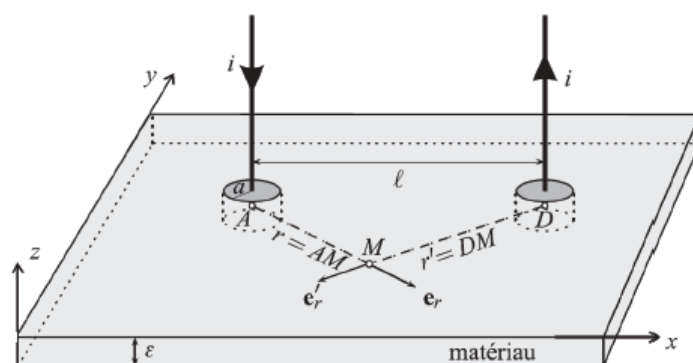


DM n°7 (pour le vendredi 25 novembre 2022)

1 Mesure de conductivité

On étudie un matériau conducteur de conductivité γ , en régime permanent. Le courant électrique i est amené en un point A du matériau par un fil, perpendiculaire à la plaque, confondu avec l'axe (Az) . Ce fil est relié au matériau par une électrode cylindrique de faible rayon. Ce courant électrique repart par un fil de même nature et fixé de la même manière au point D ; l'ensemble est représenté sur la Figure ci-dessous.



On supposera que le matériau obéit à la loi d'Ohm locale, c'est à dire : $\vec{j} = \gamma \vec{E}$. On admettra qu'en régime permanent (stationnaire), même si les charges électriques ne sont pas fixes, on a toujours la relation : $\vec{E} = -\text{grad } V$.

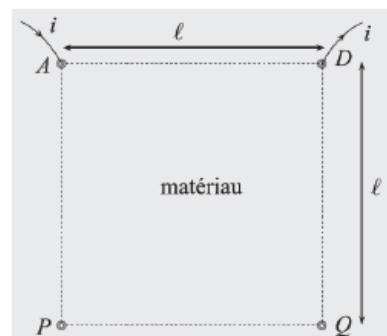
- 1) On considère tout d'abord une situation simplifiée, à symétrie cylindrique, dans laquelle on supprime le contact de départ en D . Le courant arrivant en A se répartit donc dans l'ensemble du matériau avec la symétrie de révolution d'axe (Az) : la densité volumique de courant \vec{j} en un point M s'y écrit $\vec{j}(M) = j(r) \vec{e}_r$, où r désigne la distance de M à l'axe (Az) et \vec{e}_r le vecteur unitaire radial de cet axe.

Exprimer $j(r)$ en fonction de r , ε et I .

- 2) On considère deux points M_1 et M_2 de la plaque et on note $r_1 = AM_1$ et $r_2 = AM_2$. Déterminer la différence de potentiel $U = V(M_1) - V(M_2)$ en fonction de I , ε , γ et du quotient r_2/r_1 .
- 3) On remet en place le contact de départ du courant en D . En procédant par superposition de deux situations analogues à celle de la question 1, déterminer la nouvelle expression de $U = V(M_1) - V(M_2)$ en fonction de I , ε , γ , r_1 , r_2 , $r'_1 = DM_1$ et $r'_2 = DM_2$.
Que vaut cette différence de potentiel si M_1 et M_2 sont sur la médiatrice du segment AD ? Commenter ce résultat.
- 4) On note $\ell = AD$ et a le rayon des électrodes cylindriques de contact électrique en A et D ; ces électrodes sont formées d'un matériau métallique très bon conducteur électrique et sont donc considérées comme équipotentielles, de potentiels respectifs V_A et V_D . Montrer que si $\ell \gg 1$, la résistance électrique de la plaque $R = U/I$ s'écrit sous la forme $R \approx R_0 \ln\left(\frac{\ell}{a}\right)$, où l'on exprimera R_0 en fonction de γ et ε .
- 5) Application numérique : l'épaisseur de la plaque de semiconducteur est $\varepsilon = 1,0$ mm. On réalise le dispositif de la figure 2 avec $\ell = 2$ cm et $a = 0,5$ mm. La conductivité du matériau (silicium dopé) est $\gamma = 2,2 \cdot 10^4$ S.m⁻¹. Calculer R et commenter sa valeur numérique.

Pour limiter les erreurs dans les mesures de tension on utilise la géométrie de van der Pauw qui élimine l'influence du diamètre des électrodes. Sur la Figure ci-contre, les électrodes A et D sont utilisées pour l'arrivée et le départ du courant, et les électrodes P et Q pour la mesure de différence de potentiel $U = V(P) - V(Q)$. On définit enfin la résistance parallèle $R_{//} = U/I$.

- 6) Déterminer $R_{//}$ en fonction de γ et ε .



