

DM n°10 Pour le 3 janvier 2022

1

DE LA PHYSIQUE AROUND D'UN TORE

Ce sujet comporte trois parties totalement indépendantes qui explorent les propriétés physiques d'objets de forme torique. Un tore est le volume généré par la révolution autour d'un axe d'une figure géométrique donnée (ce peut être un rectangle ou un cercle, voir figure 1, mais d'autres figures sont possibles) appelée section et inscrite dans un plan passant par l'axe. Les vecteurs sont surmontés d'un chapeau s'ils sont unitaires (\hat{u}_z) ou d'une flèche dans le cas général (\vec{p}).

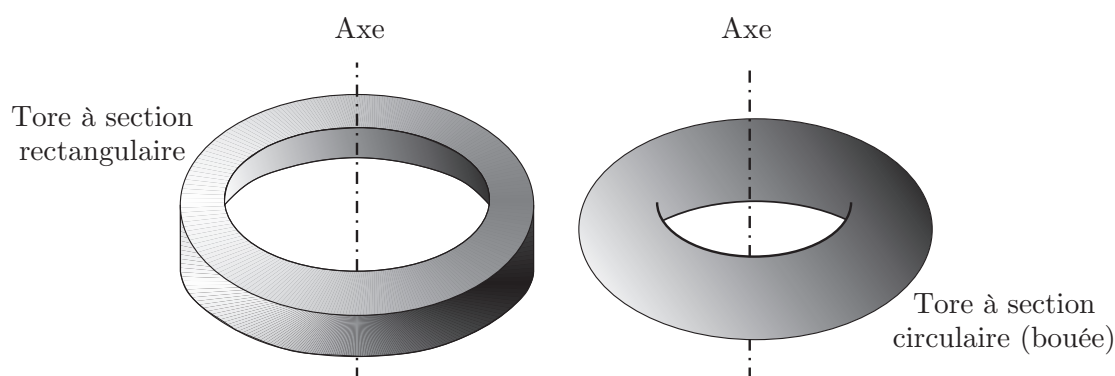


FIGURE 1 – Deux types de tores

I. – Étude d'un conducteur ohmique torique

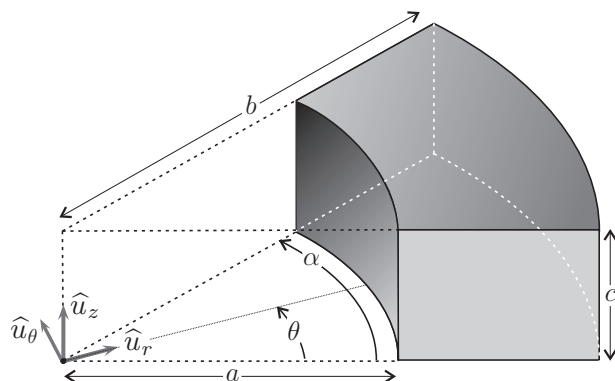


FIGURE 3 – Portion d'un conducteur torique

Un conducteur ohmique est caractérisé par une conductivité électrique γ de l'ordre de $10^8 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$. Il forme un tore tronqué de section rectangulaire de rayon intérieur a , de rayon extérieur b , d'épaisseur c .

On cherche à déterminer la résistance orthoradiale R d'une portion de ce conducteur comprise entre les angles $\theta = 0$ où on applique un potentiel uniforme $V = U$ et $\theta = \alpha$ où on applique un potentiel $V = 0$.

□ 6 — On rappelle la valeur numérique de la constante $\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9}$ dans les unités du système international. Rappeler le nom et l'unité pratique de cette constante.

- 7 — À partir de l'équation de conservation de la charge électrique, établir une équation différentielle temporelle vérifiée par la densité volumique de charges ρ .
- 8 — On note $\rho_0(M)$ la valeur de ρ en un point M à l'instant $t = 0$. Montrer que $\rho(M) \approx 0$ si t est très supérieure à une durée τ dont on donnera l'expression en fonction de γ et ε_0 ainsi que la valeur numérique.

Dans la suite, on supposera que $\rho = 0$ dans le conducteur.

