale de l'or soit la même que celle manquante dans la grotte. En effet, la symétrie sphérique étant respectée, l'application du théorème de Gauss conduit au même champ pour la sphère d'or et la sphère de roche. Il faut donc respecter la condition suivante :  $R^3 \mu_m = R'^3 \rho_{or}$ .
- Q36.** La masse maximale d'or est donc  $m_{or} = \frac{4}{3}\pi R'^3 \rho_{or} = \frac{4}{3}\pi R^3 \mu_m$  soit avec  $\mu_m \simeq 2000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  d'après la figure 9, on en déduit  $m_{or} \simeq 8,4 \cdot 10^3 \text{ kg} = 8,4 \text{ tonnes}$ . On peut également en déduire la rayon de la boule d'or, même si cela n'est pas demandé explicitement, qui vaut  $R' = 0,47 \text{ m}$ . La boule d'or est bien inférieure au rayon de la cavité.
- Q37.** Il faut superposer deux anomalies dues aux grottes à celle due à la plaque de calcaire.

Dans une couche uniforme, les deux grottes placées en  $x_1$  et  $x_2 > x_1$  provoqueraient deux anomalies successives. Comme  $h_1 < h_2$ , la première est plus intense et plus piquée. Enfin, comme il s'agit de grottes,  $\Delta\mu = 0 - \mu_m = -\mu_m < 0$ . Si en plus on tient compte du caractère semi infini d'une plaque, on aurait une superposition des effets, d'où le graphe :





### 3 Étude d'un microphone électrostatique

**IV.A.1)** Soit  $M(x_M, y_M, z_M)$  un point quelconque. Les plans  $(Mxz)$  et  $(Myz)$  étant des plans de symétrie de la distribution de charges, le champ électrostatique en  $M$  sera de la forme :

$$\vec{E}(M) = E(x_M, y_M, z_M) \vec{u}_z$$

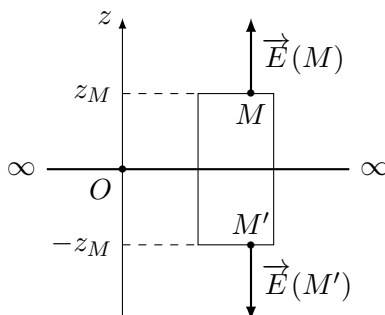
Comme il y a invariance par toute translation le long de  $Ox$  ou de  $Oy$ , on en déduit que :

$$\vec{E}(M) = E(z_M) \vec{u}_z$$

**IV.A.2)** Le plan de la base est plan de symétrie pour cette distribution de charge seule. Le champ électrostatique créé par cette distribution est donc transformé en son symétrique de part et d'autre de la base, c'est à dire, si  $M'$  est le point symétrique de  $M$  par rapport au plan de la base :

$$\vec{E}(M') = \text{sym } \vec{E}(M) = -\vec{E}(M)$$

**IV.A.3)** Soit  $M$  un point de cote  $z_M > 0$ . Prenons comme surface de Gauss  $S_G$  un cylindre de hauteur  $2z_M$  et dont les deux bases sont deux disques de rayon  $r$  et sont placées de façon symétrique par rapport au plan chargé. Le point  $M$  est supposé appartenir à la base supérieure du cylindre.



Les contributions au flux des deux bases sont identiques et la surface latérale ne contribue pas. Nous avons donc :

$$\Phi(\vec{E}/S_G) = 2 \times \pi r^2 E(z_M)$$

De plus, comme  $Q_{int} = \sigma \pi r^2$ , le théorème de Gauss conduit à :

$$E(z_M) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \text{ pour } z_M > 0 \text{ et } E(z_M) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \text{ pour } z_M < 0$$

De plus, si  $Q$  est la charge portée par l'armature de base,  $\sigma = \frac{Q}{S}$  ce qui conduit à :

$$E(z_M) = \frac{Q}{2\varepsilon_0 S} \text{ pour } z_M > 0 \text{ et } E(z_M) = -\frac{Q}{2\varepsilon_0 S} \text{ pour } z_M < 0$$

**IV.A.4)**

$$\vec{F}_e = -Q \vec{E}_{\text{base}} = -\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S} \vec{u}_z$$

Il s'agit d'une force attractive, ce qui est cohérent car les deux disques portent des charges opposées.

