

## Correction - DS n°5bis (Centrale - Mines)

### 1 Thermodynamique chimique

#### I. PRODUCTION DU DIHYDROGÈNE

1. Il s'agit de l'enthalpie standard de réaction associée à la réaction de formation à la température  $T$ , d'une mole d'une espèce à partir des éléments constitutifs de cette espèce, pris dans leur état standard de référence à la température  $T$ .

$\Delta_f H^0(\text{H}_{2(g)}) = 0$  car c'est l'enthalpie standard associée à la réaction :  $\text{H}_{2(g)} = \text{H}_{2(g)}$  qui est nulle.

2. En partant d'un mélange initial quelconque contenant les 4 gaz, les facteurs d'équilibre intensifs sont :

$$T, P, x(\text{CH}_4), x(\text{H}_2\text{O}), x(\text{CO}) \text{ et } x(\text{H}_2)$$

(Comme  $\Delta_r \nu_{\text{gaz}} \neq 0$ , la pression est bien facteur d'équilibre). Nous avons donc :  $N = 6$ . Il y a 2 relations entre ces facteurs, à savoir : LAM et  $x(\text{CH}_4) + x(\text{H}_2\text{O}) + x(\text{CO}) + x(\text{H}_2) = 1$  et donc  $R = 2$ . En définitive :

$$v = N - R = 4$$

En partant d'un mélange équimolaire de  $\text{CH}_4$  et  $\text{H}_2\text{O}$ , on ajoute deux relations à l'équilibre :

$$x(\text{CH}_4) = x(\text{H}_2\text{O}) \text{ et } x(\text{H}_2) = 3x(\text{CO})$$

d'où  $R = 4$  et donc :

$$v = 6 - 4 = 2$$

3. On calcule  $\Delta_r H^0$  et  $\Delta_r G^0$  en utilisant la loi de Hess :

$$\Delta_r H^0 = \Delta_f H^0(\text{CO}) - \Delta_f H^0(\text{CH}_4) - \Delta_f H^0(\text{H}_2\text{O}) = 205,7 \text{ kJ.mol}^{-1}$$

et

$$\Delta_r G^0(298 \text{ K}) = \Delta_f G^0(\text{CO}) - \Delta_f G^0(\text{CH}_4) - \Delta_f G^0(\text{H}_2\text{O}) = 141,7 \text{ kJ.mol}^{-1}$$

On en déduit :

$$\Delta_r S^0 = \frac{\Delta_r H^0 - \Delta_r G^0(298 \text{ K})}{298} = 214,8 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$$

$\Delta_r S^0 > 0$  car le désordre augmente dans le sens direct (augmentation du nombre de moles de gaz).

4. D'après la loi de modération de Le Châtelier, toute augmentation isotherme de pression entraîne un déplacement de l'équilibre dans le sens d'une diminution du nombre de moles de gaz, c'est à dire dans le *sens indirect*.

Selon la loi de modération de Van't Hoff, toute augmentation isobare de température entraîne un déplacement d'équilibre dans le sens endothermique qui est le *sens direct* ici.

5. À 1223 K,  $\Delta_r G^0(1223 \text{ K}) = \Delta_r H^0 - 1223 \Delta_r S^0 = -57 \text{ kJ.mol}^{-1}$ . On en déduit :

$$K^0 = \exp\left(-\frac{\Delta_r G^0(1223 \text{ K})}{R \times 1223}\right) = 2,73.10^2$$

6. L'avancement à l'équilibre vaut :  $\xi = n_0\alpha$ . On en déduit les fractions molaires, sachant que le nombre total de moles de gaz vaut :  $n_g = 2n_0 + 2\xi = 2n_0(1 + \alpha)$ , et donc :

$$x(\text{CH}_4) = x(\text{H}_2\text{O}) = \frac{n_0 - \xi}{2n_0 + 2\xi} = \frac{1 - \alpha}{2(1 + \alpha)}$$

et

$$x(\text{H}_2) = \frac{3\xi}{n_0 + 2\xi} = \frac{3\alpha}{2(1 + \alpha)} \quad \text{et} \quad x(\text{CO}) = \frac{\xi}{2n_0 + 2\xi} = \frac{\alpha}{2(1 + \alpha)}$$

