

Corrigé du DM n°8

1 L'expérience de Stern et Gerlach (d'après Mines-Ponts PC 2008)

1.

$$v_0 = \sqrt{\frac{2E_c}{m_e}} \stackrel{AN}{=} 1,7.10^3 \text{ m.s}^{-1}$$

Ainsi, $v_0 \ll c$ et les atomes ne sont pas relativistes. On peut donc appliquer la mécanique newtonienne pour étudier leur mouvement.

2. L'énergie potentielle d'un dipôle dans le champ magnétique \vec{B} s'écrit $E_p = -\vec{M} \cdot \vec{B} = -\vec{M} \cdot (az \vec{e}_z) = -\mathcal{M}_z az$. La force associée s'écrit :

$$\vec{F} = -\text{grad} E_p = \mathcal{M}_z a \vec{e}_z$$

qui est une façon valable de calculer la force car le vecteur moment magnétique \vec{M} est constant, toujours dirigé selon \vec{e}_z et donc indépendant de la position de l'atome.

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à un atome s'écrit, en négligeant la force de pesanteur :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \mathcal{M}_z a \vec{e}_z$$

soit en projection sur la base cartésienne :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0 ; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\mathcal{M}_z a}{m}$$

Les atomes entrent dans la zone où règne le champ magnétique au point O avec une vitesse $v_0 \vec{e}_x$, donc les équations du mouvement s'intègrent en :

$$x(t) = v_0 t ; \quad y(t) = 0 \quad \text{et} \quad z(t) = \frac{\mathcal{M}_z a}{2m} t^2$$

Le mouvement se fait dans le plan Oxz et la trajectoire s'obtient en éliminant le temps entre $x(t)$ et $z(t)$:

$$z = \frac{\mathcal{M}_z a}{2m} t^2 = \frac{\mathcal{M}_z a}{2m} \left(\frac{x}{v_0} \right)^2 = \frac{\mathcal{M}_z a}{4E_c} x^2$$

3. Les atomes sortent de la région où règne le champ magnétique à la côte $z(\ell) = \mathcal{M}_z a \ell^2 / (4E_c)$, et la pente de leur trajectoire par rapport à l'axe x vaut $(dz/dx)(\ell) = \mathcal{M}_z a \ell / (2E_c)$.

Leur trajectoire est ensuite rectiligne, de pente égale à la pente précédente. Par conséquent, on peut écrire :

$$\frac{z_0 - z(\ell)}{D} = \frac{dz}{dx}(\ell) \iff z_0 = z(\ell) + D \frac{dz}{dx}(\ell)$$

et donc :

$$z_0 = \frac{\mathcal{M}_z a \ell^2}{4E_c} + D \frac{\mathcal{M}_z a \ell}{2E_c} = \frac{\mathcal{M}_z a \ell}{2E_c} \left(D + \frac{\ell}{2} \right)$$

4. Les deux taches correspondent à deux valeurs opposées de z_0 . Dans l'expression précédente, toutes les grandeurs sont positives sauf \mathcal{M}_z , dont le signe dépend du sens du vecteur \vec{M} par rapport à l'axe z . Par conséquent la projection selon \vec{e}_z du moment magnétique du lithium ne peut prendre que deux valeurs opposées $\pm \mathcal{M}$. Le moment magnétique est donc quantifié.

5. De la relation

$$z_0 = \frac{\mathcal{M}_z a \ell}{2E_c} \left(D + \frac{\ell}{2} \right)$$

on déduit

$$\mathcal{M}_z = \frac{2E_c z_0}{a \ell (D + \ell/2)} = 0,955.10^{-23} \text{ A.m}^2$$

6. Aux deux valeurs possibles de M_z correspondent deux valeurs possibles de S_z , qui valent numériquement :

$$S_z = \pm 0,5\hbar$$

On trouve donc que le spin de l'électron vaut donc $\pm \frac{\hbar}{2}$.

