DM n°8 : À propos du magnétisme

Les phénomènes magnétiques sont connus depuis l'antiquité. Thalès de Millet (VI^{ème} siècle avant J.C.) avait remarqué que certaines pierres, dites aimants naturels, sont capables d'exercer des actions sur certains objets métalliques ou entre-elles.

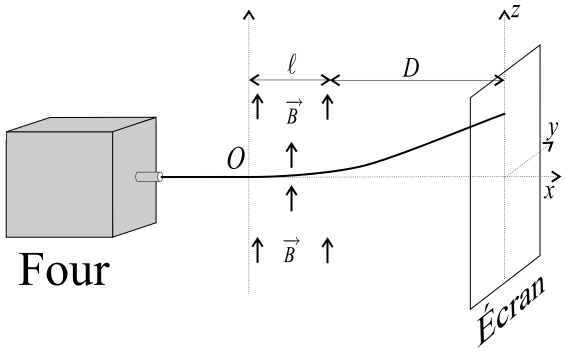
I. L'expérience de Stern et Gerlach. Un classique à savoir traiter

Dans une enceinte, où règne une faible pression, est placé un four contenant du lithium porté à la température T. Le lithium se vaporise et le gaz d'atomes obtenu se comporte comme un gaz parfait monoatomique à la température T. Un ensemble d'ouvertures pratiquées dans le four permet d'obtenir un jet d'atomes de lithium. On suppose que ce jet est monocinétique et donc que les atomes ont tous la même énergie cinétique $E_{co} = \dfrac{1}{2}m\|\overrightarrow{v_0}\|^2$ où m est la masse d'un atome de lithium et $\overrightarrow{v_0}$ la vitesse moyenne des atomes dans le four. On supposera qu'en sortie du four $\overrightarrow{v_0} = v_0\,\overrightarrow{e_x}$. Le poids des atomes de lithium est négligeable dans toute cette expérience.

On verra dans le cours de physique statistique que $\|\overrightarrow{v_0}\|$ est relié à T par l'équation :

$$\|\overrightarrow{v_0}\| = \sqrt{\frac{3k_B\mathrm{T}}{m}}$$

où $k_B = 1{,}38.10^{-23}$ J.K^{-1} est la constante de Boltzmann.



Données numériques :

Constante d'Avogadro : $N_A = 6{,}02.10^{23}$ mol^{-1}
Masse molaire du Lithium : $M = 6{,}9$ g.mol^{-1}

1. On règle la température T de façon à obtenir $E_{co} = 1{,}6.10^{-20}$ J. Calculer la valeur numérique de T.

   En sortie du four, le jet d'atomes de lithium passe dans une région où règne un champ magnétique $\overrightarrow{B} = B(z)\,\overrightarrow{e_z}$ tel que $B(z) = az$ où a est une constante positive (voir Figure). On admet que cette région est de largeur ℓ et qu'en dehors de celle-ci, le champ magnétique est négligeable. On constate que le jet est dévié et que son impact sur un écran situé à l'abcisse $d = \ell + D$ se situe à une cote z_0 non nulle. Cette déviation est explicable par le fait que les atomes de lithium sont porteurs de moments dipolaires magnétiques $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ constants et que dans la zone où règne le champ magnétique ils sont soumis à une force magnétique dérivant de l'énergie potentielle $E_p = -\overrightarrow{\mathcal{M}}.\overrightarrow{B}$.

