

Correction - DS n°5 (CCINP - e3a)

1 Thermodynamique chimique

I. PRODUCTION DU DIHYDROGÈNE

1. Il s'agit de l'enthalpie standard de réaction associée à la réaction de formation à la température T , d'une mole d'une espèce à partir des éléments constitutifs de cette espèce, pris dans leur état standard de référence à la température T .

$\Delta_f H^0(\text{H}_{2(g)}) = 0$ car c'est l'enthalpie standard associée à la réaction : $\text{H}_{2(g)} = \text{H}_{2(g)}$ qui est nulle.

2. En partant d'un mélange initial quelconque contenant les 4 gaz, les facteurs d'équilibre intensifs sont :

$$T, P, x(\text{CH}_4), x(\text{H}_2\text{O}), x(\text{CO}) \text{ et } x(\text{H}_2)$$

(Comme $\Delta_r \nu_{\text{gaz}} \neq 0$, la pression est bien facteur d'équilibre). Nous avons donc : $N = 6$. Il y a 2 relations entre ces facteurs, à savoir : LAM et $x(\text{CH}_4) + x(\text{H}_2\text{O}) + x(\text{CO}) + x(\text{H}_2) = 1$ et donc $R = 2$. En définitive :

$$v = N - R = 4$$

En partant d'un mélange équimolaire de CH_4 et H_2O , on ajoute deux relations à l'équilibre :

$$x(\text{CH}_4) = x(\text{H}_2\text{O}) \text{ et } x(\text{H}_2) = 3x(\text{CO})$$

d'où $R = 4$ et donc :

$$v = 6 - 4 = 2$$

3. On calcule $\Delta_r H^0$ et $\Delta_r G^0$ en utilisant la loi de Hess :

$$\Delta_r H^0 = \Delta_f H^0(\text{CO}) - \Delta_f H^0(\text{CH}_4) - \Delta_f H^0(\text{H}_2\text{O}) = 205,7 \text{ kJ.mol}^{-1}$$

et

$$\Delta_r G^0(298 \text{ K}) = \Delta_f G^0(\text{CO}) - \Delta_f G^0(\text{CH}_4) - \Delta_f G^0(\text{H}_2\text{O}) = 141,7 \text{ kJ.mol}^{-1}$$

On en déduit :

$$\Delta_r S^0 = \frac{\Delta_r H^0 - \Delta_r G^0(298 \text{ K})}{298} = 214,8 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$$

$\Delta_r S^0 > 0$ car le désordre augmente dans le sens direct (augmentation du nombre de moles de gaz).

4. D'après la loi de modération de Le Châtelier, toute augmentation isotherme de pression entraîne un déplacement de l'équilibre dans le sens d'une diminution du nombre de moles de gaz, c'est à dire dans le *sens indirect*.

Selon la loi de modération de Van't Hoff, toute augmentation isobare de température entraîne un déplacement d'équilibre dans le sens endothermique qui est le *sens direct* ici.

5. À 1223 K, $\Delta_r G^0(1223 \text{ K}) = \Delta_r H^0 - 1223 \Delta_r S^0 = -57 \text{ kJ.mol}^{-1}$. On en déduit :

$$K^0 = \exp\left(-\frac{\Delta_r G^0(1223 \text{ K})}{R \times 1223}\right) = 2,73.10^2$$

6. L'avancement à l'équilibre vaut : $\xi = n_0\alpha$. On en déduit les fractions molaires, sachant que le nombre total de moles de gaz vaut : $n_g = 2n_0 + 2\xi = 2n_0(1 + \alpha)$, et donc :

$$x(\text{CH}_4) = x(\text{H}_2\text{O}) = \frac{n_0 - \xi}{2n_0 + 2\xi} = \frac{1 - \alpha}{2(1 + \alpha)}$$

et

$$x(\text{H}_2) = \frac{3\xi}{n_0 + 2\xi} = \frac{3\alpha}{2(1 + \alpha)} \quad \text{et} \quad x(\text{CO}) = \frac{\xi}{2n_0 + 2\xi} = \frac{\alpha}{2(1 + \alpha)}$$