**IV.A.5)** Par définition de la capacité d'un condensateur :  $Q = CU$  et donc :

$$\vec{F}_e = -\frac{C^2 U^2}{2\varepsilon_0 S} \vec{u}_z = -\frac{\varepsilon_0 S U^2}{2(e+z)^2} \vec{u}_z$$

### IV.C – Étude dynamique

**IV.C.1)** On applique le principe fondamental de la dynamique à la membrane, en projection sur  $\vec{u}_z$  :

$$m\ddot{z} = -kz - h\dot{z} - \frac{\varepsilon_0 S}{2} \frac{U(t)^2}{(e+z)^2}$$

**IV.C.2)**  $z = z_0 + \xi(t)$  donc  $\dot{z} = \dot{\xi}$  et  $\ddot{z} = \ddot{\xi}$ . Par conséquent :

$$m\ddot{\xi} = -k(z_0 + \xi) - h\dot{\xi} - \frac{\varepsilon_0 S}{2} \frac{(U_0 + u)^2}{(e + z_0 + \xi)^2}$$

**IV.C.3)** Un développement limité au premier ordre en  $u/U_0$  et en  $\xi/(e+z_0)$  permet d'écrire :

$$\begin{cases} (U_0 + u)^2 & \approx U_0^2 + 2U_0 u \\ \frac{1}{(e + z_0 + \xi)^2} & \approx \frac{1}{(e + z_0)^2} \left(1 - \frac{2\xi}{e + z_0}\right) = \frac{1}{(e + z_0)^2} - \frac{2\xi}{(e + z_0)^3} \end{cases}$$

En reportant dans l'équation précédente et en négligeant le terme proportionnel à  $\xi u$  qui est un infiniment petit du deuxième ordre, nous obtenons :

$$m\ddot{\xi} = -k\xi - h\dot{\xi} - \underbrace{-kz_0 - \frac{\varepsilon_0 S}{2} \frac{U_0^2}{(e+z_0)^2}}_{=0 \text{ (condition d'équilibre)}} - \varepsilon_0 S \frac{U_0 u}{(e+z_0)^2} + \varepsilon_0 S \frac{U_0^2 \xi}{(e+z_0)^3}$$

d'où :

$$m\ddot{\xi} + h\dot{\xi} + \left\{ k - \varepsilon_0 S \frac{U_0^2}{(e+z_0)^3} \right\} \xi = -\frac{\varepsilon_0 S U_0}{(e+z_0)^2} u(t)$$

donc :

$$\begin{cases} k' & = k - \varepsilon_0 S \frac{U_0^2}{(e+z_0)^3} \\ \alpha & = -\frac{\varepsilon_0 S U_0}{(e+z_0)^2} \end{cases}$$

Application numérique : avec  $U_0 = 1,1$  kV, on obtient :  $k' = 980$  N.m<sup>-1</sup> et  $\alpha = -5,5 \cdot 10^{-5}$  N.V<sup>-1</sup>. La valeur de  $\alpha$  est donc très petite. Si  $u(t)$  n'est pas importante, l'excitation de la membrane restera faible, donc  $\xi(t)$  aussi (ce qui justifie par ailleurs le développement limité réalisé dans cette question).

### IV.D – Régime sinusoïdal forcé

**IV.D.1)** On transpose l'équation différentielle dans le domaine complexe. Sachant que dériver par rapport au temps revient à multiplier par  $j\omega$ , il vient :

$$(-m\omega^2 + jh\omega + k') \underline{\xi}(t) = \alpha \underline{u}(t)$$

et donc :

$$A(j\omega) = \frac{\alpha}{k' + jh\omega - m\omega^2}$$

**IV.D.2)** C'est un filtre passe-bas du seconde ordre. Sa fonction de transfert peut être mise sous la forme canonique :

$$A(j\omega) = \frac{H_0}{1 + \frac{jx}{Q} - x^2} \quad \text{avec } x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

Dans notre cas :  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k'}{m}} = 2\pi f_0$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k'}{m}} \quad \text{fréquence propre du filtre}$$

A.N. :  $m = \mu a S = 2,7 \text{ g}$  ce qui donne :  $f_0 = 96 \text{ Hz}$ .