□ 9 — Établir l'équation vérifiée en régime permanent et dans le conducteur ohmique par le potentiel électrique V .

□ 10 — On suppose que V ne dépend que de l'angle θ en coordonnées cylindriques et on donne, dans ce système de coordonnées, les expressions du gradient du potentiel $\vec{\text{grad}}V = \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{u}_\theta$ et de son laplacien $\Delta V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}$. Déterminer les expressions de $V(\theta)$, du champ \vec{E} et de la densité de courant \vec{j} .

□ 11 — Déterminer l'expression de l'intensité totale I traversant une section rectangulaire droite quelconque de ce tore. En déduire sa résistance orthoradiale R en fonction de a , b , c , γ et α .

□ 12 — Rappeler l'expression de la résistance d'un conducteur filiforme de section S et de longueur L . Vérifier qu'elle est cohérente avec l'expression du conducteur torique quand b est très proche de a .

II. – Étude d'une pince ampèremétrique

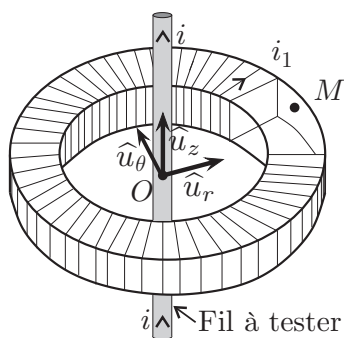


FIGURE 4 – Partie active de la pince

Le dispositif de mesure de la pince ampèremétrique est formé d'un bobinage possédant une résistance linéique λ .

Un point M intérieur au tore est repéré par ses coordonnées cylindriques : $\vec{OM} = r\hat{u}_r + z\hat{u}_z$ avec $r \in [a, b]$ et $z \in [0, c]$.

Un fil rectiligne infini de même axe (O, z) est parcouru par un courant d'intensité $i(t)$. On note $i_1(t)$ l'intensité du courant circulant dans la bobine torique. On se place dans l'approximation des états quasi-stationnaires.

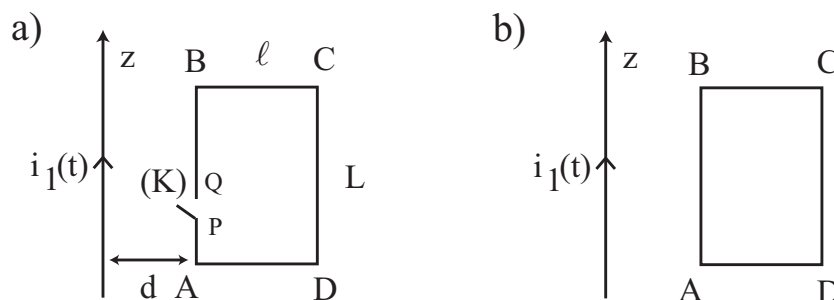
□ 13 — Rappeler ce qu'on appelle approximation des états quasi-stationnaires. Montrer que cette approximation permet de simplifier l'équation de Maxwell-Ampère. Énoncer dans ce cas le théorème d'Ampère.

□ 14 — Montrer qu'au point M intérieur au tore, le champ magnétique peut se mettre sous la forme $\vec{B} = B(r)\hat{u}_\theta$ où l'on précisera l'expression de $B(r)$ en fonction de μ_0 , $i(t)$, $i_1(t)$, N et r .

□ 15 — Calculer le flux Φ de \vec{B} à travers le bobinage et en déduire les expressions des coefficients d'autoinductance L du bobinage et de mutuelle inductance M entre le fil et le bobinage.

2 Phénomènes d'induction électromagnétique

Dans le vide, un conducteur rectiligne, d'axe z , infiniment long, est parcouru par un courant d'intensité i_1 . Un cadre rectangulaire conducteur $ABCD$, de longueur $L = AB = CD$, de largeur $\ell = BC = AD$, est placé dans un plan contenant l'axe z . Le cadre $ABCD$ est considéré comme purement résistif, de résistance R . Le côté AB , parallèle à l'axe et situé à la distance d de la ligne de courant, comporte un interrupteur (K) de dimensions négligeables, susceptible de fermer ou d'ouvrir le circuit au niveau de deux points P et Q très rapprochés (figure a). Les conducteurs sont des fils cylindriques, de diamètre négligeable.



