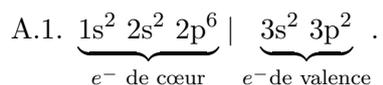


MP1 – CORRIGÉ du DS n°3 (CCP-e3a)

1 Chimie

Partie 1 : ATOMISTIQUE et CRISTALLOGRAPHIE

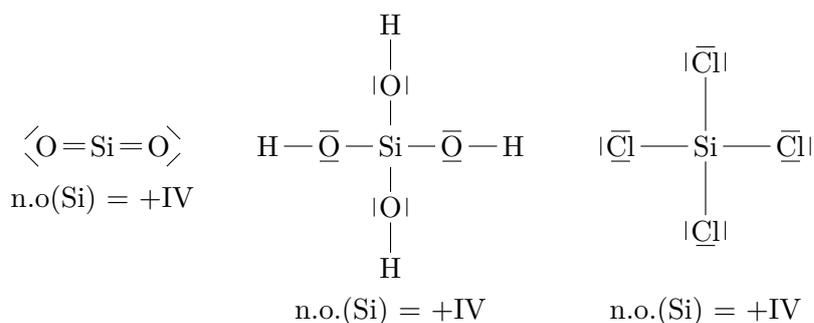
A. Structure du silicium



Rappelons que les électrons de cœur sont ceux qui ne sont pas des électrons de valence.

A.2. La valeur maximale du nombre quantique principal est $n = 3$: 3^{ème} période ; Il y a 4 électrons de valence, donc : $10 + 4 = 14^{\text{ème}}$ colonne du tableau périodique. Le carbone C a aussi 4 électrons de valence. C est plus électronégatif car il est situé au dessus de Si (dans la 2^{ème} période). On sait que l'électro-négativité augmente de bas en haut et de la gauche vers la droite du tableau.

A.3. Le silicium est tétravalent, ce qui conduit aux composés suivants :



Aucun élément ne possède de charge formelle. La première formule de Lewis est d'ailleurs obtenue en utilisant deux liaisons doubles, ce qui annule les charges formelles aussi bien sur l'oxygène que sur le silicium : le composé en est d'autant plus stable.

Pour calculer le nombre d'oxydation de Si, rappelons qu'on attribue tous les électrons de liaison à l'élément le plus électronégatif, c'est à dire O ou Cl ici. Dans les trois composés, Si a perdu tous ses électrons de valence (= 4), d'où : n.o.(Si) = +IV.

B. Cristallographie du silicium et du nitrure de silicium

B.1. Les sites T sont aux centres des 8 petits cubes d'arête $a/2$. Les sites O sont aux milieux de chaque arête et au centre du cube. Il y a donc

$$\text{Site T : } N_T = 8 \text{ et sites O : } N_O = 1 + 12/4 = 4$$

B.2. La population de Si sera : $N(\text{Si}) = \underbrace{8/8}_{\text{sommets}} + \underbrace{6/2}_{\text{faces}} + \underbrace{4}_{\text{sites T}} = 8$ atomes par maille cubique.

Un atome de Silicium aura une coordinence de 4 (c'est à dire 4 plus proches voisins) qui correspond à celle d'un atome dans un site T.

B.3. Les atomes sont en contact sur la grande diagonale d'un cube de coté $a/2$ (on le voit à partir d'un site T) :

$$2r(\text{Si}) = \sqrt{3} \times \frac{a}{2} \times \frac{1}{2} \implies r(\text{Si}) = \frac{\sqrt{3}a}{8}$$

B.4.

$$\rho = \frac{\text{masse des atomes}}{\text{volume de la maille}} = \frac{8 M(\text{Si})}{N_A a^3} = \frac{3\sqrt{3} M(\text{Si})}{8^2 N_A r(\text{Si})^3}$$

et donc :

$$r(\text{Si}) = \left(\frac{3\sqrt{3} M(\text{Si})}{8^2 N_A \rho} \right)^{1/3} \approx 118 \text{ pm}$$

B.5.

$$C = \frac{\text{volume des atomes}}{\text{volume de la maille}} = \frac{8 \times \frac{4}{3} \pi r(\text{Si})^3}{a^3} = \frac{8 \times 4\pi \times 3\sqrt{3}}{3 \times 8^3}$$

et donc

$$C = \frac{\sqrt{3}\pi}{16} = 0,34$$

C'est une valeur bien inférieure à la compacité maximale que l'on peut obtenir avec une structure cfc (0,74).

B.6. Le silicium est matériau très dur car les atomes de Si sont liés par des liaisons covalentes.

B.7. On parle de *variétés allotropiques*.

B.8. Nombre de Si^{4+} par maille cubique : $\underbrace{\frac{8}{8}}_{\text{sites T}} + \underbrace{\frac{1 + 12/4}{2}}_{\text{sites O}} = 3.$

Nombre de N^{3-} par maille : 4 (structure cfc)La stœchiométrie Si_3N_4 est donc respectée.