2 Expression approchée du champ magnétique créé par une bobine (d'après Centrale)

La perméabilité du vide est $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$

- Démontrer soigneusement l'expression du champ magnétique \vec{B} à l'intérieur d'un solénoïde de longueur infinie, caractérisé par un rayon R_b et n de spires par mètre parcourues par un courant d'intensité I_0 . On pourra admettre que le champ magnétique est nul à l'extérieur.
- On s'intéresse maintenant au champ magnétique produit par la bobine ci-dessous. Le sens de la flèche du courant dans chaque spire est indiqué par les ronds pointés ou les ronds avec une croix. La bobine est constituée d'un enroulement de $N = 1000$ spires circulaires de même rayon R_b , parcourues par un courant $I_0 > 0$.

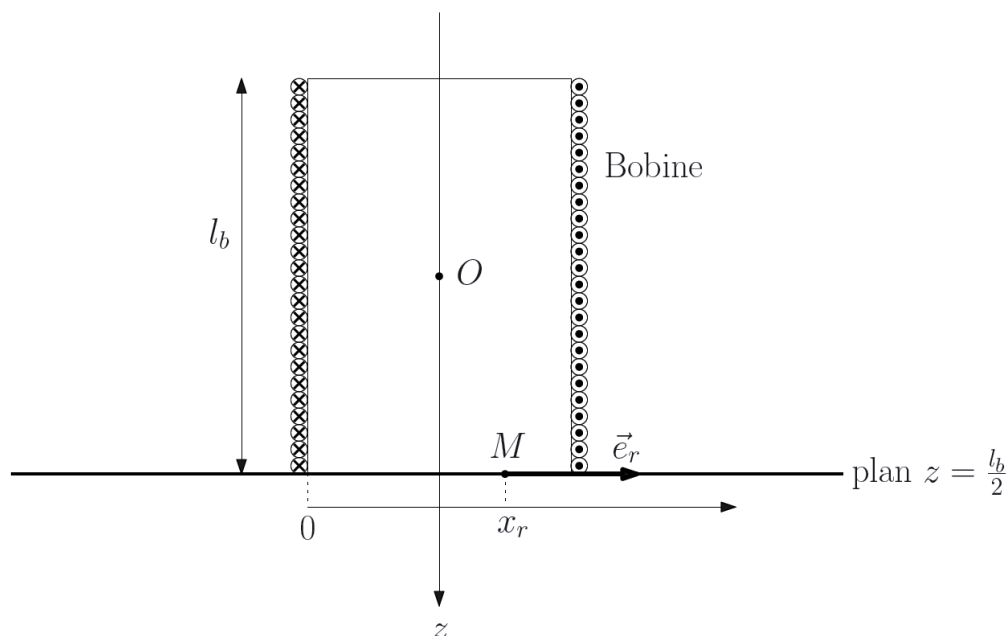


FIGURE 1 – Conventions d'orientations et notations

Un logiciel de simulation a permis d'obtenir la carte de champ \vec{B} de la Figure 2 qui représente la bobine à une échelle réduite mais qui respecte les proportions des longueurs.

La Figure 3 représente l'amplitude du champ magnétique en un point M appartenant au plan $z = \ell_b/2$ en fonction de son abscisse x_r sur l'axe (M, \vec{e}_r) , l'origine de cet axe étant choisie sur un des côtés de la bobine (profil radial). Sur cette figure est aussi représenté l'amplitude de \vec{B} en un point M appartenant à l'axe (Oz) en fonction de sa coordonnée z , l'origine de cet axe étant choisie au centre O de la bobine (profil axial).

- À l'aide des différentes figures et courbes, estimer la valeur du rayon moyen R_b de l'enroulement du fil ainsi que la longueur ℓ_b de la bobine.
- En admettant que l'expression du champ magnétique calculé à la première question reste valide au centre O de la bobine, en déduire la valeur de l'intensité I_0 .
- Pourquoi le champ produit par cette bobine s'écarte-t-il du modèle du solénoïde infini dès qu'on s'éloigne du centre de la bobine ?
- On considère le point M situé sur l'axe de la bobine à $d = 7,5$ cm de son centre O . On suppose que le champ magnétique en ce point est donné par l'expression :

$$\vec{B}(M) = \alpha \frac{\mu_0 N I_0}{\ell_b} \vec{e}_z$$

Estimer la valeur numérique de la constante α .