2. Après avoir exprimé cette force, établir, en fonction de a, $\mathcal{M}_z = \overrightarrow{\mathcal{M}}.\overrightarrow{e_z}$ et E_{co}, la relation entre z et x décrivant la trajectoire d'un atome dans la région où règne le champ magnétique linéaire.
3. Exprimer la cote z_0 en fonction de D, ℓ, E_{co}, a et $\mathcal{M}_z$.
4. On observe en fait sur l'écran deux taches symétriques par rapport à Ox. Que peut-on en déduire ?
5. On choisit $E_{co} = 1{,}6.10^{-20}$ J, a =10 T.m^{-1}, $\ell = 10$ cm, $D = 10$ m et on observe $z_0 = \pm 3$ mm. Calculer la composante $\mathcal{M}_z$ du moment magnétique des atomes de lithium.
6. On admet que le moment magnétique de l'atome de lithium est dû à son unique électron de valence. Celui-ci possède un moment cinétique interne $\overrightarrow{S}$ dit de "rotation propre" et appelé *spin*. À ce spin correspond un moment magnétique :

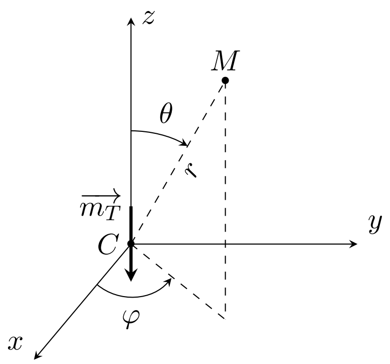
$$\overrightarrow{M} = -\,2{,}000232\,\frac{e}{2m_e}\,\overrightarrow{S}$$

Déterminer les deux valeurs possibles de la composante S_z en posant $S_z = \alpha\,\hbar$: on déterminera les deux valeurs numériques de α.

II. Mesure de la composante horizontale du champ magnétique terrestre. Problème Centrale

Données : rayon terrestre $R_T = 6\ 400$ km ; $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ H.m^{-1}
Latitude : position en degrés du parallèle du lieu (0° à l'équateur, +90° au pôle Nord).
Longitude : position en degrés du méridien du lieu.

On admet que le champ magnétique terrestre $\overrightarrow{B}$ est assimilable au champ magnétique d'un dipôle magnétique situé au centre C de la Terre, de moment magnétique $\overrightarrow{m_T} = -\,m_T\,\overrightarrow{e_z}$ ($m_T > 0$).



Le champ magnétique est donné avec une très bonne approximation par :

$$\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{3\,(\overrightarrow{m_T}.\overrightarrow{r})\,\overrightarrow{r} - r^2\,\overrightarrow{m_T}}{r^5}$$

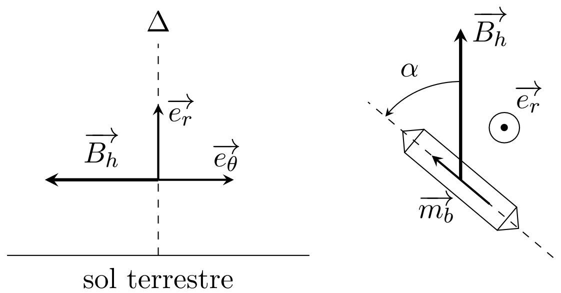
Un point M de l'espace est repéré par ses coordonnées sphériques (r, θ, φ) par rapport à l'axe géomagnétique Cz.

1. Expliciter les composantes de $\overrightarrow{B}$ sur la base locale sphérique $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_\varphi})$.
2. On donne les coordonnées GPS de Châtenay-Malabry : latitude N 48,75°, longitude E 2,26°, altitude h = 104 m au-dessus du niveau de la mer. Champ magnétique mesuré : $B = 4{,}7.10^{-5}$ T. En déduire le moment magnétique terrestre m_T.

3. Tracer qualitativement quelques lignes de champ magnétique.

On se propose de déterminer l'intensité de la composante horizontale $B_h = |B_\theta|$ du champ magnétique terrestre en un point M à la surface de la Terre, en mesurant les petites oscillations dans un plan horizontal d'une boussole.

Celle-ci est un petit solide qui peut tourner sans frottement autour de son axe vertical Δ. Elle est assimilable à un dipôle magnétique de moment magnétique $\overrightarrow{m_b}$ (colinéaire à l'axe de l'aiguille de la boussole) et de moment d'inertie J par rapport à son axe de rotation. On note α l'angle entre $\overrightarrow{B_h}$ et $\overrightarrow{m_b}$.