B.9. Soit r_T le rayon du plus grand cation que l'on peut insérer dans un site T (= habitabilité du site). Ce cation est alors en contact avec un N^{3-} le long de la grande diagonale d'un cube d'arête $a/2$, d'où :

$$r_T + r(\text{N}^{3-}) = \sqrt{3} \times \frac{a}{2} \times \frac{1}{2} \iff a = \frac{4}{\sqrt{3}} (r(\text{N}^{3-}) + r_T)$$

D'autre part, si les anions sont en contact le long de la diagonale d'une face du grand cube :

$$4r(\text{N}^{3-}) = \sqrt{2} a \iff a = \frac{4r(\text{N}^{3-})}{\sqrt{2}}$$

d'où :

$$r_T = \left(\sqrt{\frac{3}{2}} - 1 \right) r(\text{N}^{3-}) = 31,4 \text{ pm}$$

Ceci est cohérent avec les atomes de Si qui sont dans les sites T (coordination 4) : $r(\text{Si}) = 27 \text{ pm} < r_T$.

B.10. Il s'agit d'une liaison ionique : liaison forte car la différence d'électro-négativité est importante. Ce solide doit posséder une température de fusion élevée (une recherche sur internet fournit 1900°C).

Partie 2 : CINÉTIQUE CHIMIQUE

1.

$$v = -\frac{d[\text{RBr}]}{dt} = -\frac{d[\text{I}^-]}{dt} = \frac{d[\text{RI}]}{dt} = \frac{d[\text{Br}^-]}{dt}$$

Si, de plus, la réaction admet un ordre par rapport à chaque réactif, on peut écrire :

$$v = k[\text{RBr}]^\alpha [\text{I}^-]^\beta$$

où α et β sont les ordres partiels par rapport à RBr et à I^- .

2. a) $\frac{[\text{RBr}]_0}{[\text{I}^-]_0} = 21$. RBr étant en large excès par rapport à I^- , on peut supposer que sa concentration ne va pas beaucoup varier au cours de la transformation chimique. Il y a donc dégénérescence de l'ordre par rapport à RBr.

$$[\text{RBr}] \approx [\text{RBr}]_0 \implies v \approx \underbrace{k([\text{RBr}]_0)^\alpha}_{\text{constante}} [\text{I}^-]^\beta = k_{app} [\text{I}^-]^\beta$$

où k_{app} est la constante de vitesse apparente :

$$k_{app} = k([\text{RBr}]_0)^\alpha$$

- b) Dans le cas où $\beta = 1$:

$$-\frac{d[\text{I}^-]}{dt} = k_{app}[\text{I}^-] \implies [\text{I}^-] = [\text{I}^-]_0 \exp(-k_{app}t) \quad \text{donc} \quad \ln[\text{I}^-] = \ln[\text{I}^-]_0 - k_{app}t$$

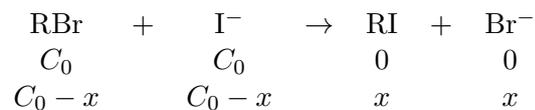
Une régression linéaire sur les couples $(t, \ln[\text{I}^-])$ conduit à un coefficient de corrélation : $|r| = 0,99999891$ ce qui confirme l'hypothèse $\beta = 1$.

- c) Le calcul de régression linéaire précédent donne la pente de la droite $\ln[\text{I}^-] = f(t)$ qui vaut $-k_{app}$. On en déduit que :

$$k_{app} = 0,266 \text{ h}^{-1} = 7,39 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$$

3. Dans cette partie les concentrations initiales sont égales et nous poserons : $[\text{RBr}]_0 = [\text{I}^-]_0 = C_0$.

- a) Un tableau d'avancement donne (en concentration) :



où x est l'avancement volumique.

D'autre part :

$$\tau = \frac{n_{\text{RBr}}(0) - n_{\text{RBr}}(t)}{n_{\text{RBr}}(0)} \implies n_{\text{RBr}}(t) = n_{\text{RBr}}(0)(1 - \tau)$$

En divisant par le volume V de la solution, nous obtenons :

$$[\text{RBr}] = [\text{I}^-] = C_0(1 - \tau) \quad (1)$$

- b) La vitesse v de la réaction s'écrit désormais :

$$v = k[\text{RBr}]^\alpha [\text{I}^-] = k[\text{RBr}]^{1+\alpha} = -\frac{d[\text{RBr}]}{dt}$$

ce qui conduit à une équation différentielle à variables séparables dont la solution s'écrit :

$$\int_{C_0}^{[\text{RBr}]} \frac{d[\text{RBr}]}{[\text{RBr}]^{1+\alpha}} = - \int_0^t k dt = -kt$$

Si $\alpha \neq 0$, cela conduit à :

$$\boxed{-\frac{1}{\alpha} \left[\frac{1}{[\text{RBr}]^\alpha} \right]_{C_0}^{[\text{RBr}]} = -kt \quad \text{donc} \quad \frac{1}{[\text{RBr}]^\alpha} = \frac{1}{C_0^\alpha} + \alpha kt}$$

et si $\alpha = 0$, cela donne :

$$\boxed{\ln[\text{RBr}] = \ln C_0 - kt}$$

La relation (1) permet de construire le tableau ci-dessous :

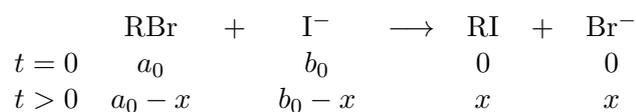
| t (en h) | 0 | 0,5 | 1 | 2 | 4 | 8 | 12 |
|------------------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| [RBr] (mol.L ⁻¹) | 4,20.10 ⁻³ | 3,72.10 ⁻³ | 3,34.10 ⁻³ | 2,77.10 ⁻³ | 2,07.10 ⁻³ | 1,37.10 ⁻³ | 1,03.10 ⁻³ |