I Flux du vecteur champ magnétique

1. L'espace est rapporté, en coordonnées cylindriques (r, θ, z) , à un repère de base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$.
Etablir l'expression vectorielle du champ magnétique $\vec{B}_1(M)$ créé par le courant d'intensité i_1 , en tout point M de l'espace situé à une distance r , non nulle, du conducteur filiforme.
2. Préciser, à l'aide d'un schéma, l'allure des lignes de champ magnétique.
3. Déterminer le flux Φ_1 du vecteur $\vec{B}_1(M)$ à travers le cadre rectangulaire $ABCD$.

II Force électromotrice et courants induits

Le dispositif précédent est étudié dans diverses situations.

1. Premier cas : le cadre est immobile, l'interrupteur (K) est fermé et le courant $i_1 = I_1$ est constant et positif. Existe-t-il une f.e.m. (force électromotrice) e induite dans le cadre ? Si oui, l'exprimer en fonction des données de l'énoncé.
2. Deuxième cas : le cadre est immobile et le courant d'intensité i_1 varie, au cours du temps t , selon la loi : $i_1(t) = at + b$ (avec (où a et b sont des constantes positives).
L'interrupteur (K) est fermé (voir figure b). On oriente le circuit dans le sens $ABCD$.
 - (a) Exprimer, en fonction des données de l'énoncé, l'intensité i_2 de ce courant induit. Commenter son signe.
 - (b) L'interrupteur (K) est maintenant ouvert. Déterminer, en fonction des données de l'énoncé, la différence de potentiel $V_P - V_Q$ existant entre les points P et Q .
3. Troisième cas : le cadre est immobile, l'interrupteur (K) est fermé et le courant d'intensité i_1 varie, au cours du temps, selon la loi : $i_1(t) = I_m \sin(\omega_1 t)$ (courant sinusoïdal, de pulsation ω_1). Le régime est permanent.
 - (a) Déterminer l'intensité $i_2(t)$ du courant induit dans le cadre.
 - (b) Tracer, sur le même graphe, l'allure des courbes représentatives des fonctions $i_1(t)$ et $i_2(t)$.
4. Quatrième cas : le courant $i_1 = I_1$ est constant et positif, et l'interrupteur (K) est fermé. Le cadre est mis en mouvement¹, mais il demeure dans un plan contenant l'axe z , le côté

1. Ce mouvement est causé par un opérateur qui ne lâche pas le circuit.

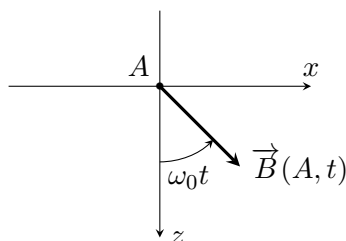
AB restant parallèle à cet axe. Déterminer la f.e.m. induite e dans le cadre, dans les deux situations suivantes :

- la distance d est constante. Le mouvement est un mouvement de rotation uniforme, de pulsation ω_2 autour de l'axe z .
- la distance d varie maintenant au cours du temps, selon la loi : $d(t) = d_0 + vt$ (où d_0 et v sont des constantes positives) : le cadre s'écarte de l'axe z à la vitesse v , dans un mouvement rectiligne de translation uniforme.

3 Principe du moteur asynchrone (facultatif mais conseillé)

I. Génération d'un champ magnétique tournant

On souhaite réaliser en un point A un champ magnétique tournant à la pulsation ω_0 tel que celui représenté sur la figure ci-dessous :



Il s'agit d'un champ magnétique de la forme :

$$\vec{B}(A, t) = B_0 \cos(\omega_0 t) \vec{e}_z + B_0 \sin(\omega_0 t) \vec{e}_x$$

de norme B_0 constante.