La loi d'action des masses conduit alors à :

$$K^0 = \frac{x(\text{CO}) x^3(\text{H}_2)}{x(\text{CH}_4) x(\text{H}_2\text{O})} \left( \frac{P}{P^0} \right)^2$$

et donc, avec  $P = 10 P^0$ , il vient :

$$K^0 = 100 \frac{27\alpha^4}{4(1 + \alpha)^2 (1 - \alpha)^2} \implies \frac{\alpha^2}{1 - \alpha^2} = \sqrt{\frac{4K^0}{2700}} = 0,636$$

On obtient directement :

$$\boxed{\alpha \approx 0,62}$$

7. La pression partielle d'un gaz  $A$  étant :  $P(A) = x(A) P$ , on en déduit :

$$\boxed{P(\text{CH}_4) = P(\text{H}_2\text{O}) = 1,17 \text{ bar} \quad P(\text{CO}) = 1,91 \text{ bar} \quad \text{et} \quad P(\text{H}_2) = 5,74 \text{ bar}}$$

8. Reprenons l'expression du quotient réactionnel dans l'état d'équilibre ( $E_1$ ) obtenu à la fin de la question 6. En introduisant les nombres de moles de chaque constituant gazeux et en appelant  $n_g$  le nombre total de moles de gaz, nous obtenons (avec  $T = 1223 \text{ K}$ ) :

$$Q_1 = \frac{n(\text{CO}) n(\text{H}_2)^3}{n(\text{CH}_4) n(\text{H}_2\text{O}) n_g^2} \left( \frac{P}{P^0} \right)^2 = K^0(T)$$

puis, juste après l'ajout de  $dn$  moles d'eau (état hors équilibre) :

$$Q_2 = \frac{n(\text{CO}) n(\text{H}_2)^3}{n(\text{CH}_4) [n(\text{H}_2\text{O}) + dn] [n_g + dn]^2} \left( \frac{P}{P^0} \right)^2 < Q_1$$

On en déduit que, dans cet état ( $E_2$ ) :

$$\Delta_r G_2 = RT \ln \left( \frac{Q_2}{K^0(T)} \right) < 0$$

Ainsi, l'équilibre chimique est déplacé en sens direct  $\xrightarrow{1}$ .

9.

$$\boxed{\Delta_r G_3 = \Delta_r G_3^0(T) + RT \ln \left( \frac{P(\text{CO}_2) P^0}{P(\text{CO})^2} \right) = -2,15 \text{ kJ.mol}^{-1}}$$

et

$$\boxed{\Delta_r G_4 = \Delta_r G_4^0(T) + RT \ln \left( \frac{P(\text{H}_2)^2}{P(\text{CH}_4) P^0} \right) = 9,26 \text{ kJ.mol}^{-1}}$$

10.  $\Delta_r G_3 < 0$  donc l'évolution de [3] se fait dans le sens  $\xrightarrow{1}$  : du carbone graphite va donc se déposer. En revanche,  $\Delta_r G_4 > 0$  et l'évolution de [4] se fait dans le sens  $\xleftarrow{2}$  et le carbone graphite va au contraire disparaître.