**IV.D.3)** Si  $f \ll f_0$ , alors  $A(j\omega) \approx H_0 = \alpha/k'$  et donc :

$$\xi(t) = \frac{\alpha}{k'} u_s \cos(\omega t) = \xi_m \cos(\omega t)$$

La réponse  $\xi(t)$  est donc en phase avec l'excitation  $u(t)$ . Si on veut que  $\xi_m = e/100$ , alors on doit choisir :

$$u_s = \frac{k' e}{100 \alpha} = 5,3 \cdot 10^2 \text{ V}$$

## 4 PIÈGES ÉLECTRONIQUES- CCINP MP

### I. Piège 1 dimension

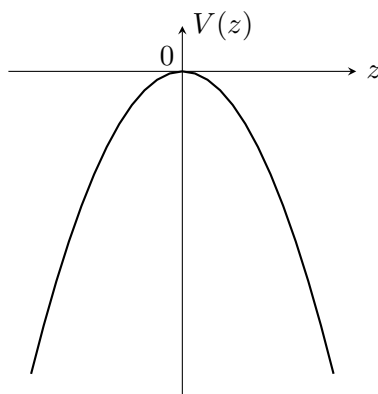
1) De façon évidente :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\frac{V_0}{2d^2} ; \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -\frac{V_0}{2d^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{V_0}{d^2}$$

d'où :

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

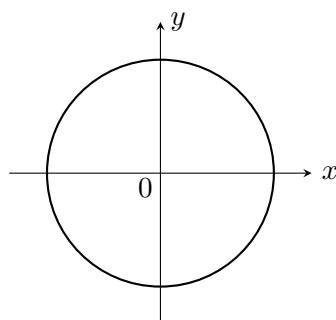
2) a) Pour  $x = y = 0$ , on a  $V(z) = V_0 \frac{z^2}{2d^2}$ , ce qui est une parabole. Il faut seulement faire attention au fait que  $V_0 < 0$ .



b) Dans le plan  $(Oxy)$  on a  $z = 0$ . La courbe équipotentielle  $V = V_1 > 0$  a pour équation :

$$-V_0 \frac{x^2 + y^2}{4d^2} = V_1 \iff x^2 + y^2 = -4d^2 \frac{V_1}{V_0} > 0$$

ce qui est l'équation d'un cercle de centre  $O(0,0)$  et de rayon  $R = 2d\sqrt{\frac{V_1}{-V_0}}$ .



3) Comme chaque électrode métallique est équipotentielle, on peut prendre un point quelconque sur celles-ci pour calculer la différence de potentiel. On aura par exemple :

$$V_0 = V(0, 0, z_0) - V(0, r_0, 0) = V_0 \frac{2z_0^2}{4d^2} + V_0 \frac{r_0^2}{4d^2} \quad \text{d'où} \quad 2z_0^2 + r_0^2 = 4d^2$$

- 4) a) On calcule  $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V$ , ce qui conduit à :

$$\vec{E} = V_0 \frac{x}{2d^2} \vec{u}_x + V_0 \frac{y}{2d^2} \vec{u}_y - V_0 \frac{z}{d^2} \vec{u}_z$$

On applique ensuite le principe fondamental de la dynamique (abrégé PFD par la suite) à l'électron, en ne tenant compte que de la force électrique et on projette sur la base cartésienne :

$$\ddot{x} = -\frac{eV_0}{2md^2} x ; \ddot{y} = -\frac{eV_0}{2md^2} y \quad \text{et} \quad \ddot{z} = \frac{eV_0}{md^2} z$$

L'équation différentielle en  $z$  peut s'écrire :

$$\ddot{z} - \frac{eV_0}{md^2} z = 0$$

et ce mouvement ne peut être confiné si cette équation est celle d'un oscillateur harmonique, c'est à dire si  $V_0 < 0$  (Dans le cas contraire, on obtient une solution composée d'exponentielles réelles et qui diverge lorsque  $t \rightarrow +\infty$ , cf. plus loin pour les mouvements en  $x$  et  $y$ ).