2 Mesure de la composante horizontale du champ magnétique terrestre. D'après Centrale TSI

1. On a $\vec{r} = r \vec{e}_r$ et $\vec{m}_T = -m_T \vec{e}_z$. Il faut projeter \vec{e}_z sur la base sphérique :

$$\vec{e}_z = \cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta$$

d'où :

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 m_T}{4\pi r^3} (3(\vec{e}_z \cdot \vec{e}_r) \vec{e}_r - \vec{e}_z) = -\frac{\mu_0 m_T}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta)$$

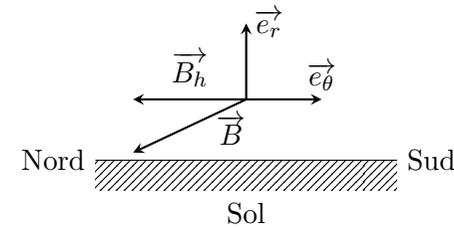
2. À Châtenay-Malabry, $r = R_T + h$, la latitude est $\lambda = 48,75^\circ$ donc $\theta = 90 - \lambda = 41,25^\circ$ et $\varphi = 2,26^\circ$ (c'est la longitude). On a :

$$\|\vec{B}\| = \frac{\mu_0 m_T}{4\pi (R_T + h)^3} \sqrt{4 \cos^2 \theta + \sin^2(\theta)}$$

d'où :

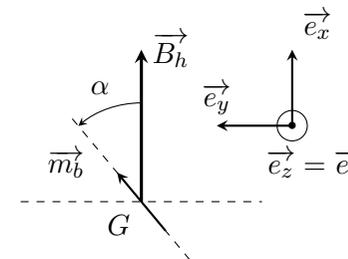
$$m_T = \frac{4\pi (R_T + h)^3 \|\vec{B}\|}{\mu_0 \sqrt{3 \cos^2 \theta + 1}} \stackrel{\text{AN}}{=} 7,5 \times 10^{22} \text{ A.m}^2$$

3. Voir le cours pour le tracé des lignes de champ.
 4. Localement au voisinage de la surface terrestre (sol), la verticale est selon le vecteur \vec{e}_r et l'horizontale selon le vecteur \vec{e}_θ , comme indiqué sur la figure ci-dessous :



Il faut faire attention au fait que, dans l'hémisphère nord $\theta_P \in [0, \pi/2]$, donc $\cos(\theta_P) > 0$ et $\sin(\theta_P) > 0$, ce qui conduit à deux composantes $B_r < 0$ et $B_\theta < 0$. Ainsi, la composante horizontale B_h du champ magnétique (que l'on prendra positive $B_h > 0$) est égale à $-B_\theta$ et elle est bien dirigée vers le nord. De plus, le champ magnétique local est dirigé vers le sol.

Le schéma ci-dessous indique la situation de la boussole vue du dessus. Celle-ci tourne autour de l'axe vertical Gz passant par son barycentre G , l'angle de rotation étant α . On définit un repère $(G, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, de sorte que $\vec{B}_h = B_h \vec{u}_x$, plus adapté à l'étude du mouvement de la boussole.



Les positions d'équilibre de la boussole correspondent au cas où le moment magnétique est aligné avec le champ magnétique. Dans le cas d'une boussole avec un axe de rotation vertical, il faut que celle-ci soit alignée avec la composante horizontale \vec{B}_h .

Pour étudier la stabilité de l'équilibre, il vaut mieux utiliser l'énergie potentielle magnétique du dipôle :

$$E_p = -\vec{m}_b \cdot \vec{B} = -\vec{m}_b \cdot \vec{B}_h = -m_b B_h \cos \alpha$$

La position d'équilibre stable correspond à un minimum de E_p ce qui donne $\alpha = 0$.

5. On applique le théorème du moment cinétique à la boussole. La boussole tourne autour d'un axe vertical Gz passant par son barycentre G . Son moment cinétique est donc $J\dot{\alpha} \vec{e}_z$. On obtient :

$$J\ddot{\alpha} \vec{e}_z = \vec{m}_b \wedge \vec{B} + \underbrace{\vec{M}_G(\text{Poids})}_{=\vec{0}} + \underbrace{\vec{M}_G(\text{Pivot})}_{\perp \vec{e}_z}$$