11. On a :

$$\Delta_r S^0 = - \frac{d\Delta_r G^0}{dT} = 110 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$$

puis :

$$\Delta_r H^0 = \Delta_r G^0(T) + \Delta_r S^0 T = 140 \text{ kJ.mol}^{-1}$$

12. Un bilan de matière conduit à :  $n(\text{C}_8\text{H}_{18(g)}) = 1 - \xi$ ,  $n(\text{H}_2(g)) = n(\text{C}_8\text{H}_{16(g)}) = \xi$ . Le nombre total de moles de gaz est donc :  $n_g = 1 + \xi$ . La loi d'action des masses s'écrit donc :

$$K^0 = \frac{x(\text{C}_8\text{H}_{16}) x(\text{H}_2)}{x(\text{C}_8\text{H}_{18})} \frac{P}{P^0} = \frac{\xi^2}{(1 + \xi)(1 - \xi)} \frac{P}{P^0} = \frac{\xi^2}{(1 - \xi^2)} \frac{P}{P^0}$$

et donc :

$$\xi = \sqrt{\frac{\frac{P^0 K^0}{P}}{1 + \frac{P^0 K^0}{P}}}$$

À  $T = 1073 \text{ K}$ , on calcule :

$$K^0 = 8,5.10^{-2}$$

et donc :  $\xi = 0,28 \text{ mol}$  pour  $P = 1 \text{ bar}$  et  $\xi = 0,38 \text{ mol}$  pour  $P = 0,5 \text{ bar}$ . Cela n'a rien d'étonnant car une augmentation de pression entraîne un déplacement de l'équilibre dans le sens d'une diminution du nombre de moles de gaz, c'est à dire dans le sens  $\leftarrow$ .

13. Dans une évolution monotherme et monobare :

$$Q = \Delta_r H^0 (\xi_F - \xi_I) = \Delta_r H^0 \xi$$

A.N. :  $Q = 39,2 \text{ kJ.mol}^{-1}$  si  $P = 1 \text{ bar}$  et  $Q = 53,2 \text{ kJ.mol}^{-1}$  si  $P = 0,5 \text{ bar}$ . Dans les deux cas, la réaction est endothermique.

14. La masse de 1 mole d'octane est :  $m = 112 \text{ g}$ . Il y a donc 112 g d'eau dans l'état initial, ce qui correspond à 6,22 mol d'eau. L'eau gazeuse n'intervient pas dans le bilan de matière mais augmente le nombre total de moles de gaz :  $n_g = 1 + \xi + 6,22 = 7,22 + \xi$ . La LAM s'écrit alors (avec  $P = P^0$ ) :

$$K^0 = \frac{\xi^2}{(1 - \xi)(7,22 + \xi)}$$

ce qui conduit à l'équation du second degré :

$$\xi^2 + \frac{6,22K^0}{1 + K^0} \xi - \frac{7,22K^0}{1 + K^0} = 0$$

c'est à dire, numériquement :

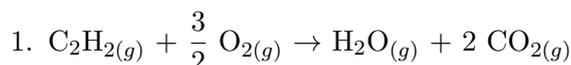
$$\xi^2 + 0,487 \xi - 0,566 = 0$$

ce qui conduit à la seule racine acceptable :  $\xi = 0,55 \text{ mol}$  (l'autre étant négative). À l'équilibre, nous avons donc :

$$n(\text{C}_8\text{H}_{18}) = 0,45 \text{ mol} \quad \text{et} \quad n(\text{H}_2) = n(\text{C}_8\text{H}_{16}) = 0,55 \text{ mol}$$

Le nombre de moles de  $\text{C}_8\text{H}_{16}$  est donc plus élevé qu'aux questions précédentes.

## II. TEMPÉRATURE DE FLAMME



2. On applique la loi de Hess :

$$\Delta_r H^0 = \Delta_f H^0(\text{H}_2\text{O}) + 2 \Delta_f H^0(\text{CO}_2) - \Delta_f H^0(\text{C}_2\text{H}_2) = -1250 \text{ kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$$

3. On divise le chemin réel (adiabatique et monobare) en une réaction totale à température  $T_0 = 298 \text{ K}$  et sous pression  $P^0 = 1 \text{ bar}$  constante, suivie d'un chauffage isobare des produits de la réaction.