En revanche, le mouvement selon  $x$  et  $y$  n'est pas confiné si  $V_0 < 0$  puisque dans ce cas les équations s'écrivent (en  $x$  par exemple) :

$$\ddot{x} + \frac{eV_0}{2md^2} x = 0 \quad \text{d'où} \quad \ddot{x} - \frac{e|V_0|}{2md^2} x = 0$$

L'équation caractéristique s'écrit :  $r^2 - \frac{e|V_0|}{2md^2} = 0$  ce qui conduit aux deux racines réelles :

$$r_+ = \sqrt{\frac{e|V_0|}{2md^2}} \quad \text{et} \quad r_- = -\sqrt{\frac{e|V_0|}{2md^2}}$$

d'où une solution de la forme :

$$x(t) = A \text{ch} \left( \sqrt{\frac{e|V_0|}{2md^2}} t \right) + B \text{sh} \left( \sqrt{\frac{e|V_0|}{2md^2}} t \right)$$

qui tend vers  $\pm\infty$  quelles que soient les valeurs des constantes  $A$  et  $B$ .

- b) L'équation en  $z$  étant celle d'un oscillateur harmonique, sa pulsation propre est :

$$\omega_z = \sqrt{\frac{e|V_0|}{md^2}} = 1,58.10^6 \text{ rad.s}^{-1}$$

ce qui correspond à une fréquence  $f_z = \omega_z/2\pi = 25 \text{ MHz}$ .

## II. Piège 2 dimensions

- 5) À l'instant  $t$  le vecteur vitesse de l'électron s'écrit  $\vec{v} = \dot{x} \vec{u}_x + \dot{y} \vec{u}_y + \dot{z} \vec{u}_z$  et son accélération est  $\vec{a} = \ddot{x} \vec{u}_x + \ddot{y} \vec{u}_y + \ddot{z} \vec{u}_z$ . Il n'est soumis qu'à la partie magnétique de la force de Lorentz :

$$\vec{F}_m = -e \vec{v} \wedge \vec{B} = -eB \dot{y} \vec{u}_x + eB \dot{x} \vec{u}_y$$

d'où les trois équations du mouvement en projection sur les vecteurs de la base cartésienne et en posant  $\omega_c = eB/m$  (pulsation cyclotron) :

$$\ddot{x} = -\omega_c \dot{y} ; \ddot{y} = \omega_c \dot{x} \quad \text{et} \quad \ddot{z} = 0$$

Application numérique :  $\omega_c = 8,8.10^8 \text{ rad.s}^{-1}$  et  $f_c = \omega_c/2\pi = 140 \text{ MHz}$ .

6) L'expression de  $z(t)$  s'obtient très facilement :

$$\dot{z} = v_0 \cos \alpha \quad \text{et donc} \quad \boxed{z(t) = v_0 \cos \alpha t}$$

Le mouvement n'est pas confiné selon l'axe  $Oz$ , sauf si  $\alpha = \pi/2$ , mais on ne peut jamais réaliser ceci rigoureusement dans une expérience réelle. L'électron aura toujours une composante non nulle de sa vitesse initiale  $v_{0z}$  selon  $Oz$  (aussi petite soit-elle).

7) Posons  $\underline{u} = x + iy$ . Les équations précédentes conduisent donc à :

$$\underline{\ddot{u}} = \ddot{x} + i\ddot{y} = -\omega_c \dot{y} + i\omega_c \dot{x} = i\omega_c \dot{u} \quad \text{donc} \quad \boxed{\underline{\ddot{u}} - i\omega_c \dot{u} = 0}$$