- Pour $\alpha = 0$, une régression linéaire sur les couples $(t, \ln[\text{RBr}])$ conduit à un coefficient de corrélation $|r| = 0,984 < 0,999$. α **n'est donc pas égal à 0**.
 - Pour $\alpha = 1$, une régression linéaire sur les couples $(t, 1/[\text{RBr}])$ conduit à un coefficient de corrélation $|r| = 0,999\ 993 > 0,99$ **ce qui confirme que $\alpha = 1$** .
- c) D'après l'étude précédente, le coefficient directeur de la droite $1/[\text{RBr}] = f(t)$ est k . On en déduit :

$$\boxed{k = 61,2 \text{ L.mol}^{-1}.\text{h}^{-1} = 1,70.10^{-2} \text{ L.mol}^{-1}.\text{s}^{-1}}$$

4. On utilise le **tableau III**.

- a) Déterminons la loi d'évolution des concentrations en fonction du temps. En posant $[\text{RBr}]_0 = a_0$ et $[\text{I}^-]_0 = b_0$, le tableau d'avancement s'écrit (en utilisant les concentrations et l'avancement volumique x) :



Par définition de la vitesse de réaction v :

$$v = -\frac{d[\text{RBr}]}{dt} = \frac{dx}{dt} = k[\text{RBr}][\text{I}^-] = k(a_0 - x)(b_0 - x)$$

avec $k = k(323\text{K})$. Cette équation différentielle à variables séparables se résout en :

$$\int_0^x \frac{dx'}{(a_0 - x')(b_0 - x')} = \int_0^t k dt' = kt$$

et donc :

$$\int_0^x \frac{dx'}{a_0 - x'} - \int_0^x \frac{dx'}{b_0 - x'} = (b_0 - a_0)kt$$

d'où :

$$\boxed{\ln \left[\frac{(b_0 - x)a_0}{(a_0 - x)b_0} \right] = (b_0 - a_0)kt}$$

- b) Dans cet expérience, le réactif limitant est RBr et le temps de demi-réaction est défini pour $x = a_0/2$, ce qui conduit à :

$$k = \frac{1}{(b_0 - a_0)t_{1/2}} \ln \left[\frac{(2b_0 - a_0)}{b_0} \right]$$

Application numérique : $k(323\text{K}) = 6,9 \cdot 10^{-5} \text{ L} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$.

- c) Pour cette deuxième expérience à $T = 353 \text{ K}$, les deux concentrations initiales sont égales. En posant $[\text{RBr}]_0 = [\text{I}^-]_0 = a_0$, on obtient l'équation différentielle :

$$\frac{dx}{dt} = k' (a_0 - x)^2$$

avec $k' = k(353\text{K})$. Cette équation se résout en écrivant :

$$\int_0^x \frac{dx'}{(x' - a_0)^2} = \int_0^t k' dt' = k't \iff -\frac{1}{x - a_0} - \frac{1}{a_0} = k't$$

Pour $t = t_{1/2}$, $x = a_0/2$ et donc $k't_{1/2} = \frac{1}{a_0}$, d'où :

$$k' = \frac{1}{a_0 t_{1/2}}$$

Application numérique : $k(353\text{K}) = 2,8 \cdot 10^{-3} \text{ L} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$.

- d) D'après la loi d'Arrhénius, l'énergie d'activation E_a est liée à la constante de vitesse k par l'équation :

$$\frac{d \ln k}{dT} = \frac{E_a}{RT^2} \implies \ln k(T) = -\frac{E_a}{RT} + K$$

où K est une constante. En posant $T_1 = 323\text{K}$ et $T_2 = 353\text{K}$, nous obtenons par différence :

$$\ln k' - \ln k = -\frac{E_a}{RT_2} + \frac{E_a}{RT_1} \iff \ln \left(\frac{k'}{k} \right) = \frac{E_a}{R} \frac{T_2 - T_1}{T_1 T_2}$$

soit :

$$E_a = \frac{RT_1 T_2}{T_2 - T_1} \ln \left(\frac{k'}{k} \right)$$

Application numérique : $E_a = 1,2 \cdot 10^5 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \approx 120 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$, ce qui est un bon ordre de grandeur.

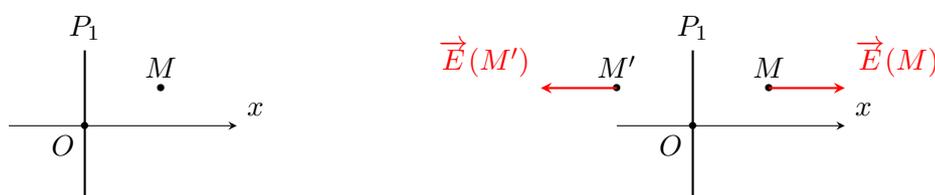
2 Étude de condensateurs

PARTIE A. – ÉTUDE D'UN MICROPHONE ÉLECTROSTATIQUE. D'après Centrale TSI

I. Capacité du condensateur au repos

- 1) Étant donné un point M quelconque de coordonnées (x, y, z) , les plans $(M, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ et $(M, \vec{u}_x, \vec{u}_z)$ sont deux plans de symétrie des charges contenant M . On en déduit que : $\vec{E}_1(M) = E_1(x, y, z) \vec{u}_x$. De plus, il y a invariance par toute translation le long de Oy et de Oz ce qui entraîne que E_1 ne dépend ni de y , ni de z . On a donc :