4. Quelle est la position d'équilibre stable de la boussole dans le champ magnétique terrestre ? Justifier la réponse à l'aide d'un raisonnement sur l'énergie potentielle.
5. Établir l'équation différentielle du mouvement de l'aiguille soumise au champ magnétique terrestre.
6. En déduire la période T_0 des petites oscillations de cette aiguille autour de sa position d'équilibre stable, en fonction de B_h, J et de la norme m_b du moment magnétique de la boussole.
7. Les valeurs de m_b et J n'étant pas connues, on utilise le champ magnétique $\overrightarrow{B_e}$ créé par des bobines de Helmoltz pour s'en affranchir. Pour notre expérience, B_e est d'intensité 100 μT et il est orienté dans le même sens que la composante horizontale B_h du champ magnétique terrestre. On relève la période T_1 des oscillations de l'aiguille. On inverse ensuite le sens du courant dans les bobines et on relève la période T_2 des oscillations de l'aiguille. On mesure :
$$\frac{T_1}{T_2} = 0{,}78$$
En déduire la valeur de la composante horizontale B_h du champ magnétique terrestre.

III. Analyse en finesse de l'expérience d'Oersted. Plus dur : Mines Pont

C'est au début du XV$^{\text{ème}}$ siècle qu'un médecin anglais, Gilbert, s'est livré à une étude détaillée des aimants. Fin 1820, Oersted fait un cours à l'Université de Copenhague portant sur le dégagement de chaleur dans un fil joignant les deux bornes d'une pile de Volta. Un de ses élèves lui fait remarquer qu'une aiguille aimantée, placée sous le fil, pivote lorsque le courant circule. L'aiguille dévie et cesse d'indiquer le nord !

On prendra la valeur suivante de la perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m

1. Énoncer le théorème d'Ampère en définissant chacune des grandeurs qui interviennent dans son énoncé.

2. On considère un fil rectiligne infini dirigé selon un axe Oz parcouru par un courant d'intensité I positif dans le sens des z croissants et un point M dont la distance au fil est notée r. Déterminer soigneusement l'expression du champ magnétostatique $\overrightarrow{B_\infty}(M)$ créé par le fil en M.

Le fil précédent est situé dans un plan horizontal xOz du référentiel terrestre ($\mathscr{R}_T$) supposé galiléen.

À une distance h au-dessus de ce fil, on place le point pivot Ω de l'axe de rotation d'une boussole dont l'aiguille est assimilée à un cylindre de très petite section s et de longueur Λ (L'axe de rotation de la boussole est Oy). Cette dernière est astreinte à des mouvements de rotation, caractérisés par l'angle φ dans le plan $\mathscr{P}$ parallèle à xOz (Figures 1 et 2).