Dans l'état initial, il est introduit 2,5 moles de  $\text{O}_{2(g)}$ , 10 moles de  $\text{N}_{2(g)}$  et 1 mole d'acétylène qui est donc le réactif limitant :  $\xi_F = 1 \text{ mol}$ . Dans l'état final de la réaction, il reste donc 1 mol de  $\text{O}_{2(g)}$ , 10 moles de  $\text{N}_{2(g)}$  et il est apparu 2 moles de  $\text{CO}_{2(g)}$  et 1 mole de  $\text{H}_2\text{O}_{(g)}$ . On a donc :

$$\Delta H = \Delta H_1 + \Delta H_2 = 0$$

avec

- $\Delta H_1 = \Delta_r H^0 \xi_F$ .
- $\Delta H_2 = C_p (T_F - 298)$ , avec  $C_p = 2 C_{pm}(\text{CO}_2) + C_{pm}(\text{H}_2\text{O}) + C_{pm}(\text{O}_2) + 10 C_{pm}(\text{N}_2) = 450 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$ .

On a donc :

$$T_F = 298 - \frac{\Delta_r H^0 \xi_F}{C_p} = 3,1 \cdot 10^3 \text{ K}$$

## 2 Solénoïde en régime lentement variable

- 1) a)  $\tau$  est homogène à un temps. La constante de temps d'un circuit RL étant  $L/R$  et nous avons donc  $\tau = \frac{L}{R} = 10^{-5} \text{ s} = 10 \mu\text{s}$ .
- b) Un point  $M$  situé à la distance maximale de  $d_{\max}$  (en ordre de grandeur) des sources (charges et/ou courants) est dit dans la zone ARQS si et seulement si on peut négliger le retard temporel des phénomènes électromagnétiques, à savoir  $d_{\max}/c$ , dû à la vitesse finie de propagation du champ électromagnétique devant le temps caractéristique d'évolution des charges et des courants, c'est à dire ici  $\tau$ .

Pour un point  $M$  situé au voisinage du solénoïde, on peut prendre  $d_{\max} = b$ , ce qui fait que ce point sera situé dans la zone ARQS si et seulement si :

$$b \ll c\tau \approx 3 \text{ km}$$

ce qui est parfaitement réalisé.

- c) Les équations de Maxwell dans l'ARQS s'obtiennent en faisant  $c \rightarrow +\infty$ . Seule l'équation de Maxwell-Ampère est alors modifiée et elle devient :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

Les autres équations étant inchangées.

- 2) On sait qu'un plan de symétrie de  $\vec{B}$  est un plan d'antisymétrie de  $\vec{E}$  (et vice versa). On peut en déduire que le plan  $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$  est un plan d'antisymétrie de  $\vec{E}$  et donc que :

$$\vec{E}(M, t) = E(r, \theta, z, t) \vec{u}_\theta$$

La distribution de charges et de courants étant invariante par toute rotation autour de  $Oz$  et par toute translation selon  $Oz$  (car le solénoïde est supposé infini), la composante  $E(r, \theta, z, t)$  ne dépend ni de  $\theta$ , ni de  $z$ . On a donc finalement :

$$\vec{E}(M, t) = E(r, t) \vec{u}_\theta$$

- 3) L'équation de Maxwell-Faraday  $\text{rot } \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t$  peut être formulée de façon intégrale. Si  $(C)$  est une courbe fermée orientée et  $(S)$  une surface qui s'appuie sur  $(C)$  et orientée par la règle de la main droite, alors grâce au théorème de Stokes :

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \iint_S \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{S} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = - \frac{d\Phi_B}{dt}$$

en permutant la dérivation et l'intégration et où  $\Phi_B$  est le flux magnétique à travers  $S$ .