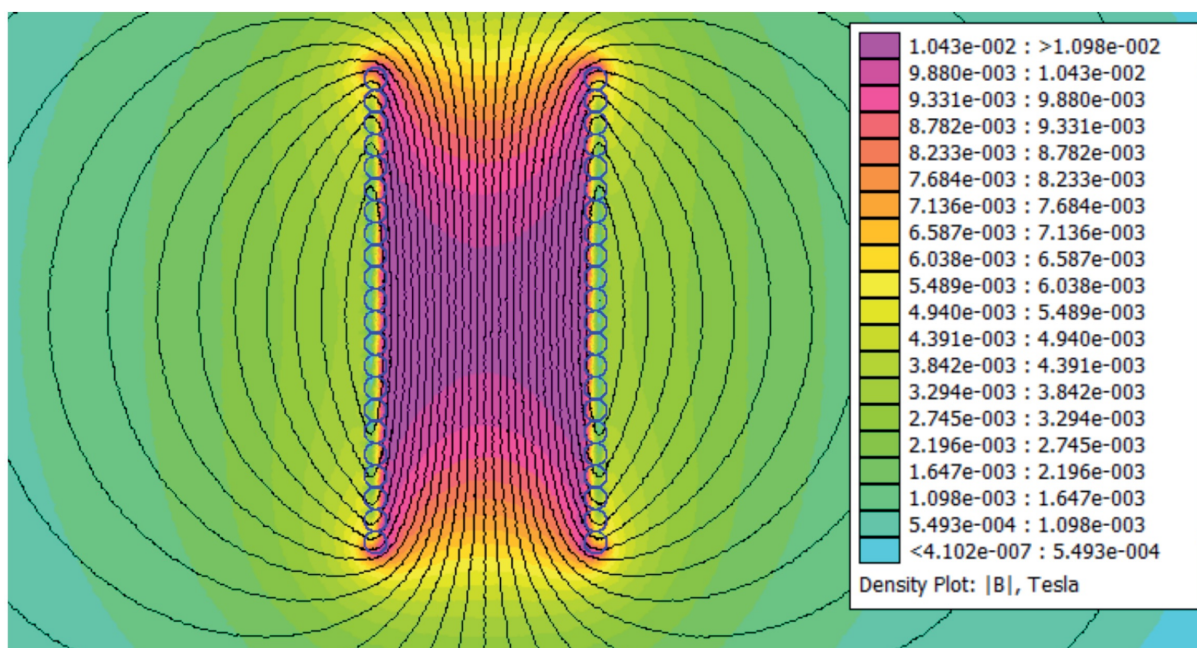


FIGURE 2 – Carte des lignes de champ magnétique obtenue par simulation.

- Justifier que le champ créé en un point M quelconque de l'espace est de la forme

$$\vec{B}(M) = B_r(r, z) \vec{e}_r + B_z(r, z) \vec{e}_z$$

Qu'en est-il pour un point M de l'axe de la bobine ?

- Indiquer le sens du champ magnétique sur les lignes de champ sur la Figure 2 (à recopier rapidement sur la copie).

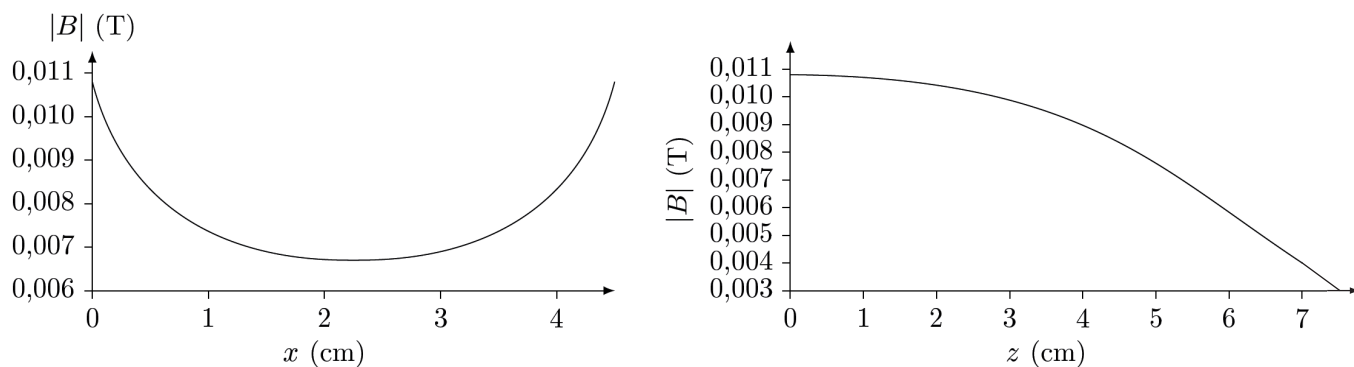


FIGURE 3 – Profils respectivement radial et axial d'amplitude du champ magnétique.

5. Dans quelle zone le champ magnétique est-il le plus intense? Aurait-on pu déduire ce résultat directement à partir de la répartition des lignes de champ de la Figure 2, c'est à dire sans l'échelle de teinte codant l'amplitude du champ magnétique? On démontrera précisément la propriété utilisée à partir de l'équation de Maxwell-Thomson (ou Maxwell-Flux).