

Corrigé du DM n°7

1 Mesure de conductivité d'après Mines PSI

1. On utilise la conservation du flux de \vec{j} en régime stationnaire. L'intensité i qui arrive par le fil Az doit être égale à celle qui traverse un cylindre \mathcal{C} de révolution d'axe Az , de rayon r et de hauteur ε . On en déduit que :

$$i = \iint_{\mathcal{C}} \vec{j} \cdot \vec{dS} = \iint_S j(r) \vec{e}_r \cdot \vec{e}_r dS = j(r) 2\pi r \varepsilon$$

d'où :

$$j(r) = \frac{i}{2\pi\varepsilon r}$$

Le conducteur étant ohmique, on a :

$$\vec{E} = \frac{\vec{j}}{\gamma} = \frac{i}{2\pi\varepsilon\gamma r} \vec{e}_r$$

et comme en régime permanent, $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V$, on en déduit en utilisant le gradient en coordonnées cylindriques que V ne dépend que de r et que :

$$\frac{dV}{dr} = -\frac{i}{2\pi\varepsilon\gamma r} \implies V(r) = -\frac{i}{2\pi\varepsilon\gamma} \ln(r) + C$$

où C est une constante. Il vient donc :

$$V(M_1) - V(M_2) = \frac{i}{2\pi\varepsilon\gamma} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

2. En remettant le contact en D il y a superposition :

- de la densité de courant \vec{j} déjà calculée en supprimant le contact en D ;
- de la densité de courant \vec{j}' que l'on obtiendrait en supprimant le contact en A . Par analogie avec le calcul précédent, elle s'écrit :

$$\vec{j}' = -\frac{i}{2\pi\varepsilon\gamma r'} \vec{e}_r$$

ce qui donne un champ électrique total qui est la superposition des champs électriques liés à \vec{j} et à \vec{j}' et donc une différence de potentiel totale qui est aussi la somme des différences de potentiel associées à chacune de ces deux situations. On a donc :

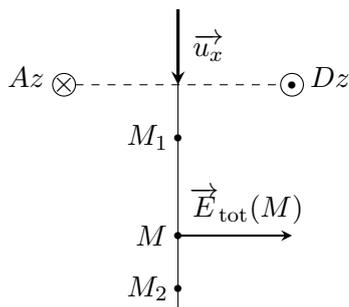
$$V(M_1) - V(M_2) = \frac{i}{2\pi\varepsilon\gamma} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) - \frac{i}{2\pi\varepsilon\gamma} \ln\left(\frac{r'_2}{r'_1}\right)$$

En particulier, si M_1 et M_2 sont sur la médiatrice du segment AD , nous avons $r_1 = r'_1$ et $r_2 = r'_2$, ce qui entraîne :

$$V(M_1) - V(M_2) = 0$$

Ceci n'est pas étonnant car le plan contenant cette médiatrice et parallèle aux axes Az ou Dz est un plan d'antisymétrie des courants et donc du champ électrique puisque $\vec{E}_{\text{tot}} = \gamma \vec{j}_{\text{tot}}$. En tout point M de cette médiatrice, on a donc : $\vec{E}_{\text{tot}}(M) \perp \vec{u}_x$. Le théorème de la circulation entraîne donc que :

$$V(M_1) - V(M_2) = \int_{M_1}^{M_2} \vec{E}_{\text{tot}}(M) \cdot d\ell \vec{u}_x = 0$$



3. Cela correspond à la situation où $r_1 = a$, $r_2 = \ell - a$, $r'_1 = \ell - a$ et $r'_2 = a$. On obtient donc :

$$V_A - V_D = \frac{i}{\pi\epsilon\gamma} \ln\left(\frac{\ell - a}{a}\right) \approx \frac{i}{\pi\epsilon\gamma} \ln\left(\frac{\ell}{a}\right) \quad \text{si } \ell \gg a$$