On choisit alors comme courbe fermée  $(C)$  le cercle d'axe  $Oz$  et de rayon  $r$ , orienté dans le sens trigonométrique autour de  $Oz$ , ce qui donne :

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = E(r, t) 2\pi r$$

- a) Si  $r < a$  :

$$\Phi_B = \pi r^2 B(t) = \mu_0 n I_0 \pi r^2 e^{-t/\tau}$$

et donc :

$$\vec{E} = \frac{\mu_0 n I_0 r}{2\tau} e^{-t/\tau} \vec{u}_\theta$$

- b) Si  $r > a$  :

$$\Phi_B = \pi a^2 B(t) = \mu_0 n I_0 \pi a^2 e^{-t/\tau}$$

puisque  $\vec{B}$  est nul en dehors du solénoïde, et donc :

$$\vec{E} = \frac{\mu_0 n I_0 a^2}{2\tau r} e^{-t/\tau} \vec{u}_\theta$$

- 4) a) Pour  $r < a$ ,  $u_e = \frac{\varepsilon_0}{2} \left(\frac{r}{2\tau}\right)^2 B^2(t)$  et  $u_m = \frac{B^2(t)}{2\mu_0}$ . Le rapport  $\left(\frac{u_e}{u_m}\right)$  vaut donc :

$$\frac{u_e}{u_m} = \left(\frac{r}{2c\tau}\right)^2 \leq \left(\frac{a}{2c\tau}\right)^2 = \left(\frac{10^{-2}}{2 \times 3.10^8 \times 1.10^{-5}}\right)^2 \approx 3.10^{-12}$$

Ce rapport est non négligeable et :

$$u_{em} \simeq u_m = \frac{B^2(t)}{2\mu_0}$$

b)  $\vec{\Pi} = \vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \frac{r}{\tau} \frac{B^2(t)}{2\mu_0} \vec{u}_r$ .

- c) L'espace à l'intérieur du solénoïde est le vide ; il n'y a donc aucun courant et  $p_j = \vec{j} \cdot \vec{E} = 0$ .

d) On a  $\text{div}(\vec{\Pi}) = \frac{B^2(t)}{2\mu_0\tau} \text{div}(r\vec{u}_r) = \frac{B^2(t)}{\mu_0\tau}$ . De plus,  $\frac{\partial u_{em}}{\partial t} = \frac{-2}{\tau} \times \frac{B^2(t)}{2\mu_0} = -\frac{B^2(t)}{\mu_0\tau}$ .

On vérifie donc bien l'identité de Poynting à l'intérieur du solénoïde ( $r < a$ ), à savoir :

$$\text{div} \vec{\Pi} + \frac{\partial u_{em}}{\partial t} + \vec{j} \cdot \vec{E} = 0$$

- 5) a) Pour une portion de solénoïde de longueur  $h$  on calcule :

$$U_m = \frac{B^2(t)}{2\mu_0} \pi a^2 h$$

Par identification avec l'expression  $U_m = \frac{1}{2} Li(t)^2$ , on obtient :

$$L = \mu_0 n^2 \pi a^2 h$$

On retrouve la même expression que celle calculée à partir du flux magnétique total :

$$\Phi_{\text{tot}} = Li(t) = N\Phi_{\text{1spire}} = N \left( B(t)\pi a^2 \right) = N\mu_0 \frac{N}{h} \pi a^2 i(t) = \mu_0 n^2 \pi a^2 h i(t)$$

- b) On calcule :

$$\Phi \left( \vec{\Pi} / S_{\text{lat}} \right) = \iint_{S_{\text{lat}}} \vec{\Pi}(r=a, t) \cdot d\vec{S} = \pi a^2 h \frac{B^2(t)}{\tau \mu_0}$$

- c) En considérant le volume cylindrique  $V = \pi a^2 h$  et sachant que le flux de  $\vec{\Pi}$  est nul à travers les deux bases et que l'énergie électromagnétique  $U_{\text{em}}$  contenue dans ce volume s'identifie à l'énergie magnétique  $U_m$  (l'énergie électrique étant négligeable), on a bien :

$$\frac{dU_{\text{em}}(t)}{dt} + \Phi \left( \vec{\Pi} / S_{\text{lat}} \right) = 0$$

puisque  $\iiint_V \vec{j} \cdot \vec{E} dV = 0$ . L'équation globale de conservation de l'énergie électromagnétique est donc bien vérifiée.