La loi d'action des masses conduit alors à :

$$K^0 = \frac{x(\text{CO}) x^3(\text{H}_2)}{x(\text{CH}_4) x(\text{H}_2\text{O})} \left(\frac{P}{P^0} \right)^2$$

et donc, avec $P = 10 P^0$, il vient :

$$K^0 = 100 \frac{27\alpha^4}{4(1 + \alpha)^2 (1 - \alpha)^2} \implies \frac{\alpha^2}{1 - \alpha^2} = \sqrt{\frac{4K^0}{2700}} = 0,636$$

On obtient directement :

$$\boxed{\alpha \approx 0,62}$$

7. La pression partielle d'un gaz A étant : $P(A) = x(A) P$, on en déduit :

$$\boxed{P(\text{CH}_4) = P(\text{H}_2\text{O}) = 1,17 \text{ bar} \quad P(\text{CO}) = 1,91 \text{ bar} \quad \text{et} \quad P(\text{H}_2) = 5,74 \text{ bar}}$$

8. Reprenons l'expression du quotient réactionnel dans l'état d'équilibre (E_1) obtenu à la fin de la question 6. En introduisant les nombres de moles de chaque constituant gazeux et en appelant n_g le nombre total de moles de gaz, nous obtenons (avec $T = 1223 \text{ K}$) :

$$Q_1 = \frac{n(\text{CO}) n(\text{H}_2)^3}{n(\text{CH}_4) n(\text{H}_2\text{O}) n_g^2} \left(\frac{P}{P^0} \right)^2 = K^0(T)$$

puis, juste après l'ajout de dn moles d'eau (état hors équilibre) :

$$Q_2 = \frac{n(\text{CO}) n(\text{H}_2)^3}{n(\text{CH}_4) [n(\text{H}_2\text{O}) + dn] [n_g + dn]^2} \left(\frac{P}{P^0} \right)^2 < Q_1$$

On en déduit que, dans cet état (E_2) :

$$\Delta_r G_2 = RT \ln \left(\frac{Q_2}{K^0(T)} \right) < 0$$

Ainsi, l'équilibre chimique est déplacé en sens direct $\xrightarrow{1}$.

9.

$$\boxed{\Delta_r G_3 = \Delta_r G_3^0(T) + RT \ln \left(\frac{P(\text{CO}_2) P^0}{P(\text{CO})^2} \right) = -2,15 \text{ kJ.mol}^{-1}}$$

et

$$\boxed{\Delta_r G_4 = \Delta_r G_4^0(T) + RT \ln \left(\frac{P(\text{H}_2)^2}{P(\text{CH}_4) P^0} \right) = 9,26 \text{ kJ.mol}^{-1}}$$

10. $\Delta_r G_3 < 0$ donc l'évolution de [3] se fait dans le sens $\xrightarrow{1}$: du carbone graphite va donc se déposer. En revanche, $\Delta_r G_4 > 0$ et l'évolution de [4] se fait dans le sens $\xleftarrow{2}$ et le carbone graphite va au contraire disparaître.

11. On a :

$$\Delta_r S^0 = - \frac{d\Delta_r G^0}{dT} = 110 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$$

puis :

$$\Delta_r H^0 = \Delta_r G^0(T) + \Delta_r S^0 T = 140 \text{ kJ.mol}^{-1}$$

12. Un bilan de matière conduit à : $n(\text{C}_8\text{H}_{18(g)}) = 1 - \xi$, $n(\text{H}_{2(g)}) = n(\text{C}_8\text{H}_{16(g)}) = \xi$. Le nombre total de moles de gaz est donc : $n_g = 1 + \xi$. La loi d'action des masses s'écrit donc :

$$K^0 = \frac{x(\text{C}_8\text{H}_{16}) x(\text{H}_2)}{x(\text{C}_8\text{H}_{18})} \frac{P}{P^0} = \frac{\xi^2}{(1 + \xi)(1 - \xi)} \frac{P}{P^0} = \frac{\xi^2}{(1 - \xi^2)} \frac{P}{P^0}$$