On reconnaît la loi d'Ohm et on peut définir une résistance :

$$R = \frac{1}{\pi\epsilon\gamma} \ln\left(\frac{\ell}{a}\right)$$

4. A.N. : $R = 5,3 \cdot 10^{-2} \Omega$. Il s'agit d'une résistance très petite et elle ne doit pas être facile à mesurer. De plus, elle doit dépendre fortement de la valeur de a qui doit être connue et contrôlée avec précision.
5. La configuration est maintenant telle que :

$$r_1 = \ell ; \quad r_2 = \sqrt{2}\ell ; \quad r'_1 = \sqrt{2}\ell \quad \text{et} \quad r'_2 = \ell$$

ce qui donne :

$$V_P - V_Q = \frac{i}{\pi\epsilon\gamma} \ln(\sqrt{2}) \iff R_{//} = \frac{1}{\pi\epsilon\gamma} \ln(\sqrt{2}) \stackrel{AN}{=} 5,0 \cdot 10^{-3} \Omega$$

On s'est donc bien affranchi de la valeur exacte de a mais la petitesse de $R_{//}$ rend néanmoins encore les mesures délicates.

2 Expression approchée du champ magnétique créé par une bobine (d'après Centrale)

1) Champ créé par une bobine

1) cf cours :
$$\begin{cases} \vec{B}_{\text{int}} = \mu_0 n i \vec{U}_z \\ \vec{B}_{\text{ext}} = \vec{0} \end{cases}$$
 avec i orienté positivement autour de \vec{U}_z avec la règle de la main droite.

2) a) * D'après la figure 1, le profil radial de l'amplitude du champ \vec{B} tracé dans la figure 3 à gauche correspond à la sortie de la bobine, et la valeur maximale du champ ($B \approx 18 \text{ mT}$) est à la fois celle au niveau des bords et celle du centre du solénoïde (voir figure 2).

Le diamètre de la bobine, lu sur la figure 3 à gauche vaut donc environ 5 cm , soit $R_b = 2,5 \text{ cm}$.

* Sur le schéma de la figure 2, on mesure à la règle :

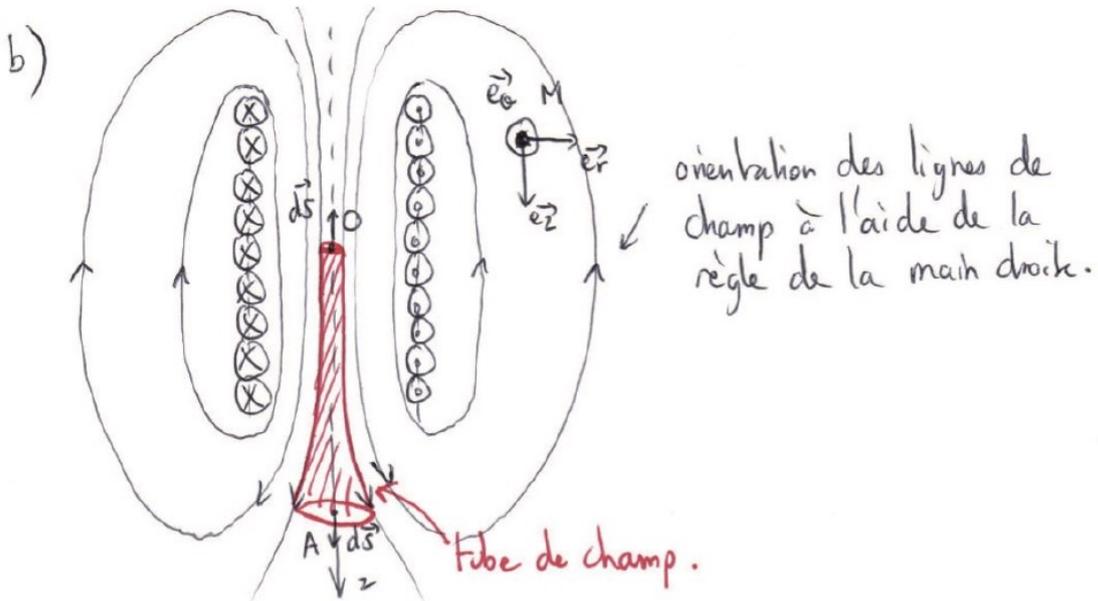
$$\begin{aligned} 2R_{bf} &= 2,3 \text{ cm} \\ l_{bf} &= 4,7 \text{ cm} \end{aligned} \Rightarrow \boxed{l_b = l_{bf} \times \frac{R_b}{R_{bf}} \approx 10 \text{ cm}}$$