### 3 Chauffage par induction

#### Partie I

I.1. MG  $\text{div} \vec{E} = \rho / \epsilon_0$

MF  $\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

NT  $\text{div} \vec{B} = 0$

PA  $\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

I2. On prend la divergence de l'équation de Maxwell - Ampère ; sachant que  $\text{div}(\text{rot} \vec{B}) = 0$  on obtient :

$$0 = \mu_0 \text{div} \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \text{div} \left( \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} \text{div} \vec{E} = \frac{\partial \rho}{\partial t} \frac{1}{\epsilon_0}$$

d'où

$$\underline{dw\vec{j} + \frac{dp}{dt} = 0}$$

I.3 Comme  $\vec{j} = \gamma \vec{E}$  l'équation précédente se transforme en :

$$\gamma dw\vec{E} + \frac{dp}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dp}{dt} + \frac{\gamma}{\epsilon_0} p = 0 \quad \text{on peut introduire une constante de temps } \tau = \epsilon_0/\gamma.$$

On obtient :

$$p(\pi, t) = p_0 e^{-t/\tau} \quad \text{AN : } \tau = 88 \cdot 10^{-19} \text{ s}$$

La charge électrique dans ce volume disparaît très rapidement. (elle n'est pas détruite, elle va simplement à la surface du métal).

I.4.  $\vec{j} = \gamma \vec{E} = \gamma E_0 \cos(\omega t + \varphi)$  et  $\vec{j}_d = \epsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt} = -\epsilon_0 \omega E_0 \sin(\omega t + \varphi)$

On peut comparer les 2 amplitudes

$$\frac{\|\text{ampl. } \vec{j}_d\|}{\|\text{ampl. } \vec{j}\|} = \frac{\epsilon_0 \omega}{\gamma} = 2\pi \frac{\epsilon_0}{\gamma} f \leq 0,01$$

$$\text{d'où } f \leq \frac{0,01 \gamma}{2\pi \epsilon_0} = 18 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$$

## Partie II

II.1. Tout plan contenant  $Og$  est plan d'antisymétrie de la distribution de courants, donc plan de symétrie de  $\vec{B}$ . Soit  $(\pi, \vec{u}_\pi, \vec{u}_\pi)$  un de ces plans contenant  $\pi$  : on doit avoir  $\vec{B}(\pi, t) \in (\pi, \vec{u}_\pi, \vec{u}_\pi)$   
 $\Rightarrow \underline{B_\theta = 0}$

II.2. On prend le rotationnel de  $\nabla A$  :

$$\underbrace{\text{rot}(\text{rot } \vec{B})}_{= \text{grad div } \vec{B} - \Delta \vec{B}} = \mu_0 \gamma \text{rot } \vec{E} = -\mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{donc } \Delta \vec{B} - \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$$

projetons cette équation sur  $\vec{u}_\pi, \vec{u}_\pi$  en utilisant sa formule

$$\Delta(\underline{B}_r(r) e^{i\omega t}) - \frac{1}{r^2} \underline{B}_r(r) e^{i\omega t} - \mu_0 \gamma (i\omega) \underline{B}_r(r) e^{i\omega t} = 0$$

d'où

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\underline{B}_r}{dr} \right) - \frac{\underline{B}_r}{r^2} = i \underbrace{\mu_0 \gamma \omega}_{2/\delta^2} \underline{B}_r$$