et donc :

$$\xi = \sqrt{\frac{\frac{P^0 K^0}{P}}{1 + \frac{P^0 K^0}{P}}}$$

À $T = 1073 \text{ K}$, on calcule :

$$K^0 = 8,5.10^{-2}$$

et donc : $\xi = 0,28 \text{ mol}$ pour $P = 1 \text{ bar}$ et $\xi = 0,38 \text{ mol}$ pour $P = 0,5 \text{ bar}$. Cela n'a rien d'étonnant car une augmentation de pression entraîne un déplacement de l'équilibre dans le sens d'une diminution du nombre de moles de gaz, c'est à dire dans le sens \leftarrow .

13. Dans une évolution monotherme et monobare :

$$Q = \Delta_r H^0 (\xi_F - \xi_I) = \Delta_r H^0 \xi$$

A.N. : $Q = 39,2 \text{ kJ.mol}^{-1}$ si $P = 1 \text{ bar}$ et $Q = 53,2 \text{ kJ.mol}^{-1}$ si $P = 0,5 \text{ bar}$. Dans les deux cas, la réaction est endothermique.

14. La masse de 1 mole d'octane est : $m = 112 \text{ g}$. Il y a donc 112 g d'eau dans l'état initial, ce qui correspond à 6,22 mol d'eau. L'eau gazeuse n'intervient pas dans le bilan de matière mais augmente le nombre total de moles de gaz : $n_g = 1 + \xi + 6,22 = 7,22 + \xi$. La LAM s'écrit alors (avec $P = P^0$) :

$$K^0 = \frac{\xi^2}{(1 - \xi)(7,22 + \xi)}$$

ce qui conduit à l'équation du second degré :

$$\xi^2 + \frac{6,22K^0}{1 + K^0} \xi - \frac{7,22K^0}{1 + K^0} = 0$$

c'est à dire, numériquement :

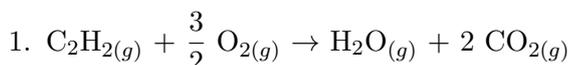
$$\xi^2 + 0,487 \xi - 0,566 = 0$$

ce qui conduit à la seule racine acceptable : $\xi = 0,55 \text{ mol}$ (l'autre étant négative). À l'équilibre, nous avons donc :

$$n(\text{C}_8\text{H}_{18}) = 0,45 \text{ mol} \quad \text{et} \quad n(\text{H}_2) = n(\text{C}_8\text{H}_{16}) = 0,55 \text{ mol}$$

Le nombre de moles de C_8H_{16} est donc plus élevé qu'aux questions précédentes.

II. TEMPÉRATURE DE FLAMME



2. On applique la loi de Hess :

$$\Delta_r H^0 = \Delta_f H^0(\text{H}_2\text{O}) + 2 \Delta_f H^0(\text{CO}_2) - \Delta_f H^0(\text{C}_2\text{H}_2) = -1250 \text{ kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$$

3. On divise le chemin réel (adiabatique et monobare) en une réaction totale à température $T_0 = 298 \text{ K}$ et sous pression $P^0 = 1 \text{ bar}$ constante, suivie d'un chauffage isobare des produits de la réaction.

Dans l'état initial, il est introduit 2,5 moles de $\text{O}_{2(g)}$, 10 moles de $\text{N}_{2(g)}$ et 1 mole d'acétylène qui est donc le réactif limitant : $\xi_F = 1 \text{ mol}$. Dans l'état final de la réaction, il reste donc 1 mol de $\text{O}_{2(g)}$, 10 moles de $\text{N}_{2(g)}$ et il est apparu 2 moles de $\text{CO}_{2(g)}$ et 1 mole de $\text{H}_2\text{O}_{(g)}$. On a donc :

$$\Delta H = \Delta H_1 + \Delta H_2 = 0$$

avec

- $\Delta H_1 = \Delta_r H^0 \xi_F$.
- $\Delta H_2 = C_p (T_F - 298)$, avec $C_p = 2 C_{pm}(\text{CO}_2) + C_{pm}(\text{H}_2\text{O}) + C_{pm}(\text{O}_2) + 10 C_{pm}(\text{N}_2) = 450 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$.