En projection sur \vec{e}_z , on obtient :

$$J\ddot{\alpha} = -m_b B_h \sin \alpha$$

6. Pour de petites oscillations autour de la position d'équilibre stable $\alpha_{\text{éq}} = 0$, $\sin \alpha \approx \alpha$. On obtient un oscillateur harmonique de pulsation propre $\omega = \sqrt{m_b B_h / J}$, donc de période :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{m_b B_h}}$$

7. On obtient les deux périodes T_1 et T_2 en remplaçant dans le résultat de la question précédente B_h par $B_h + B_e$, puis par $B_h - B_e$. On obtient donc :

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{m_b(B_h + B_e)}} \quad \text{et} \quad T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{m_b(B_h - B_e)}}$$

d'où on tire que :

$$B_h = B_e \frac{1 + (T_1/T_2)^2}{1 - (T_1/T_2)^2}$$

Application numérique : $B_h \approx 25 \mu\text{T}$.

3 Analyse en finesse de l'expérience d'Oersted. Mines Pont PC 2014

1. Si \vec{B} est un champ magnétostatique créé par une distribution de courants caractérisée par une densité de courant \vec{j} , alors pour toute courbe fermée orientée \mathcal{C}_F et toute surface S s'appuyant sur \mathcal{C}_F , on a :

$$\oint_{\mathcal{C}_F} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \mu_0 i_S$$

où i_S est l'intensité électrique qui traverse S et où μ_0 est la perméabilité du vide.

2. C'est une question de cours. On fait une étude de symétries et d'invariances, on applique le théorème d'Ampère et on trouve :

$$\vec{B}_\infty(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \vec{e}_\theta$$

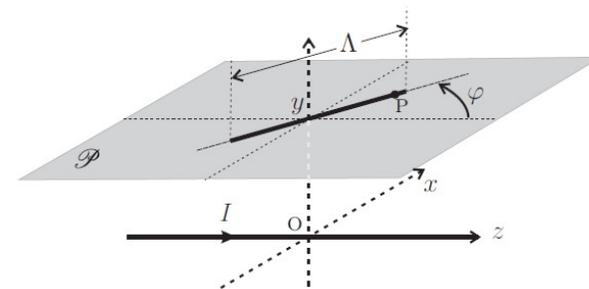


FIGURE 1 -

3. Faisons un schéma dans le plan orthogonal à Oz qui contient le point P de coordonnées (x, h, z) .

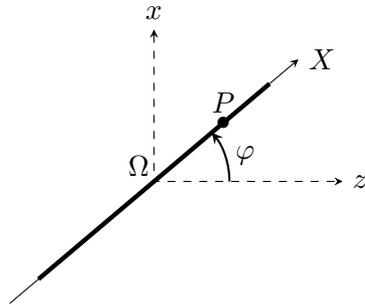
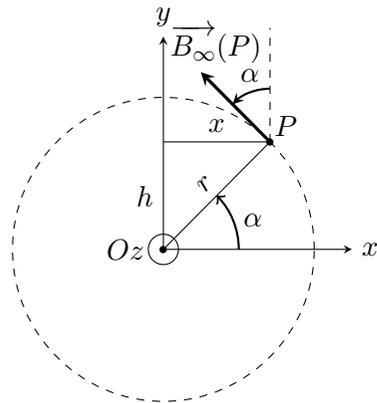


FIGURE 2 – Vue du dessus



On a :

$$\vec{B}_\infty(P) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} (-\sin \alpha \vec{e}_x + \cos \alpha \vec{e}_y)$$

avec :

$$\cos \alpha = \frac{x}{r} \quad \text{et} \quad \sin \alpha = \frac{h}{r}$$

d'où :

$$B_x(P) = -\frac{\mu_0 I h}{2\pi r^2} = -\frac{\mu_0 I h}{2\pi (x^2 + h^2)}$$

$$B_y(P) = \frac{\mu_0 I x}{2\pi r^2} = \frac{\mu_0 I x}{2\pi (x^2 + h^2)}$$

4. On sait que $d\vec{\Gamma}_P = \vec{\mu} \, sdX \wedge \vec{B}_\infty(P)$, ce qui s'écrit dans la base cartésienne $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$:

$$d\vec{\Gamma}_P = \mu s dX \frac{\mu_0 I}{2\pi(x^2 + h^2)} \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ 0 \\ \cos \varphi \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -h \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