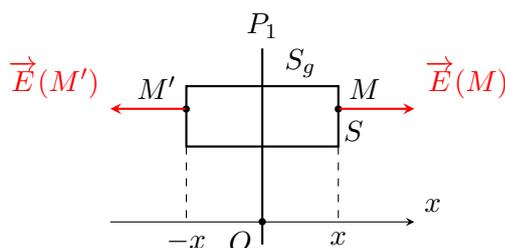
$$\boxed{\vec{E}_1(M) = E_1(x) \vec{u}_x}$$



- 2) Le plan de $P_1 = (Oyz)$ est un plan de symétrie des charges électriques : de part et d'autre de ce plan, le champ électrique est transformé en son symétrique. Nous avons donc :

$$\boxed{\vec{E}_1(M') = \text{sym}_{Oyz} \vec{E}_1(M) = -\vec{E}_1(M)}$$

- 3) On prend une surface de Gauss (surface fermée) S_g en forme de cylindre de génératrices // à Ox , de surface de base S et placé symétriquement par rapport au plan de P_1 . Un point M de coordonnée $x > 0$ est supposé être situé sur la base supérieure du cylindre.



Le théorème de Gauss donne :

$$\iint_{S_g} \vec{E}_1 \cdot d\vec{S} = \iint_{\text{Base sup}} \vec{E}_1(M) \cdot d\vec{S}_M + \iint_{\text{Base inf}} \vec{E}_1(M') \cdot d\vec{S}_{M'} + \iint_{\text{Surf lat}} \vec{E}_1 \cdot d\vec{S}_{\text{lat}}$$

L'intégrale sur la surface latérale du cylindre est nulle et les deux premières intégrales sont égales. Il vient alors :

$$\iint_{S_g} \vec{E}_1 \cdot d\vec{S} = 2 \iint_{\text{Base sup}} \vec{E}_1(M) \cdot d\vec{S}_M = 2 E_1(x) S = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$$

et donc $E_1(x) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ si $x > 0$. Dans le cas où $x < 0$, on utilise la propriété de symétrie de \vec{E}_1 de part et d'autre du plan de symétrie P_1 . En résumé :

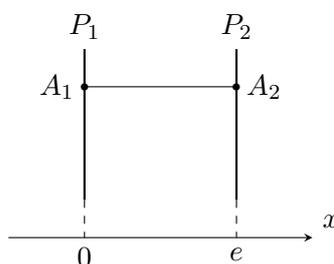
$$\vec{E}_1(M) = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

4) On peut dresser le tableau ci-dessous :

| x | $-\infty$ | 0 | e | $+\infty$ |
|-------------|------------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|------------------------------------|
| \vec{E}_1 | $-\sigma/2\varepsilon_0 \vec{u}_x$ | $\sigma/2\varepsilon_0 \vec{u}_x$ | $\sigma/2\varepsilon_0 \vec{u}_x$ | |
| \vec{E}_2 | | $\sigma/2\varepsilon_0 \vec{u}_x$ | $\sigma/2\varepsilon_0 \vec{u}_x$ | $-\sigma/2\varepsilon_0 \vec{u}_x$ |
| \vec{E} | $\vec{0}$ | $\sigma/\varepsilon_0 \vec{u}_x$ | $\vec{0}$ | |

On a donc : $\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{u}_x$ entre les deux plaques P_1 et P_2 et $\vec{E}(M) = \vec{0}$ partout ailleurs.

5) Appliquons le théorème de la circulation entre les deux plaques, le long d'un chemin rectiligne allant d'un point A_1 de P_1 vers un point A_2 de P_2 .



On obtient :

$$u_c = V_{P_1} - V_{P_2} = \int_{A_1}^{A_2} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_0^e \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{u}_z \cdot dz \vec{u}_z = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} e = \frac{qe}{S\varepsilon_0}$$

d'où l'expression :

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{e}$$

II. Introduction d'une plaque métallique entre les deux armatures du condensateur

1) Initialement, les électrons de conduction de \mathcal{P} se déplacent sous l'influence du champ électrique $\vec{E} = \sigma/\varepsilon_0 \vec{u}_x$ créé par le condensateur. Comme $\vec{F}_{el} = -e\vec{E}$, les électrons s'accumulent sur la face A et il y a un défaut d'électron sur la face B . On a donc :

$$\sigma_A < 0 \quad \text{et} \quad \sigma_B > 0$$

Comme la plaque est initialement non chargée, on a :

$$\sigma_A = -\sigma_B$$

- 2) Le champ électrique total \vec{E}_{tot} créé par l'ensemble $\{P_1 + P_2 + A + B\}$ est la superposition du champ \vec{E} créé par $\{P_1 + P_2\}$ qui a déjà été calculé à la question **1.3**) et des champs électriques \vec{E}_A et \vec{E}_B créés par les faces A et B . En ordonnant les résultats dans un tableau, nous avons :

| x | 0 | x_0 | $x_0 + d$ | e |
|-------------|--------------------------------------|--------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| \vec{E} | $\sigma/\varepsilon_0 \vec{u}_x$ | $\sigma/\varepsilon_0 \vec{u}_x$ | $\sigma/\varepsilon_0 \vec{u}_x$ | $\sigma/\varepsilon_0 \vec{u}_x$ |
| \vec{E}_A | $-\sigma_A/2\varepsilon_0 \vec{u}_x$ | $\sigma_A/2\varepsilon_0 \vec{u}_x$ | $\sigma_A/2\varepsilon_0 \vec{u}_x$ | $\sigma_A/2\varepsilon_0 \vec{u}_x$ |
| \vec{E}_B | $-\sigma_B/2\varepsilon_0 \vec{u}_x$ | $-\sigma_B/2\varepsilon_0 \vec{u}_x$ | $\sigma_B/2\varepsilon_0 \vec{u}_x$ | $\sigma_B/2\varepsilon_0 \vec{u}_x$ |