On a donc :

$$T_F = 298 - \frac{\Delta_r H^0 \xi_F}{C_p} = 3,1 \cdot 10^3 \text{ K}$$

2 Solénoïde en régime lentement variable

- 1) a) τ est homogène à un temps. La constante de temps d'un circuit RL étant L/R et nous avons donc $\tau = \frac{L}{R} = 10^{-5} \text{ s} = 10 \mu\text{s}$.
- b) Un point M situé à la distance maximale de d_{\max} (en ordre de grandeur) des sources (charges et/ou courants) est dit dans la zone ARQS si et seulement si on peut négliger le retard temporel des phénomènes électromagnétiques, à savoir d_{\max}/c , dû à la vitesse finie de propagation du champ électromagnétique devant le temps caractéristique d'évolution des charges et des courants, c'est à dire ici τ .

Pour un point M situé au voisinage du solénoïde, on peut prendre $d_{\max} = b$, ce qui fait que ce point sera situé dans la zone ARQS si et seulement si :

$$b \ll c\tau \approx 3 \text{ km}$$

ce qui est parfaitement réalisé.

- c) Les équations de Maxwell dans l'ARQS s'obtiennent en faisant $c \rightarrow +\infty$. Seule l'équation de Maxwell-Ampère est alors modifiée et elle devient :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

Les autres équations étant inchangées.

- 2) On sait qu'un plan de symétrie de \vec{B} est un plan d'antisymétrie de \vec{E} (et vice versa). On peut en déduire que le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est un plan d'antisymétrie de \vec{E} et donc que :

$$\vec{E}(M, t) = E(r, \theta, z, t) \vec{u}_\theta$$

La distribution de charges et de courants étant invariante par toute rotation autour de Oz et par toute translation selon Oz (car le solénoïde est supposé infini), la composante $E(r, \theta, z, t)$ ne dépend ni de θ , ni de z . On a donc finalement :

$$\vec{E}(M, t) = E(r, t) \vec{u}_\theta$$

- 3) L'équation de Maxwell-Faraday $\text{rot } \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t$ peut être formulée de façon intégrale. Si (C) est une courbe fermée orientée et (S) une surface qui s'appuie sur (C) et orientée par la règle de la main droite, alors grâce au théorème de Stokes :

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \iint_S \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{S} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = - \frac{d\Phi_B}{dt}$$

en permutant la dérivation et l'intégration et où Φ_B est le flux magnétique à travers S .

On choisit alors comme courbe fermée (C) le cercle d'axe Oz et de rayon r , orienté dans le sens trigonométrique autour de Oz , ce qui donne :

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = E(r, t) 2\pi r$$

- a) Si $r < a$:

$$\Phi_B = \pi r^2 B(t) = \mu_0 n I_0 \pi r^2 e^{-t/\tau}$$

et donc :

$$\vec{E} = \frac{\mu_0 n I_0 r}{2\tau} e^{-t/\tau} \vec{u}_\theta$$

- b) Si $r > a$:

$$\Phi_B = \pi a^2 B(t) = \mu_0 n I_0 \pi a^2 e^{-t/\tau}$$

puisque \vec{B} est nul en dehors du solénoïde, et donc :

$$\vec{E} = \frac{\mu_0 n I_0 a^2}{2\tau r} e^{-t/\tau} \vec{u}_\theta$$

- 4) a) Pour $r < a$, $u_e = \frac{\varepsilon_0}{2} \left(\frac{r}{2\tau}\right)^2 B^2(t)$ et $u_m = \frac{B^2(t)}{2\mu_0}$. Le rapport $\left(\frac{u_e}{u_m}\right)$ vaut donc :

$$\frac{u_e}{u_m} = \left(\frac{r}{2c\tau}\right)^2 \leq \left(\frac{a}{2c\tau}\right)^2 = \left(\frac{10^{-2}}{2 \times 3.10^8 \times 1.10^{-5}}\right)^2 \approx 3.10^{-12}$$

Ce rapport est non négligeable et :

$$u_{em} \simeq u_m = \frac{B^2(t)}{2\mu_0}$$

b) $\vec{\Pi} = \vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \frac{r}{\tau} \frac{B^2(t)}{2\mu_0} \vec{u}_r$.

