Corrigé du DM n°6

I. Exercice. D'après CCINP PC

1. On écrit :

$$\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\,\overrightarrow{u_r}$$

et donc :

$$V(r) = \begin{cases} -\dfrac{kr}{2\varepsilon_0} + C_1 & \text{si } r \in [0, R] \\[2ex] \dfrac{kR^2}{2\varepsilon_0\, r} + C_2 & \text{si } r \in [R, +\infty[\end{cases}$$

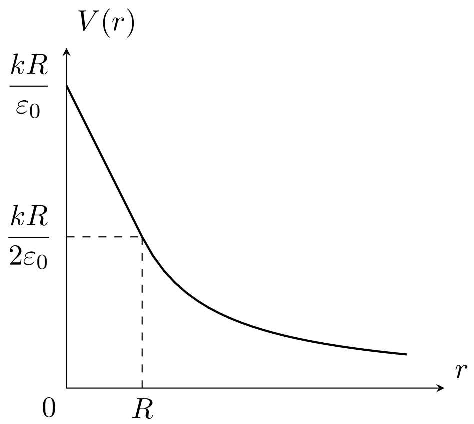
où C_1 et C_2 sont deux constantes d'intégration. Comme $\lim_{r\to+\infty} V(r) = 0$, cela entraîne que $C_2 = 0$. De plus, la continuité du potentiel en $r = R$ donne :

$$\frac{kR}{2\varepsilon_0} = -\frac{kR}{2\varepsilon_0} + C_1 \iff C_1 = \frac{kR}{\varepsilon_0}$$

d'où :

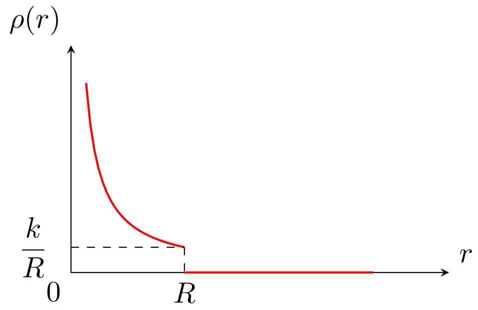
$$\boxed{V(r) = \begin{cases} \dfrac{k}{2\varepsilon_0}(2R - r) & \text{si } r \in [0, R] \\[2ex] \dfrac{kR^2}{2\varepsilon_0\, r} & \text{si } r \in [R, +\infty[\end{cases}}$$

2. Le graphe est représenté ci-dessous :



3. On utilise l'équation de Maxwell-Gauss : $\text{div}\,\overrightarrow{E} = \rho/\varepsilon_0$, ce qui donne :

$$\rho(r) = \begin{cases} \dfrac{k}{r} & \text{si } r \in]0, R[\\[2ex] 0 & \text{si } r \in]R, +\infty[\end{cases}$$



On remarque que ρ est discontinue en $r = R$.

4. Utilisons le théorème de Gauss en calculant le flux de $\overrightarrow{E}$ à travers une sphère de centre O et de rayon $r > R$. La charge intérieur à cette sphère étant q_0, Il vient :

$$\Phi(\overrightarrow{E}/S) = \iint_S \frac{kR^2}{2\varepsilon_0\, r^2}\,\overrightarrow{u_r}.\mathrm{d}S\,\overrightarrow{u_r} = \frac{kR^2}{2\varepsilon_0\, r^2} \times 4\pi r^2 = \frac{2\pi kR^2}{\varepsilon_0} = \frac{q_0}{\varepsilon_0}$$

d'où :

$$\boxed{q_0 = 2\pi kR^2}$$

5. Éliminons k de l'expression de $\overrightarrow{E}$ pour $r > R$:

$$\boxed{\overrightarrow{E} = \frac{kR^2}{2\varepsilon_0\, r^2}\,\overrightarrow{u_r} = \frac{q_0}{2\pi R^2}\,\frac{R^2}{2\varepsilon_0\, r^2}\,\overrightarrow{u_r} = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0\, r^2}\,\overrightarrow{u_r}}$$

On reconnaît là le champ électrique créé par une charge ponctuelle q_0 placée en O.