Pour $x_0 \leq x \leq x_0 + d$, le champ électrique total s'écrit :

$$\vec{E}_{\text{tot}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{u}_x + \frac{\sigma_A}{2\varepsilon_0} \vec{u}_x - \frac{\sigma_B}{2\varepsilon_0} \vec{u}_x = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{u}_x + \frac{\sigma_A}{\varepsilon_0} \vec{u}_x = \vec{0}$$

On en déduit que :

$$\boxed{\sigma_A = -\sigma \quad \text{et} \quad \sigma_B = \sigma}$$

- 3) D'après le tableau étudié à la question précédente, nous avons :

$$\boxed{\vec{E}_{\text{tot}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{u}_x \text{ pour } x \in [0, x_0] \text{ et } x \in [x_0, x_0 + d]}$$

ce qui signifie que dans ces deux régions les champs électriques créés par A et B se compensent.

Comme le champ électrique est nul dans le domaine $x \in [x_0, x_0 + d]$, le potentiel y est constant et $V(x_0) = V(x_0 + d)$. On en déduit que :

$$u_c = V(x=0) - V(x=e) = \{V(0) - V(x_0)\} + \{V(x_0+d) - V(e)\} = \frac{\sigma x_0}{\varepsilon_0} + \frac{\sigma(e - x_0 - d)}{\varepsilon_0}$$

et donc :

$$\boxed{u_c = \frac{\sigma(e-d)}{\varepsilon_0}}$$

- 4) En posant $\sigma = q/S$, il vient :

$$u_c = \frac{q(e-d)}{S\varepsilon_0} = \frac{q}{C'}$$

et donc :

$$\boxed{C' = \frac{\varepsilon_0 S}{e-d} > \frac{\varepsilon_0 S}{e} = C_0}$$

La plaque métallique permet donc *d'augmenter la capacité du condensateur*.

III. Réponse du circuit électrique en régime permanent sinusoïdal. D'après Centrale TSI

- 1) Durant le passage de l'onde acoustique, l'écartement entre les deux armatures du condensateur devient $e - x_1(t)$ et la capacité s'écrit :

$$C(t) = \frac{\varepsilon_0 S}{e - x_1(t)} = \frac{\varepsilon_0 S}{e} \frac{1}{1 - x_1/e} \approx \frac{\varepsilon_0 S}{e} \left(1 + \frac{x_1(t)}{e}\right) = C_0 + C_0 \frac{X_1}{e} \cos(\omega t)$$

et donc :

$$\boxed{C_1 = C_0 \frac{X_1}{e}}$$

2) On a :

$$u_c = \frac{q}{C(t)} \quad \text{et} \quad U_0 = u_C + u = \frac{q}{C(t)} + u \quad \text{avec} \quad i = \dot{q}$$

et donc :

$$C(t)U_0 = q(t) + C(t)u \implies U_0 \frac{dC}{dt} = i + \frac{d}{dt}(C(t)u)$$

d'où :

$$\boxed{U_0 \frac{dC}{dt} = \frac{u}{R} + \frac{d}{dt}(C(t)u) = \frac{u}{R} + \frac{dC}{dt}u + C(t)\frac{du}{dt}}$$

3) En notant que $\frac{dC}{dt} = -\omega C_1 \sin(\omega t)$, on obtient :

$$-C_1 U_0 \omega \sin(\omega t) = \left(\frac{1}{R} - C_1 \omega \sin(\omega t) \right) u + C_0 \left(1 + \frac{X_1}{e} \cos(\omega t) \right) \frac{du}{dt}$$

En divisant par C_0 , on obtient :

$$-\frac{X_1}{e} U_0 \omega \sin(\omega t) = \left(\frac{1}{RC_0} - \frac{X_1}{e} \omega \sin(\omega t) \right) u + \left(1 + \frac{X_1}{e} \cos(\omega t) \right) \frac{du}{dt}$$

Comme $X_1/e \ll 1$, on peut négliger $X_1/e \cos(\omega t)$ devant 1. De plus, on va supposer que :

$$\boxed{\frac{X_1}{e} \omega \ll \frac{1}{RC_0} \iff \frac{X_1}{e} \ll \frac{1}{RC_0 \omega}}$$

On peut alors écrire en première approximation :

$$\frac{du}{dt} + \frac{u}{RC_0} = -\frac{X_1 \omega}{e} U_0 \sin(\omega t) = \frac{X_1 \omega}{e} U_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

et on obtient bien le résultat demandé par l'énoncé.

$$\frac{du}{dt} + \omega_0 u = \omega A \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{avec} \quad A = \frac{U_0 X_1}{e} \quad \text{et} \quad \omega_0 = \frac{1}{RC_0}$$

4) Dans le domaine complexe : $\underline{u}(t) = U \exp(j\omega t) \exp(j\varphi_u)$, ce qui conduit à :

$$(j\omega + \omega_0) \underline{u} = \omega A \exp(j\omega t) \exp(j\pi/2) \implies \underline{u}(t) = \frac{\omega A \exp(j\omega t) \exp(j\pi/2)}{(j\omega + \omega_0)}$$

d'où :

$$\boxed{U = |\underline{u}| = \frac{A\omega}{\sqrt{\omega_0^2 + \omega^2}}}$$

5) On étudie les asymptotes basse et haute fréquence :

- Si $\omega \ll \omega_0$, $U \approx \frac{A\omega}{\omega_0}$ donc $20 \log U = 20 \log A + 20 \log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$. C'est une droite de pente +20 dB/décade.
- Si $\omega \gg \omega_0$, $U \approx A$ donc $20 \log U = 20 \log A$.