- c) L'espace à l'intérieur du solénoïde est le vide ; il n'y a donc aucun courant et $p_j = \vec{j} \cdot \vec{E} = 0$.

d) On a $\text{div}(\vec{\Pi}) = \frac{B^2(t)}{2\mu_0\tau} \text{div}(r\vec{u}_r) = \frac{B^2(t)}{\mu_0\tau}$. De plus, $\frac{\partial u_{em}}{\partial t} = \frac{-2}{\tau} \times \frac{B^2(t)}{2\mu_0} = -\frac{B^2(t)}{\mu_0\tau}$.

On vérifie donc bien l'identité de Poynting à l'intérieur du solénoïde ($r < a$), à savoir :

$$\text{div} \vec{\Pi} + \frac{\partial u_{em}}{\partial t} + \vec{j} \cdot \vec{E} = 0$$

- 5) a) Pour une portion de solénoïde de longueur h on calcule :

$$U_m = \frac{B^2(t)}{2\mu_0} \pi a^2 h$$

Par identification avec l'expression $U_m = \frac{1}{2} Li(t)^2$, on obtient :

$$\boxed{L = \mu_0 n^2 \pi a^2 h}$$

On retrouve la même expression que celle calculée à partir du flux magnétique total :

$$\Phi_{\text{tot}} = Li(t) = N\Phi_{\text{1spire}} = N \left(B(t)\pi a^2 \right) = N\mu_0 \frac{N}{h} \pi a^2 i(t) = \mu_0 n^2 \pi a^2 h i(t)$$

- b) On calcule :

$$\boxed{\Phi \left(\vec{\Pi} / S_{\text{lat}} \right) = \iint_{S_{\text{lat}}} \vec{\Pi}(r = a, t) \cdot d\vec{S} = \pi a^2 h \frac{B^2(t)}{\tau\mu_0}}$$

- c) En considérant le volume cylindrique $V = \pi a^2 h$ et sachant que le flux de $\vec{\Pi}$ est nul à travers les deux bases et que l'énergie électromagnétique U_{em} contenue dans ce volume s'identifie à l'énergie magnétique U_m (l'énergie électrique étant négligeable), on a bien :

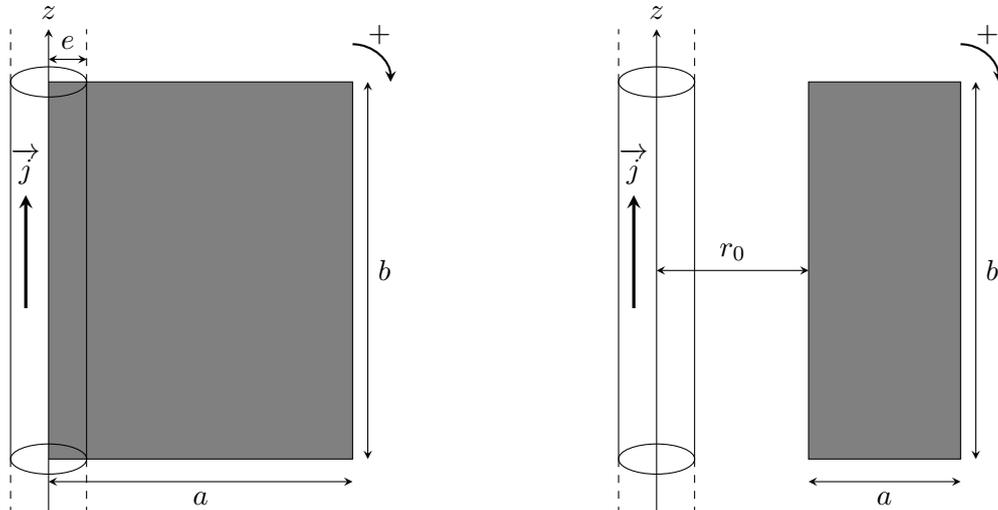
$$\frac{dU_{\text{em}}(t)}{dt} + \Phi \left(\vec{\Pi} / S_{\text{lat}} \right) = 0$$

puisque $\iiint_V \vec{j} \cdot \vec{E} dV = 0$. L'équation globale de conservation de l'énergie électromagnétique est donc bien vérifiée.