Pour réaliser cela, on place deux bobines perpendiculairement l'une à l'autre, de façon à obtenir la configuration représentée sur la figure ci-dessous (page suivante). Le point A est placé à l'intersection de l'axe de symétrie des deux bobines. Chacune des deux bobines crée en A un champ magnétique de la forme :

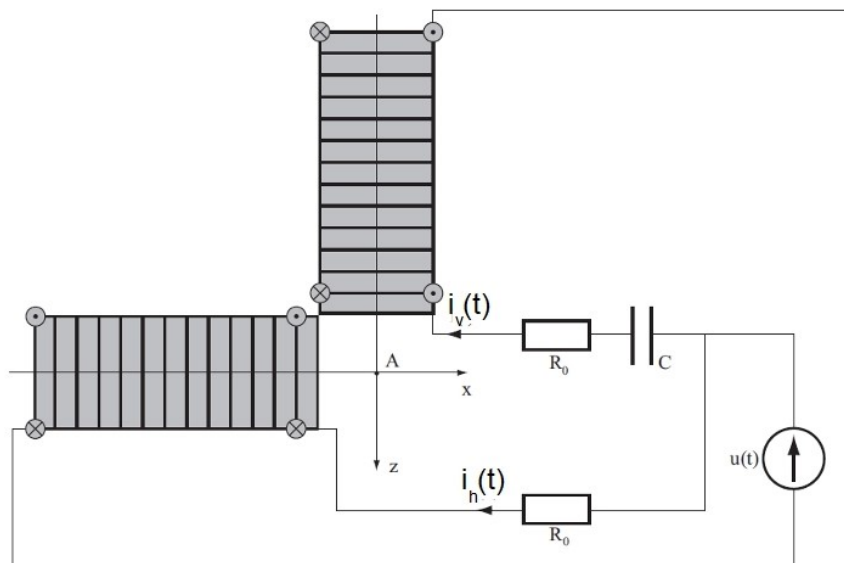
$$\vec{B}_{1 \text{ ou } 2} = k i(t) \vec{e}_{x \text{ ou } z}$$

où k est une constante (la même pour les deux bobines), $i(t)$ l'intensité du courant dans chaque bobine.

Ces deux bobines sont placées dans un circuit contenant deux résistances identiques R_0 et une capacité C . Le circuit est alimenté par une source idéale de tension de f.é.m. sinusoïdale $u(t) = U \cos(\omega_0 t - \pi/4)$.

Chaque bobine est caractérisée par son inductance propre L et sa résistance interne R . En régime sinusoïdal forcé, la bobine verticale sur le schéma est parcourue par un courant sinusoïdal $i_v(t) = I_v \cos(\omega_0 t + \varphi_v)$ et la bobine horizontale (sur le schéma) par un courant sinusoïdal $i_h(t) = I_h \cos(\omega_0 t + \varphi_h)$.

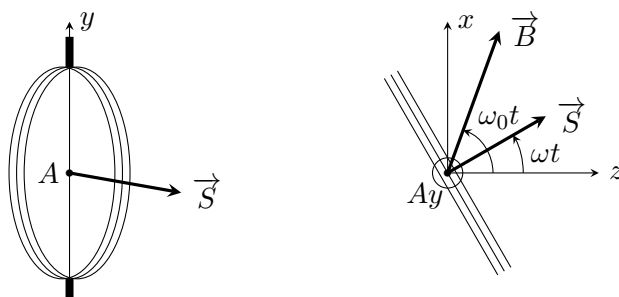
- Dessiner le schéma électrocinétique correspondant à ce circuit en y faisant figurer L et R .
- Déterminer :
 - La valeur de R_0 pour que le courant $i_h(t)$ soit en retard de $\pi/4$ sur la tension $u(t)$.
 - La valeur de C pour que le courant $i_v(t)$ soit en avance de $\pi/4$ sur la tension $u(t)$.



- c) Application numérique : $L = 200 \text{ mH}$, $R = 0,5 \Omega$ et $f_0 = \omega_0/2\pi = 100 \text{ Hz}$. Calculer R_0 et C .
- d) Montrer que les amplitudes I_h et I_v sont identiques lorsque les conditions précédentes sont remplies.
3. Montrer que le champ magnétique total $\vec{B}(A, t)$ créé au point A par l'ensemble des deux bobines est un champ magnétique tournant (c'est à dire que l'extrémité de $\vec{B}(A, t)$ décrit un cercle) dont on précisera le sens de rotation.