L'allure du graphe reproduit ces deux comportements asymptotiques. On remarque qu'il y a une asymptote basse fréquence qui varie de -8 dB à 30 Hz jusqu'à 0 dB à 70 Hz. On peut calculer sa pente :

$$p = \frac{0 + 8}{\log 70 - \log 30} \approx 22 \text{ dB/décade}$$

ce qui confirme le modèle théorique.

- 6) Les deux asymptotes se coupent en $\omega_0 = 2\pi f_0$. On lit sur le graphique $f_0 = 70$ Hz et donc :

$$C_0 = \frac{1}{2\pi f_0 R} = 2,3 \times 10^{-7} \text{ F}$$

- 7) On peut supposer qu'il y a une résonance mécanique à la fréquence $f_R = 2.10^4$ Hz, pour la pulsation caractéristique $\omega_R = \sqrt{k_e/m_e}$, ce qui donne :

$$\sqrt{k_e/m_e} = 2\pi f_R = 1,3.10^5 \text{ rad.s}^{-1}$$

PARTIE B. – CONDENSATEUR CYLINDRIQUE. D'après CCINP TSI

- 1) La répartition des charges étant uniforme, on obtient :

$$\sigma_1 = \frac{q}{2\pi R_1 h} \quad \text{et} \quad \sigma_2 = -\frac{q}{2\pi R_2 h}$$

- 2) Les plans $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ et $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ sont des plans de symétrie de la distribution de charges. On en déduit que : $\vec{E}(M) = E(r, \theta, z) \vec{e}_r$. Il y a invariance par toute rotation autour de Oz et toute translation le long de Oz (dans le cas où on suppose que tout se passe comme si les cylindres étaient infinis) et donc :

$$\vec{E}(M) = E(r) \vec{e}_r$$

- 3) On utilise le théorème de Gauss en choisissant comme surface de Gauss S_g un cylindre d'axe Oz , de rayon r et de hauteur h . Le flux de \vec{E} s'écrit :

$$\iint_{S_g} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{\text{Base inf}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{\text{Base sup}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_{\text{lat}}} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

Les deux premières intégrales sont nulles et le flux devient :

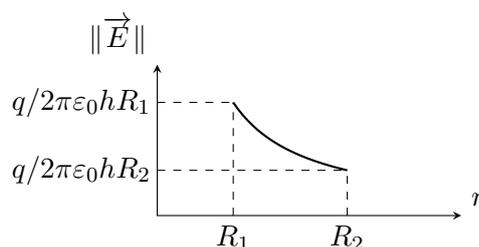
$$\Phi(\vec{E}/S_g) = \iint_{S_{\text{lat}}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = E(r) 2\pi r h$$

Comme les charges sont concentrées sur chaque surface, nous avons :

$$Q_{\text{int}} = \begin{cases} 0 & \text{si } r \in [0, R_1[\\ q & \text{si } r \in]R_1, R_2[\\ q - q = 0 & \text{si } r \in]R_2, +\infty[\end{cases}$$

d'où :

$$\vec{E}(M) = \begin{cases} \frac{q}{2\pi\epsilon_0 h r} \vec{e}_r & \text{si } r \in]R_1, R_2[\\ \vec{0} & \text{partout ailleurs} \end{cases}$$



On remarque deux discontinuités de E en $r = R_1$ et $r = R_2$ dues aux distributions surfaciques de charges. D'après la relation de passage, on s'attend à des discontinuités valant :

$$E(R_1^+) - E(R_1^-) = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 h R_1} \quad \text{et} \quad E(R_2^+) - E(R_2^-) = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0} = -\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 h R_2}$$

ce qui est bien vérifié.

- 4) L'utilisation du théorème de la circulation conduit à :

$$V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot dr \vec{e}_r = \int_{R_1}^{R_2} E(r) dr = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 h} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

et donc :

$$q = CU \quad \text{avec} \quad C = \frac{2\pi\varepsilon_0 h}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} = 4,0 \cdot 10^{-11} \text{ F}$$

- 5) Dans ce cas : $\left(\frac{R_2}{R_1}\right) = \left(1 + \frac{e}{R_1}\right) \approx \frac{e}{R_1}$ ce qui donne :

$$C \approx \frac{\varepsilon_0 2\pi R_1 h}{e}$$

ce qui correspond à la capacité d'un condensateur plan ayant des armatures de surface $S' = 2\pi R_1 h$, séparées d'une distance $e' = e$. Cela correspond donc au condensateur cylindrique déplié.

- 6) Elle est maximale en $r = R_1$. On a :

$$E_{\max} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 R_1 h} = \frac{CU}{2\pi\varepsilon_0 R_1 h} = \frac{U}{R_1 \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \leq E_0$$

d'où :

$$U \leq E_0 R_1 \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) = U_{\max}$$

A.N. : $U_{\max} = 2,1 \cdot 10^5 \text{ V}$, ce qui est une très forte valeur, due à la dimension peu usuelle du condensateur (valeur de R_1 élevée).