3 Détection de véhicules par boucle inductive

A. – INDUCTANCE DE LA BOUCLE

1) On a : $\Phi_p = LI$



2) De façon évidente : $\vec{j} = j \vec{e}_z$ avec $I = j \pi e^2$, ce qui conduit à :

$$\vec{j} = \frac{I}{\pi e^2} \vec{e}_z$$

3) Le plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ est un plan de symétrie des courants contenant M et donc $\vec{B}(M) = B(r, \theta, z) \vec{e}_\theta$.

Il y a invariance des courants par toute rotation autour de Oz et par toute translation le long de Oz . Il s'ensuit que :

$$\vec{B}(M) = B(r) \vec{e}_\theta$$

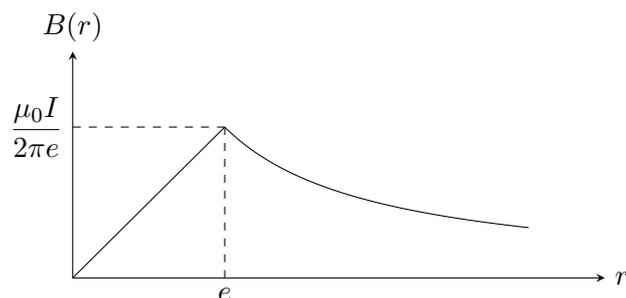
4) On applique le théorème d'Ampère en régime stationnaire en prenant comme contour d'Ampère C_A un cercle de rayon r . En notant I_S l'intensité traversant la surface du disque de rayon r , on obtient :

$$\oint_{C_A} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 2\pi r B(r) = \mu_0 I_S$$

avec $I_S = I$ si $r > e$ et $I_S = j \pi r^2 = I \frac{r^2}{e^2}$ si $r < e$. On en déduit que :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta \text{ si } r > e \text{ et } \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I r}{2\pi e^2} \vec{e}_\theta \text{ si } r < e$$

5) On a :



- 6) a) On voit que $\vec{dS} = dr dz \vec{e}_\theta$ Sur la figure de gauche, en fonction de μ_0, I, a, b et e . Le flux demandé est alors :

$$\Phi_f = \iint_S \vec{B} \cdot \vec{dS} = \int_{r=0}^a \int_{z=0}^b B(r) dr dz = b \left[\int_0^e \frac{\mu_0 I r}{2\pi e^2} dr + \int_e^a \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dr \right] = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \left[\frac{1}{2} + \ln\left(\frac{a}{e}\right) \right]$$

- b) Avec le même type d'élément de surface, seules les bornes d'intégration changent :

$$\Phi_f = \int_{r=r_0}^a \int_{z=0}^b B(r) dr dz = b \left[\int_{r_0}^a \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dr \right] = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln\left(\frac{a}{r_0}\right)$$

- 7) On constate que les deux fils, parcourus par des courants de sens opposés produisent le même flux : il suffira donc de multiplier le résultat d'un seul fil par 2. On obtient donc, avec $b = \ell$ et $a = D$:

$$\Phi_p = 2 \times \frac{\mu_0 I \ell}{2\pi} \left[\frac{1}{2} + \ln\left(\frac{D}{e}\right) \right] = \frac{\mu_0 I \ell}{\pi} \left[1 + 2 \ln\left(\frac{D}{e}\right) \right]$$

d'où :

$$L_1 = \frac{\Phi_f}{I} = \frac{\mu_0 \ell}{2\pi} \left[1 + 2 \ln\left(\frac{D}{e}\right) \right]$$