II. Principe du moteur asynchrone

On considère un enroulement (E) de N spires dont on supposera l'épaisseur négligeable. Chaque spire possède une surface S et un vecteur surface \vec{S} . Le fil constituant l'enroulement est mis en court-circuit. Cet enroulement a une résistance R_s , une inductance L_s . On le considère comme un solide pouvant tourner autour de l'axe (Ay) grâce à un mécanisme pivot. On notera J le moment d'inertie de ce solide par rapport à (Ay) .



La rotation de (E) autour de l'axe (Ay) est repérée par l'angle $(\vec{e}_z, \vec{S}) = \beta(t)$. On va étudier dans cette partie une situation dans laquelle (E) est animée d'une vitesse angulaire constante ω , ce qui signifie que $\beta(t) = \omega t$.

On soumet cet enroulement au champ magnétique tournant de norme B_0 étudié dans la partie I. que l'on supposera uniforme sur toute la surface S des spires.

4. Déterminer la force électromotrice induite dans (E) par le champ magnétique tournant. En déduire que (E) est parcouru par un courant induit $i(t)$ vérifiant l'équation différentielle :

$$L_s \frac{di}{dt} + R_s i = \Phi_0 \Omega \sin(\Omega t)$$

où $\Omega = \omega_0 - \omega$. On donnera l'expression de la constante Φ_0 en fonction de N , S et B_0 .

5. On se place en régime sinusoïdal forcé. L'intensité du courant dans (E) est alors sinusoïdale de pulsation Ω et de la forme :

$$i(t) = \lambda \cos(\Omega t) + \mu \sin(\Omega t)$$

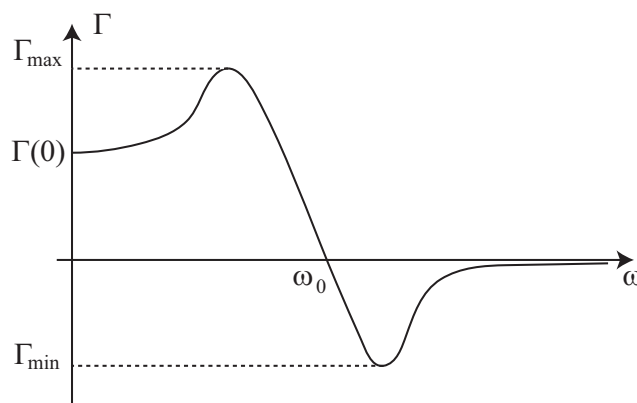
où λ et μ sont deux constantes.

Déterminer les expressions de λ et μ en fonction de Φ_0 , Ω , L_s et R_s .

6. Donner l'expression du moment magnétique \vec{m} de l'enroulement (E). En déduire le moment des forces de Laplace $\vec{\Gamma}(t)$ exercé par le champ magnétique tournant.
7. En réalité le dispositif possède une grande inertie mécanique et la grandeur significative à considérer est la valeur moyenne $\langle \vec{\Gamma} \rangle$ de $\vec{\Gamma}(t)$. Montrer que :

$$\langle \vec{\Gamma} \rangle = \Gamma \vec{e}_y \quad \text{avec} \quad \Gamma = \frac{\Omega R_s \Phi_0^2}{2(R_s^2 + L_s^2 \Omega^2)}$$

8. On donne ci-dessous l'allure du moment moyen Γ en fonction de la vitesse angulaire ω de (E).



Quelle est la plage de pulsations ω pour lesquelles ce moment est effectivement moteur ?

9. Le mécanisme pivot n'est pas parfait et il exerce un moment mécanique résistant constant $\vec{\Gamma}_r = -\Gamma_r \vec{e}_y$ ($\Gamma_r > 0$) en raison de frottements. On suppose que :

$$\Gamma(0) < \Gamma_r < \Gamma_{\max}$$

À l'aide du théorème du moment cinétique et en ne considérant que le moment moyen pour les forces de Laplace, établir l'équation qui découle de la constance de ω . Utiliser le graphe précédent pour montrer qu'il n'y a alors que deux valeurs possibles ω_1 et ω_2 de la vitesse angulaire de rotation.

10. Étudier la stabilité de chacun de ces deux régimes de fonctionnement.