3 PIÈGES ÉLECTRONIQUES- CCINP MP

I. Piège 1 dimension

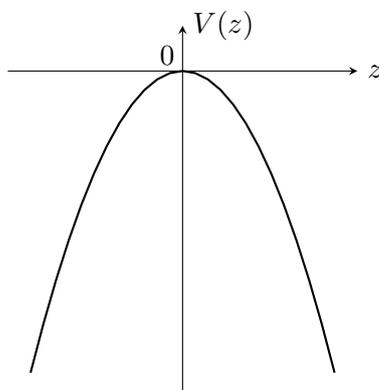
1) De façon évidente :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\frac{V_0}{2d^2} ; \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -\frac{V_0}{2d^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{V_0}{d^2}$$

d'où :

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

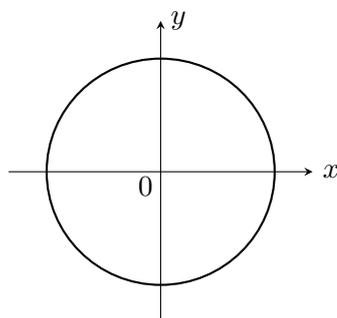
2) a) Pour $x = y = 0$, on a $V(z) = V_0 \frac{z^2}{2d^2}$, ce qui est une parabole. Il faut seulement faire attention au fait que $V_0 < 0$.



b) Dans le plan (Oxy) on a $z = 0$. La courbe équipotentielle $V = V_1 > 0$ a pour équation :

$$-V_0 \frac{x^2 + y^2}{4d^2} = V_1 \iff x^2 + y^2 = -4d^2 \frac{V_1}{V_0} > 0$$

ce qui est l'équation d'un cercle de centre $O(0,0)$ et de rayon $R = 2d\sqrt{\frac{V_1}{-V_0}}$.



3) Comme chaque électrode métallique est équipotentielle, on peut prendre un point quelconque sur celles-ci pour calculer la différence de potentiel. On aura par exemple :

$$V_0 = V(0, 0, z_0) - V(0, r_0, 0) = V_0 \frac{2z_0^2}{4d^2} + V_0 \frac{r_0^2}{4d^2} \quad \text{d'où} \quad 2z_0^2 + r_0^2 = 4d^2$$

- 4) a) On calcule $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V$, ce qui conduit à :

$$\vec{E} = V_0 \frac{x}{2d^2} \vec{u}_x + V_0 \frac{y}{2d^2} \vec{u}_y - V_0 \frac{z}{d^2} \vec{u}_z$$

On applique ensuite le principe fondamental de la dynamique (abrégé PFD par la suite) à l'électron, en ne tenant compte que de la force électrique et on projette sur la base cartésienne :

$$\ddot{x} = -\frac{eV_0}{2md^2} x ; \quad \ddot{y} = -\frac{eV_0}{2md^2} y \quad \text{et} \quad \ddot{z} = \frac{eV_0}{md^2} z$$

L'équation différentielle en z peut s'écrire :

$$\ddot{z} - \frac{eV_0}{md^2} z = 0$$

et ce mouvement ne peut être confiné si cette équation est celle d'un oscillateur harmonique, c'est à dire si $V_0 < 0$ (Dans le cas contraire, on obtient une solution composée d'exponentielles réelles et qui diverge lorsque $t \rightarrow +\infty$, cf. plus loin pour les mouvements en x et y).

En revanche, le mouvement selon x et y n'est pas confiné si $V_0 < 0$ puisque dans ce cas les équations s'écrivent (en x par exemple) :

$$\ddot{x} + \frac{eV_0}{2md^2} x = 0 \quad \text{d'où} \quad \ddot{x} - \frac{e|V_0|}{2md^2} x = 0$$

L'équation caractéristique s'écrit : $r^2 - \frac{e|V_0|}{2md^2} = 0$ ce qui conduit aux deux racines réelles :

$$r_+ = \sqrt{\frac{e|V_0|}{2md^2}} \quad \text{et} \quad r_- = -\sqrt{\frac{e|V_0|}{2md^2}}$$

d'où une solution de la forme :

$$x(t) = A \text{ch} \left(\sqrt{\frac{e|V_0|}{2md^2}} t \right) + B \text{sh} \left(\sqrt{\frac{e|V_0|}{2md^2}} t \right)$$

qui tend vers $\pm\infty$ quelles que soient les valeurs des constantes A et B .

- b) L'équation en z étant celle d'un oscillateur harmonique, sa pulsation propre est :

$$\omega_z = \sqrt{\frac{e|V_0|}{md^2}} = 1,58 \cdot 10^6 \text{ rad.s}^{-1}$$

ce qui correspond à une fréquence $f_z = \omega_z/2\pi = 25 \text{ MHz}$.