- 8) On commence par calculer $e = \sqrt{s/\pi} = 0,69$ mm. On en déduit $L_1 = 9,3$ μ H.
- 9) Le champ magnétique total créé par N spires est multiplié par N et ce champ N fois plus grand crée un flux propre dans N spires. Φ_p et donc L sont donc multipliés par N^2 . On a donc $L = N^2 L_1$, d'où $N = \sqrt{L/L_1}$, ce qui permet d'encadrer N :

$$3 \leq N \leq 7$$

B. - DÉTECTION D'UN VÉHICULE

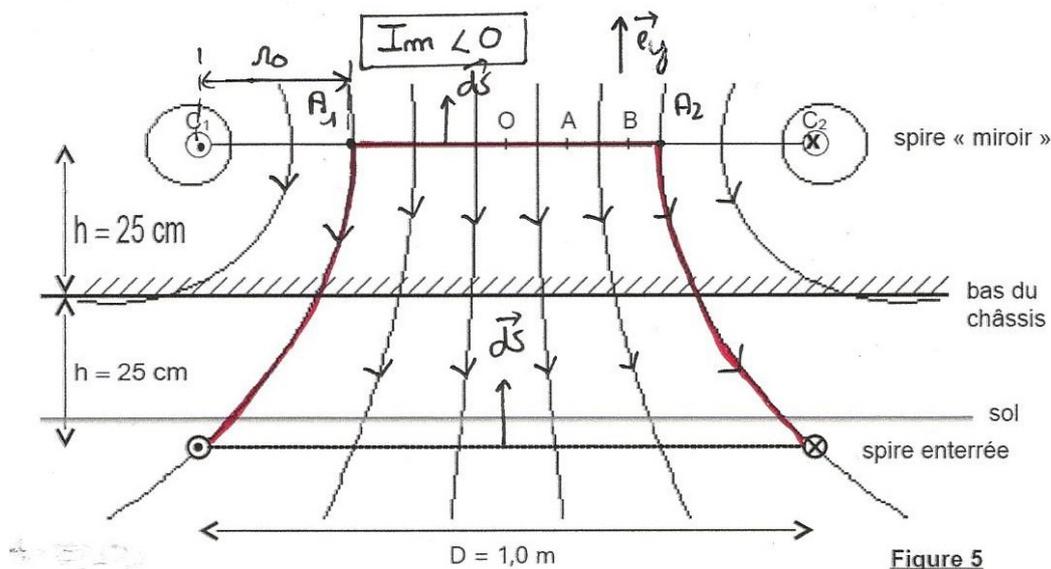


Figure 5

- 1) On doit avoir $I_m = -I$ de sorte que le champ magnétique créé par la boucle miroir soit dirigé vers le "bas" et tende à réduire le flux magnétique créé par la spire enterrée.

- 2) Dans le plan de la spire miroir, le champ magnétique créé par chaque fil est de la forme $\frac{\mu_0 I_m}{2\pi r} \vec{e}_y$ où r est la distance au fil. De plus les deux champs magnétiques créés par chaque fil sont dans le même sens. On en déduit que :

Point	Distance à C_1	Champ B_{C_1}	Distance à C_2	Champ B_{C_2}	Champ total
O	0,5 m	$4,0 \cdot 10^{-7}$ T	0,5 m	$4,0 \cdot 10^{-7}$ T	$8,0 \cdot 10^{-7}$ T
A	0,6 m	$3,3 \cdot 10^{-7}$ T	0,4 m	$5,0 \cdot 10^{-7}$ T	$8,3 \cdot 10^{-7}$ T
B	0,7 m	$2,9 \cdot 10^{-7}$ T	0,3 m	$6,7 \cdot 10^{-7}$ T	$9,6 \cdot 10^{-7}$ T

On a utilisé le fait que 1 m correspond à 8 cm sur la figure.