$$\begin{aligned} \text{on } \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \underline{B}_r) \right) &= \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \left( \underline{B}_r + r \frac{d\underline{B}_r}{dr} \right) \right) \\ &= -\frac{1}{r^2} \left( \underline{B}_r + r \frac{d\underline{B}_r}{dr} \right) + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( \underline{B}_r + r \frac{d\underline{B}_r}{dr} \right) \\ &= -\frac{\underline{B}_r}{r^2} - \frac{1}{r} \frac{d\underline{B}_r}{dr} + \frac{1}{r} \frac{d\underline{B}_r}{dr} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\underline{B}_r}{dr} \right) \end{aligned}$$

on obtient donc bien le résultat demandé par l'énoncé.

La projection sur  $\vec{e}_z$  donne :

$$\Delta B_z = \mu_0 \gamma i\omega B_z = \frac{2i}{\delta^2} B_z$$

$$\begin{aligned} \text{avec } \Delta B_z &= \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dB_z}{dr} \right) = \frac{1}{r} \left\{ \frac{dB_z}{dr} + r \frac{d^2 B_z}{dr^2} \right\} \\ &= \frac{d^2 B_z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dB_z}{dr} \text{ ce qui confirme le } \end{aligned}$$

résultat de l'énoncé.

$$\text{II 4. } \text{div } \vec{B} = 0 \text{ donc } \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \underline{B}_r) + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

$$\frac{d}{dr} (r \underline{B}_r) = 0 \Rightarrow \underline{r B}_r = \text{cte} \quad \leftarrow \text{car indépt de } z$$

En utilisant la première équation de la question II 3. on en déduit que  $\underline{B}_r = 0$ .

II 5. On utilise l'équation de Maxwell - Ampère  
 $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$  d'où :

$$\vec{J} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{dB_r}{dr} e^{i\omega t} \vec{u}_\theta$$

des lignes de  $\vec{J}$  sont  
 bien des cercles d'axe  
 $z z'$

II. 6.a On a :

$$\frac{d\underline{B}_g}{dr} = \underline{B}_0 \times \sum_{n=1}^{\infty} n \underline{\alpha}_n r^{n-1} \quad \text{et} \quad \frac{d^2 \underline{B}_g}{dr^2} = \underline{B}_0 \times \sum_{n=2}^{\infty} \underline{\alpha}_n n(n-1) r^{n-2}$$

donc  $\frac{1}{r} \frac{d\underline{B}_g}{dr} = \underline{B}_0 \times \left\{ \frac{\underline{\alpha}_1}{r} + \sum_{n=2}^{+\infty} \underline{\alpha}_n n r^{n-2} \right\}$

En posant  $p = n-2$ , on peut réécrire ces 2 séries entières sous la forme :

$$\frac{d^2 \underline{B}_g}{dr^2} = \underline{B}_0 \times \sum_{p=0}^{\infty} (p+1)(p+2) \underline{\alpha}_{p+2} r^p$$

$$\frac{1}{r} \frac{d\underline{B}_g}{dr} = \underline{B}_0 \times \left\{ \frac{\underline{\alpha}_1}{r} + \sum_{p=0}^{+\infty} (p+2) \underline{\alpha}_{p+2} r^p \right\}$$

Comme  $p$  est un indice muet on peut se renumérer  $n$ . Si on réintroduit dans l'équation différentielle vérifiée par  $\underline{B}_g$ , on obtient :

$$\frac{\underline{\alpha}_1}{r} - \frac{2i}{\delta^2} + \underbrace{4 \underline{\alpha}_2}_{\substack{\text{valeur} \\ \text{pour } p=0}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ (n+2)^2 \underline{\alpha}_{n+2} - \frac{2i}{\delta^2} \underline{\alpha}_n \right] r^n = 0$$

On en déduit :

$$\underline{\alpha}_1 = 0 \quad \text{et} \quad \underline{\alpha}_2 = \frac{i}{2\delta^2}$$

et  $\forall n > 2, \underline{\alpha}_{n+2} = \frac{2i}{(n+2)^2 \delta^2} \underline{\alpha}_n$

Rem : tous les termes impairs sont nuls.