II. Piège 2 dimensions

- 5) À l'instant t le vecteur vitesse de l'électron s'écrit $\vec{v} = \dot{x} \vec{u}_x + \dot{y} \vec{u}_y + \dot{z} \vec{u}_z$ et son accélération est $\vec{a} = \ddot{x} \vec{u}_x + \ddot{y} \vec{u}_y + \ddot{z} \vec{u}_z$. Il n'est soumis qu'à la partie magnétique de la force de Lorentz :

$$\vec{F}_m = -e \vec{v} \wedge \vec{B} = -eB \dot{y} \vec{u}_x + eB \dot{x} \vec{u}_y$$

d'où les trois équations du mouvement en projection sur les vecteurs de la base cartésienne et en posant $\omega_c = eB/m$ (pulsation cyclotron) :

$$\ddot{x} = -\omega_c \dot{y} ; \quad \ddot{y} = \omega_c \dot{x} \quad \text{et} \quad \ddot{z} = 0$$

Application numérique : $\omega_c = 8,8 \cdot 10^8 \text{ rad.s}^{-1}$ et $f_c = \omega_c/2\pi = 140 \text{ MHz}$.

6) L'expression de $z(t)$ s'obtient très facilement :

$$\dot{z} = v_0 \cos \alpha \quad \text{et donc} \quad \boxed{z(t) = v_0 \cos \alpha t}$$

Le mouvement n'est pas confiné selon l'axe Oz , sauf si $\alpha = \pi/2$, mais on ne peut jamais réaliser ceci rigoureusement dans une expérience réelle. L'électron aura toujours une composante non nulle de sa vitesse initiale v_{0z} selon Oz (aussi petite soit-elle).

7) Posons $\underline{u} = x + iy$. Les équations précédentes conduisent donc à :

$$\underline{\ddot{u}} = \ddot{x} + i\ddot{y} = -\omega_c \dot{y} + i\omega_c \dot{x} = i\omega_c \dot{\underline{u}} \quad \text{donc} \quad \boxed{\underline{\ddot{u}} - i\omega_c \dot{\underline{u}} = 0}$$

L'équation caractéristique s'écrit $r^2 - i\omega_c r = 0$ et elle admet deux racines : $r = 0$ et $r = i\omega_c$. La solution générale est donc :

$$\underline{u}(t) = A + B e^{i\omega_c t}, \quad (A, B) \in \mathbb{C}^2$$

Les conditions initiales conduisent à :

$$\underline{u}(0) = A + B = 0 \quad \text{et} \quad \dot{\underline{u}}(0) = i\omega_c B = v_0 \sin \alpha$$

d'où :

$$A = i \frac{v_0 \sin \alpha}{\omega_c} \quad \text{et} \quad B = -i \frac{v_0 \sin \alpha}{\omega_c}$$

On en déduit que :

$$\underline{u}(t) = -i \frac{v_0 \sin \alpha}{\omega_c} \exp(i\omega_c t) + i \frac{v_0 \sin \alpha}{\omega_c}$$

et donc :

$$\boxed{x(t) = \operatorname{Re}[u(t)] = \frac{v_0 \sin \alpha}{\omega_c} \sin(\omega_c t) \quad \text{et} \quad y(t) = \operatorname{Im}[u(t)] = \frac{v_0 \sin \alpha}{\omega_c} (1 - \cos(\omega_c t))}$$

8) Dans le plan (Oxy) la trajectoire est un cercle :

$$x^2 + \left(y - \frac{v_0 \sin \alpha}{\omega_c} \right)^2 = \left(\frac{v_0 \sin \alpha}{\omega_c} \right)^2$$

de centre $\Omega(0, \frac{v_0 \sin \alpha}{\omega_c})$ et de rayon $R = \frac{v_0 \sin \alpha}{\omega_c}$. Le mouvement de l'électron est donc bien confiné dans le plan (Oxy).

A.N. : $R = 0,11$ mm ce qui est cohérent avec l'ordre de grandeur des dimensions des électrodes.

III. Piège 3 dimensions

8) On suppose bien sûr que $V_0 < 0$. En reprenant les équations du **I.** et **II.**, on aboutit à :

$$\boxed{\ddot{x} = -\omega_c y + \frac{\omega_z^2}{2} x ; \quad \ddot{y} = \omega_c x + \frac{\omega_z^2}{2} y \quad \text{et} \quad \ddot{z} + \omega_z^2 z = 0}$$

9) On obtient :

$$\boxed{\ddot{u} - i\omega_c u - \frac{\omega_z^2}{2} u = 0}$$

- 10) L'équation caractéristique associée à cette équation homogène a pour discriminant $\Delta = -\omega_c^2 + 2\omega_z^2 < 0$ et les deux racines de cette équation sont donc :

$$r_{\pm} = i \frac{\omega_c}{2} \pm i \frac{\sqrt{\omega_c^2 - 2\omega_z^2}}{2}$$

En posant :

$$\omega_1 = \frac{\omega_c}{2} + \frac{\sqrt{\omega_c^2 - 2\omega_z^2}}{2} \quad \text{et} \quad \omega_2 = \frac{\omega_c}{2} - \frac{\sqrt{\omega_c^2 - 2\omega_z^2}}{2}$$

on peut donc écrire la solution générale sous la forme :

$$u(t) = A_1 \exp(i\omega_1 t) + A_2 \exp(i\omega_2 t)$$

Application numérique : $f_1 = 275$ MHz et $f_2 = 4,5$ MHz.

- 11) Le mouvement est bien confiné le long de Oz d'après la question 4)a). Quant au mouvement dans le plan (Oxy) , il vérifie :

$$|u| = \sqrt{x^2 + y^2} \leq |A_1| |\exp(i\omega_1 t)| + |A_2| |\exp(i\omega_2 t)| = |A_1| + |A_2|$$

ce qui fait que la trajectoire dans ce plan est inscrite dans le cercle de rayon $R = |A_1| + |A_2|$. C'est donc aussi un mouvement confiné.