La composante cherchée est donc :

$$d\Gamma_y(P) = -\frac{\mu \mu_0 I}{2\pi} \frac{sh \cos \varphi}{x^2 + h^2} dX$$

En remarquant sur la figure 2 par exemple que $x = X \sin \varphi$, on en déduit que :

$$d\Gamma_y(P) = -\frac{\mu \mu_0 I}{2\pi} \frac{sh \cos \varphi}{X^2 \sin^2 \varphi + h^2} dX$$

Si on pose $\|\vec{B}_\infty(0, h, 0)\| = \frac{\mu_0 I}{2\pi h}$, il vient :

$$\Gamma_y = -\mu \|\vec{B}_\infty(0, h, 0)\| s \cos \varphi \int_{-\Lambda/2}^{\Lambda/2} \frac{h^2}{X^2 \sin^2 \varphi + h^2} dX$$

5. On peut écrire :

$$\gamma = \int_{-\Lambda/2}^{\Lambda/2} \frac{1}{1 + \frac{X^2 \sin^2 \varphi}{h^2}} dX = \frac{h}{\sin \varphi} \int_{-\Lambda \sin \varphi / 2h}^{\Lambda \sin \varphi / 2h} \frac{du}{1 + u^2}$$

grâce au changement de variable $u = X \sin \varphi/h$. On a donc :

$$\gamma = \frac{2h}{\sin \varphi} \arctan(\delta) = \Lambda \frac{\arctan(\delta)}{\delta}$$

avec $\delta = \frac{\Lambda \sin \varphi}{2h}$, comme demandé par l'énoncé.

6. L'aiguille aimantée est soumise au moment des actions exercées par \vec{B}_∞ et par \vec{B}_t , au moment de son poids et au moment de la liaison pivot qui permet la rotation de la boussoles autour de Oy . On a de plus :

$$d\vec{\Gamma}_t = \vec{\mu} s dX \wedge \vec{B}_t \quad \text{donc} \quad \vec{\Gamma}_t = \int_{-\Lambda/2}^{\Lambda/2} \vec{\mu} s \wedge \vec{B}_t dX = \vec{\mu} \wedge \vec{B}_t s \Lambda$$

puisque \vec{B}_t est uniforme à l'échelle de la boussole. La composante sur \vec{e}_y de ce moment s'écrit donc :

$$\Gamma_{t,y} = -\mu s \Lambda \sin \varphi B_t$$

Le théorème du moment cinétique (TMC) appliqué à la boussole s'écrit en projection sur \vec{e}_y :

$$J_y \ddot{\varphi} = -\mu \|\vec{B}_\infty(0, h, 0)\| s \cos \varphi \gamma(\delta) - \mu s \Lambda \sin \varphi B_t$$

les autres moments étant nuls.

7. À l'équilibre $\ddot{\varphi} = 0$, $\varphi = \varphi_e$ et $\delta = \delta_e$. Il vient :

$$\|\vec{B}_\infty(0, h, 0)\| \cos \varphi_e \gamma(\delta_e) = -\Lambda \sin \varphi_e B_t$$

d'où :

$$\Lambda \frac{\tan \varphi_e}{\gamma(\delta_e)} = -\frac{\|\vec{B}_\infty(0, h, 0)\|}{B_t} = -\frac{I}{2\pi h B_t/\mu_0} = -\frac{I}{I_t}$$

avec :

$$I_t = \frac{2\pi h B_t}{\mu_0} \iff B_t = \frac{\mu_0 I_t}{2\pi h}$$

I_t est l'intensité du courant qu'il faut faire passer dans le fil pour produire à une distance h de celui-ci un champ magnétique égal à B_t .

On veut $\varphi_e = 80^\circ$. On en déduit que $\delta_e = 2,05$ (sans unité) et $\gamma(\delta_e) = 2,72$ cm. On calcule $I_t = 1,2$ A et donc :

$$|I| = I_t \Lambda \frac{\tan \varphi_e}{\gamma(\delta_e)} = 12,5 \text{ A}$$

Cette valeur est très élevée comparée aux valeurs usuelles utilisées en TP. Les générateurs de courant continu d'un lycée permettent d'obtenir au mieux 5 ou 6 A.