- 3) Il y a conservation du flux de \vec{B} car $\text{div } \vec{B} = 0$. Appliqué à un tube de champ magnétique cela donne la conservation du flux magnétique le long du tube dessiné en rouge (cf. cours).
- 4) Soit A_1 et A_2 les deux points extrêmes qui délimitent la base du tube de champ magnétique dans le plan de la spire "miroir". Notons S_A la surface associée : rectangle de longueur ℓ et de largeur $A_1 A_2$. En notant r_0 la distance du fil de gauche à A_1 (qui est aussi la distance du fil de droite à A_2 , nous avons, d'après la question **A.6**)b) :

$$\Phi_{S_A} = 2 \times \frac{\mu_0 I_m \ell}{2\pi} \ln \left(\frac{A_1 A_2}{r_0} \right) = - \frac{\mu_0 I \ell}{\pi} \ln \left(\frac{A_1 A_2}{r_0} \right)$$

Or d'après la conservation du flux magnétique : $\Phi_A = \Phi_i$ et donc :

$$\Phi_i = - \frac{\mu_0 I \ell}{\pi} \ln \left(\frac{A_1 A_2}{r_0} \right) \stackrel{\text{AN}}{=} - 8,3 \cdot 10^{-7} \text{ Wb}$$

- 5) La nouvelle inductance d'une spire enterrée vérifie : $\Phi_{\text{tot}} = \Phi_p + \Phi_i = L'_1 I$. On en déduit que :

$$L'_1 = \frac{\Phi_p}{I} + \frac{\Phi_i}{I} = L_1 - \frac{\mu_0 \ell}{\pi} \ln \left(\frac{A_1 A_2}{r_0} \right)$$

et donc :

$$\frac{\Delta L_1}{L_1} = - \frac{2 \ln(A_1 A_2 / r_0)}{1 + 2 \ln(D/e)} \stackrel{\text{AN}}{=} - 9\% < 0$$

Chaque spire enterrée possède sa spire miroir : il y a donc N spires miroir qui créent un champ magnétique N fois plus grand. Le flux magnétique à travers les N surfaces de spires enterrées est donc N^2 fois plus grand que Φ_i calculé précédemment. On a donc :

$$L' = N^2 L_1 - N^2 \frac{\mu_0 \ell}{\pi} \ln \left(\frac{A_1 A_2}{r_0} \right)$$

ce qui montre que :

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{\Delta L_1}{L_1} = - 9\%$$

Cette variation est assez importante pour pouvoir être détectée facilement

- 6) On sait que $r = \frac{\ell}{\gamma_{\text{Cu}} S}$. Ici on peut se permettre de comptabiliser les extrémités dans la longueur totale de la boucle. On a donc $\ell_{\text{boucle}} = 2N(\ell + D) = 24$ m, d'où :

$$r = 0,27 \Omega$$

7) En orientant l'intensité i de sorte que C soit en convention récepteur nous avons par la loi des mailles :

$$u + ri + L \frac{di}{dt} = 0 \quad \text{avec} \quad i = C \frac{du}{dt}$$

et donc :

$$\boxed{\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{r}{L} \frac{du}{dt} + \frac{1}{LC} u = 0}$$

On en déduit la pulsation propre $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ et le facteur de qualité $Q = \frac{1}{r} \sqrt{L/C}$. On a aussi :

$$\boxed{f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}}}$$

8) Non car L croît en N^2 et r croît en N et donc $Q = \frac{1}{r} \sqrt{L/C}$ est indépendant de N .

9) Pour $L = 100 \mu\text{H}$, C doit être comprise entre 25 mF et 2800 μF : ce sont de grosses valeurs de capacités.

10) Si on suppose que la variation est faible on peut utiliser la différentiation logarithmique ;

$$\ln f_0 = -\ln(2\pi) - \frac{\ln(C)}{2} - \frac{\ln(L)}{2} \quad \text{d'où} \quad \frac{df_0}{f_0} = -\frac{dL}{2L}$$

ce qui conduit à :

$$\boxed{\frac{\Delta f_0}{f_0} = -\frac{\Delta L}{2L}}$$

Comme L diminue, la fréquence augmente lors du passage d'un véhicule $\Delta f_0/f_0 = 4,5\%$ ce qui se situe dans la gamme de sensibilité proposée par le constructeur.