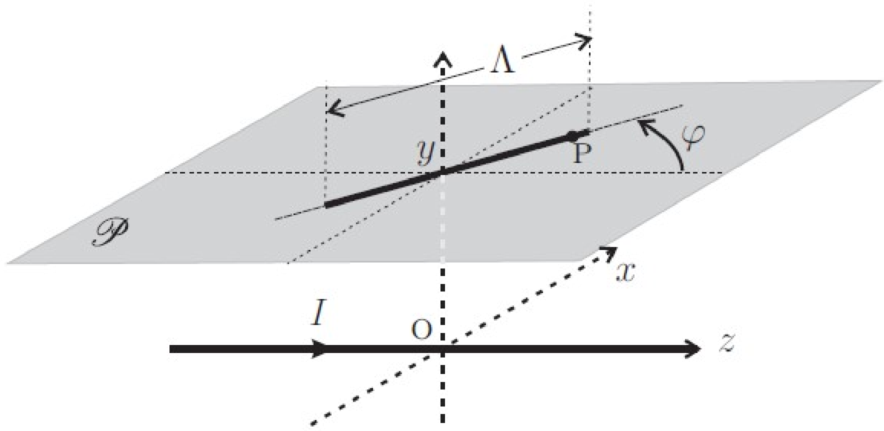


Figure 1 –

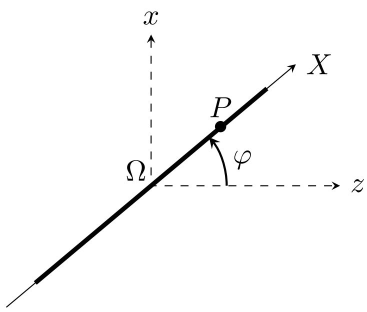


Figure 2 – Vue du dessus

3. Déterminer les composantes cartésiennes du champ magnétique $\overrightarrow{B_\infty}(P)$ en un point P de l'aiguille de la boussole de coordonnées x, h, z dans le repère $(Oxyz)$.

L'aiguille possède une *aimantation* $\vec{\mu}$ uniforme ; il s'agit du moment magnétique *par unité de volume*. Un élément de longueur $\mathrm{d}X$ de l'aiguille est assimilable à un dipôle magnétique dont le moment magnétique élémentaire est $\overrightarrow{\mathrm{d}m} = \vec{\mu}\, s\, \mathrm{d}X$. L'aimantation est parallèle à l'axe de l'aiguille et elle s'écrit donc :

$$\vec{\mu} = \mu\,(\sin\varphi\,\overrightarrow{e_x} + \cos\varphi\,\overrightarrow{e_z}) \qquad \mu > 0$$

4. Établir l'expression $\mathrm{d}\Gamma_y(P)$ de la composante selon Oy du couple élémentaire $\overrightarrow{\mathrm{d}\Gamma}_P$ des forces magnétiques subies par une portion de l'aiguille de longeur $\mathrm{d}X$ située autour du point P tel que $\overrightarrow{\Omega P} = X\,\overrightarrow{e_X}$.

   En déduire l'expression Γ_y de la composante selon Oy du couple total $\overrightarrow{\Gamma}$ s'exerçant sur l'aiguille de la boussole en fonction de μ, $\|\overrightarrow{B_\infty}(0,h,0)\|$, $\cos\varphi$, s et d'une intégrale sur X que l'on notera γ.

5. Montrer que le calcul de l'intégrale γ conduit à :

$$\gamma = \Lambda\,\frac{\arctan(\delta)}{\delta} \quad \text{avec} \quad \delta = \frac{\Lambda\sin\varphi}{2h}$$

   Dans la suite cette intégrale sera notée $\gamma(\delta)$

6. L'aiguille aimantée est placée dans le champ magnétique terrestre (supposé uniforme à l'échelle de la boussole) et dans celui créé par le fil infini étudié ci-dessus. La composante horizontal de ce champ magnétique s'écrit $\overrightarrow{B_t} = B_t\,\overrightarrow{e_z}$ avec $B_t > 0$.

   Le moment d'inertie de l'aiguille par rapport à l'axe Oy est noté J_y. Établir l'équation différentielle qui régit le mouvement de l'aiguille. On néglige l'effet des frottements et on rappelle que la liaison impose toujours à l'aiguille de rester dans le plan $\mathscr{P}$.

7. Lorsque $I \neq 0$, montrer que la position d'équilibre de l'aiguille correspond à un angle φ_e tel que :

$$\Lambda\,\frac{\tan\varphi_e}{\gamma(\delta_e)} = -\,\frac{I}{I_t}$$

   où l'on exprimera I_t en fonction de μ_0, h et B_t. Que représente physiquement I_t ?

   On considère que la composante horizontale du champ magnétique terrestre vaut $B_t = 2{,}0\times10^{-5}$ T.

   La longueur de l'aiguille est $\Lambda = 5{,}0$ cm et elle est située à $h = 1{,}2$ cm du fil. Quel est l'ordre de grandeur de l'intensité I qui doit circuler dans le fil, si on souhaite que la déviation de l'aiguille atteigne au moins 80° ?

   Que pensez vous de cette valeur ?