II. Matériau semi-conducteur

A. Conductivité d'un matériau semi-conducteur

1. $[\tau] = \dfrac{[m][v]}{[f]} = \dfrac{[v]}{[a]} = \text{s}$. C'est donc une grandeur homogène à un temps.
2. On applique le principe fondamental de la dynamique à un électron :

$$m\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} = -e\overrightarrow{E} - \frac{m}{\tau}\overrightarrow{v}$$

d'où, en notant $\overrightarrow{\lambda}$ un vecteur constant :

$$\overrightarrow{v}(t) = \overrightarrow{\lambda}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) - \frac{\tau e}{m}\overrightarrow{E}$$

Le régime permanent est atteint au bout de quelques τ (en pratique on prend 5τ). On peut alors négliger l'exponentielle devant le terme constant, ce qui donne :

$$\boxed{\overrightarrow{v} \approx -\frac{\tau e}{m}\overrightarrow{E}}$$

3. On notera qu'ici la vitesse de dérive se confond avec la vitesse individuelle de chaque électrons puisqu'ils ont tous la même vitesse en régime permanent. Par définition de $\overrightarrow{j_e}$ nous avons donc :

$$\overrightarrow{j_e} = -en_e\overrightarrow{v} = \frac{n_e\tau e^2}{m}\overrightarrow{E}$$

On voit donc que $\overrightarrow{j_e}$ et $\overrightarrow{E}$ sont proportionnels, ce qui constitue la *loi d'Ohm locale*. Par définition de la conductivité γ :

$$\boxed{\gamma = \frac{n_e\tau e^2}{m}}$$

4. La masse volumique du cuivre est : $\mu = d \times \mu_{\text{eau}} = 8900$ kg.m^{-3}. Il y a donc : $n_{Cu} = \dfrac{\mu}{M_{Cu}} \times \mathrm{N}_A$ atomes de cuivre par unité de volume, ce qui correspond à autant d'électrons de conduction. On a donc :

$$\boxed{n_e = \frac{d\,\mu_{\text{eau}}}{M_{Cu}} \times \mathrm{N}_A}$$

A.N. : $n_e = 8{,}2.10^{28}$ m^{-3}.

Il s'agit d'une densité volumique très supérieure à celle du silicium.

5. La conductivité γ doit donc vérifier une loi du type :

$$\ln\gamma = \ln A - \frac{B}{T}$$

qui est une fonction affine de $1/T$. Faisons donc une régression linéaire sur les couples $(\dfrac{1}{T}, \ln\gamma)$. Le coefficient de corrélation obtenu est tel que : $|r| = 0{,}99999769 > 0{,}99$ ce qui vérifie la loi. Le calcul de régression affiche les coefficients de la droite :

$$\boxed{\ln A \approx 12{,}9 \text{ donc } A = 4{,}0.10^5 \text{ S.m}^{-1} \text{ et } B = 1{,}1.10^2 \text{ K}}$$

6. À 300K, $\gamma_{Si} = 2{,}8.10^5$ S.m^{-1}, ce qui est une valeur élevée mais qui reste toutefois inférieure à la conductivité du cuivre.
7. On reprend l'expression de γ pour en déduire n_e :

$$n_e = \frac{m\gamma}{\tau e^2} = \frac{mA}{\tau e^2} \exp\left(-\frac{B}{T}\right)$$

Il suffit donc de poser $K = \dfrac{mA}{\tau e^2}$ et $B = E_s/k_B$, d'où :

$$\boxed{E_s = k_B B = 1{,}51.10^{-21}\ \text{J} = 9{,}5\ \text{meV}}$$

B. Étude électrostatique d'une jonction NP à l'équilibre

8. Considérons un cylindre d'axe O et dont la section droite a une surface S perpendiculaire à Ox. La charge totale contenu dans ce cylindre est :

$$\boxed{Q = \rho_1 L_1 S + \rho_2 L_2 S = 0 \iff \rho_1 L_1 + \rho_2 L_2 = 0}$$

9. $\text{div}\,\overrightarrow{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon}$.

Considérons un point M de coordonnées cartésiennes (x, y, z).

- Les plans (Mxy) et (Mxz) sont des plans de symétrie de la distribution de charge et on en déduit que : $\overrightarrow{E}(M) = E(x, y, z)\,\vec{u}_x$.
- Il y a invariance par toute translation parallèlement à Oy et à Oz et donc : $\overrightarrow{E}(M) = E(x)\,\vec{u}_x$

La divergence s'écrit donc : $\text{div}\,\overrightarrow{E} = \dfrac{\text{d}E}{\text{d}x}$ et on a :

$$\left\{\begin{array}{lcll} \dfrac{\text{d}E}{\text{d}x} & = & \dfrac{\rho_1}{\varepsilon} & \text{si } -L_1 \leqslant x < 0 \\[2ex] \dfrac{\text{d}E}{\text{d}x} & = & \dfrac{\rho_2}{\varepsilon} & \text{si } 0 < x \leqslant L_2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lcll} E(x) & = & \dfrac{\rho_1 x}{\varepsilon} + C_1 & \text{si } -L_1 \leqslant x < 0 \\[2ex] E(x) & = & \dfrac{\rho_2 x}{\varepsilon} + C_2 & \text{si } 0 < x \leqslant L_2 \end{array}\right.$$