L'équation caractéristique s'écrit  $r^2 - i\omega_c r = 0$  et elle admet deux racines :  $r = 0$  et  $r = i\omega_c$ . La solution générale est donc :

$$\underline{u}(t) = A + B e^{i\omega_c t}, \quad (A, B) \in \mathbb{C}^2$$

Les conditions initiales conduisent à :

$$\underline{u}(0) = A + B = 0 \quad \text{et} \quad \dot{\underline{u}}(0) = i\omega_c B = v_0 \sin \alpha$$

d'où :

$$A = i \frac{v_0 \sin \alpha}{\omega_c} \quad \text{et} \quad B = -i \frac{v_0 \sin \alpha}{\omega_c}$$

On en déduit que :

$$\underline{u}(t) = -i \frac{v_0 \sin \alpha}{\omega_c} \exp(i\omega_c t) + i \frac{v_0 \sin \alpha}{\omega_c}$$

et donc :

$$\boxed{x(t) = \operatorname{Re}[u(t)] = \frac{v_0 \sin \alpha}{\omega_c} \sin(\omega_c t) \quad \text{et} \quad y(t) = \operatorname{Im}[u(t)] = \frac{v_0 \sin \alpha}{\omega_c} (1 - \cos(\omega_c t))}$$

8) Dans le plan ( $Oxy$ ) la trajectoire est un cercle :

$$x^2 + \left(y - \frac{v_0 \sin \alpha}{\omega_c}\right)^2 = \left(\frac{v_0 \sin \alpha}{\omega_c}\right)^2$$

de centre  $\Omega(0, \frac{v_0 \sin \alpha}{\omega_c})$  et de rayon  $R = \frac{v_0 \sin \alpha}{\omega_c}$ . Le mouvement de l'électron est donc bien confiné dans le plan ( $Oxy$ ).

A.N. :  $R = 0,11$  mm ce qui est cohérent avec l'ordre de grandeur des dimensions des électrodes.

En revanche le mouvement n'est pas confiné selon l'axe  $Oz$ , sauf si  $\alpha = \pi/2$ , mais on ne peut jamais réaliser ceci rigoureusement dans une expérience réelle. L'électron aura toujours une composante non nulle de sa vitesse initiale  $v_{0z}$  selon  $Oz$  (aussi petite soit-elle).

### III. Piège 3 dimensions

8) On suppose bien sûr que  $V_0 < 0$ . En reprenant les équations du **I.** et **II.**, on aboutit à :

$$\boxed{\ddot{x} = -\omega_c y + \frac{\omega_z^2}{2} x \quad ; \quad \ddot{y} = \omega_c x + \frac{\omega_z^2}{2} y \quad \text{et} \quad \ddot{z} + \omega_z^2 z = 0}$$

9) On obtient :

$$\ddot{u} - i\omega_c u - \frac{\omega_z^2}{2} u = 0$$

10) L'équation caractéristique associée à cette équation homogène a pour discriminant  $\Delta = -\omega_c^2 + 2\omega_z^2 < 0$  et les deux racines de cette équation sont donc :

$$r_{\pm} = i \frac{\omega_c}{2} \pm i \frac{\sqrt{\omega_c^2 - 2\omega_z^2}}{2}$$

En posant :

$$\omega_1 = \frac{\omega_c}{2} + \frac{\sqrt{\omega_c^2 - 2\omega_z^2}}{2} \quad \text{et} \quad \omega_2 = \frac{\omega_c}{2} - \frac{\sqrt{\omega_c^2 - 2\omega_z^2}}{2}$$

on peut donc écrire la solution générale sous la forme :

$$u(t) = A_1 \exp(i\omega_1 t) + A_2 \exp(i\omega_2 t)$$

Application numérique :  $f_1 = 275$  MHz et  $f_2 = 4,5$  MHz.

11) Le mouvement est bien confiné le long de  $Oz$  d'après la question 4)a). Quant au mouvement dans le plan  $(Oxy)$ , il vérifie :

$$|u| = \sqrt{x^2 + y^2} \leq |A_1| |\exp(i\omega_1 t)| + |A_2| |\exp(i\omega_2 t)| = |A_1| + |A_2|$$

ce qui fait que la trajectoire dans ce plan est inscrite dans le cercle de rayon  $R = |A_1| + |A_2|$ . C'est donc aussi un mouvement confiné.