Cette valeur est cohérente avec le profil de droite de la figure 3, car le champ B diminue sérieusement à partir de $z \approx 4 \text{ cm}$ (correspond à environ $l_b/2$).

* En faisant l'hypothèse que le calcul du champ pour un solénoïde infini est valable au centre O , on obtient $B(0) = \mu_0 \frac{N}{l_b} i_0$ et on lit $B(z=0) = 18 \text{ mT}$ sur la figure 2 de droite $\Rightarrow i_0 = \frac{B(0) l_b}{\mu_0 N} = \frac{18 \cdot 10^{-3} \times 10 \cdot 10^{-2}}{4\pi \cdot 10^{-7} \times 10^3}$

$i_0 \approx 1,4 \text{ A}$ C'est une valeur raisonnable (bien qu'assez importante) pour un courant dans une bobine.

* Le champ \vec{B} s'éloigne de la valeur attendue pour un solénoïde infini dès qu'on s'éloigne de O car la condition $l_b \gg R_b$ n'est pas vérifiée.



b) Le champ magnétique est plus intense au centre de la bobine, c'est à dire dans la zone où les lignes de champ sont les plus resserrées.

Cette propriété vient du fait que \vec{B} est à flux conservatif, c'est à dire que $\text{div } \vec{B} = 0 \Rightarrow \iiint \text{div } \vec{B} d\tau = \oint_{\text{surface fermée}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$.

En appliquant cette propriété à la surface ^{Ostrogadsky} fermée constituée par le tube de champ dessiné sur la figure ci-dessus, on obtient $\phi_{\text{tube de champ}} = 0 = \phi(O) + \phi_{\text{latéral}} + \phi(A)$

En supposant le champ uniforme sur les faces d'entrée de section s en O et de sortie de section S en A :

$$-B(O)s + B(A)S = 0 \Rightarrow B(A) = B(O) \frac{s}{S} < B(O)$$

Le champ est donc plus faible dans les zones où ≤ 1 les lignes de champ sont moins resserrées.

3) * En utilisant le schéma précédent, on voit que la distribution de courant est :

→ invariante par rotation d'angle θ autour de (Oz)
 $\Rightarrow \vec{B}$ ne dépend pas de θ .

→ antisymétrique par rapport au plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$, donc \vec{B}_M appartient à ce plan et $\vec{B}(M) \perp \vec{e}_\theta$

Finalement, on obtient : $\boxed{\vec{B}(M) = B_r(r, z, t) \vec{e}_r + B_z(r, z, t) \vec{e}_z}$

* Si de plus M est un point de l'axe (Oz) de la bobine, alors :
 → $r=0$ est fixé, donc \vec{B} ne dépend plus que de z et de t (dans l'hypothèse où i dépend du temps)
 → $(M, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ est également un plan d'antisymétrie de la distribution de courant et $\vec{B}(M) \perp \vec{e}_r$

donc $\boxed{\vec{B}(M \in \text{l'axe}) = B_z(z, t) \vec{e}_z}$

4) L'amplitude du champ \vec{B} en A peut être lue sur le profil axial : $B(A) = B(z=7,5\text{cm}) = 3\text{mT}$

$$\text{donc } \alpha = \frac{\ell_b B(A)}{\mu_0 N i_0} = \frac{10 \cdot 10^{-2} \times 3 \cdot 10^{-3}}{4\pi \cdot 10^{-7} \times 10^3 \times 1,4} \approx \underline{0,17} \quad (\text{pas d'unité})$$