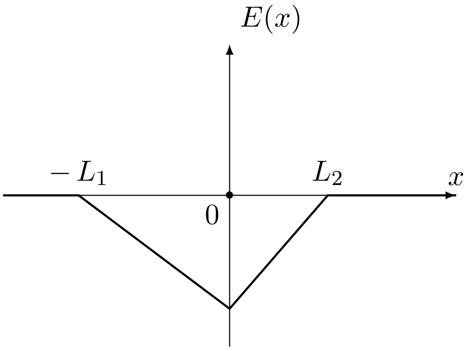
et $E(x) = 0$ partout ailleurs. La continuité de E en $-L_1$ et L_2 donne :

$$-\frac{\rho_1 L_1}{\varepsilon} + C_1 = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\rho_1 L_2}{\varepsilon} + C_2 = 0$$

d'où :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{lcll} E(x) & = & \dfrac{\rho_1(x + L_1)}{\varepsilon} & \text{si } -L_1 \leqslant x < 0 \\[2ex] E(x) & = & \dfrac{\rho_2(x - L_2)}{\varepsilon} & \text{si } 0 < x \leqslant L_2 \end{array}\right.}$$

On remarque que $E(0^-) = \dfrac{\rho_1 L_1}{\varepsilon}$ et $E(0^+) = -\dfrac{\rho_2 L_2}{\varepsilon}$ et donc que $E(0^-) = E(0^+)$ d'après la condition de neutralité de la charge électrique établie à la question 8. Il y a donc aussi continuité de E en $x = 0$.

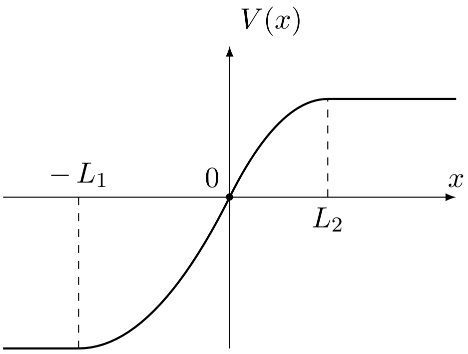


10. $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V = -\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\,\vec{u}_x$. On en déduit, en considérant que $V = 0$ si $x = 0$:

$$\boxed{\begin{cases} V(x) &= K_1 \quad \text{si } x \leqslant 0 \\[2ex] V(x) &= -\dfrac{\rho_1 x^2}{2\varepsilon} - \dfrac{\rho_1 L_1 x}{\varepsilon} \quad \text{si } -L_1 \leqslant x < 0 \\[2ex] V(x) &= -\dfrac{\rho_2 x^2}{2\varepsilon} + \dfrac{\rho_2 L_2 x}{\varepsilon} \quad \text{si } 0 < x \leqslant L_2 \\[2ex] V(x) &= K_2 \quad \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}}$$

où K_1 et K_2 sont deux constantes. La continuité de V en $x = -L_1$ et $x = L_2$ conduit à :

$$\boxed{K_1 = \frac{\rho_1 L_1^2}{2\varepsilon} \quad \text{et} \quad K_2 = \frac{\rho_2 L_2^2}{2\varepsilon}}$$



11. On a immédiatement :

$$\boxed{U_0 = K_2 - K_1 = \frac{\rho_2 L_2^2 - \rho_1 L_1^2}{2\varepsilon} = -\frac{\rho_1 L_1 (L_1 + L_2)}{2\varepsilon}}$$

en utilisant le résultat de la question 8.

12. Manifestement :

$$\boxed{\rho_1 = -\,eN_1 \quad \text{et} \quad \rho_2 = eN_2}$$

De plus, d'après la question 8. :

$$\frac{L_1}{L_2} = -\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{N_2}{N_1} \ll 1$$

N_1 est donc négligeable devant N_2 et donc :

$$\boxed{\delta = L_1 + L_2 \approx L_2}$$

13. Utilisons le résultat de la question 11. Comme $\rho_1 L_1 = -\rho_2 L_2$, il vient :

$$U_0 = \frac{\rho_2 L_2 (L_1 + L_2)}{2\varepsilon} \approx \frac{\rho_2 {L_2}^2}{2\varepsilon} = \frac{e N_2 \delta^2}{2\varepsilon}$$

et donc :

$$\boxed{\delta = \sqrt{\frac{2\varepsilon U_0}{e N_2}} = 0{,}57\ \mu m}$$