II 6.b Les deux premiers termes non nuls de la série sont donc :

$$\underline{B}_g = \underline{B}_0 (-1 + \underline{\alpha}_2 r^2 + \dots)$$

Il faut que  $|\underline{\alpha}_4| r^4$  soit négligeable devant  $|\underline{\alpha}_2| r^2$  (les autres  $\underline{\alpha}_{2p}$  seront alors automatiquement

negligeables).

or

$$|\underline{a}_4| = \frac{2a^2}{16\delta^2} |\underline{a}_2| \ll |\underline{a}_2| \Rightarrow \frac{a^2}{8\delta^2} \ll \delta$$

donc

$$\frac{\mu_0 \delta 2\pi \epsilon a^2}{2} \ll \delta \text{ soit } \delta \ll \frac{\delta}{\mu_0 \pi \epsilon a^2}$$

On peut donc poser:

$$\underline{f}_M = \frac{\delta}{\mu_0 \pi \epsilon a^2} \underline{AN} : f_M = 500 \text{ Hz}$$

II 6. c On reprend l'équation de la question II.5 pour trouver:

$$\underline{j} = -\frac{1}{\mu_0} \underline{B}_0 \nabla \left( \frac{i}{2\delta^2} \right) \pi e^{i\omega t} \underline{u}_\theta$$

II 6. d On passe aux valeurs réelles en posant  $\underline{B}_0 = B_0 e^{-i\varphi}$  d'où:

$$\underline{j} = -\frac{B_0 \delta \omega}{2} \pi i e^{i(\omega t + \varphi)} \underline{u}_\theta$$

d'où  $\underline{j} = \text{Re}(\underline{j}) = \frac{B_0 \delta \omega}{2} \pi \sin(\omega t + \varphi) \underline{u}_\theta$

on a donc:

$$\langle p_{\text{av}} \rangle = \left\langle \frac{\underline{j}^2}{\delta} \right\rangle = \frac{B_0^2 \delta \omega^2 \pi^2}{4} \langle \sin^2(\omega t + \varphi) \rangle$$

soit

$$\underline{\langle p_{\text{av}} \rangle = \frac{B_0^2 \delta \omega^2 \pi^2}{8}}$$

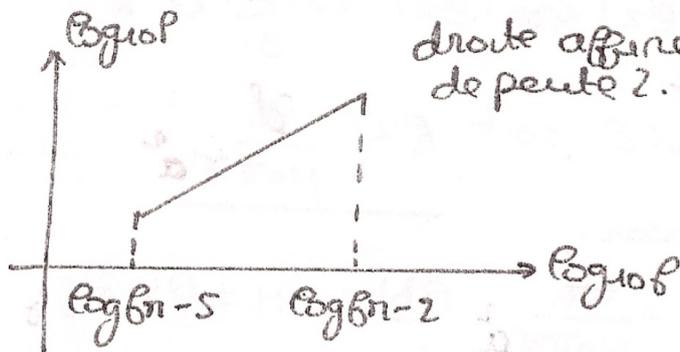
La puissance dissipée dans le cylindre s'obtient par intégration:

$$P = \iiint \langle p_{\text{av}} \rangle r dr d\theta dz = 2\pi L \frac{B_0^2 \delta \omega^2}{8} \int_0^a r^3 dr$$

donc

$$P = \frac{\pi L \delta B_0^2}{16} 4\pi^2 \delta^2 a^4 = \underline{\underline{\frac{\pi^3}{4} \delta L a^4 B_0^2 \delta^2}}$$

Tracé :  $\log_{10} P = Cste + 2 \log_{10} f$



II.7 Si  $\delta$  est la distance caractéristique de variation de  $B_z$ , un calcul en ordre de grandeur donne :

$$\frac{d^2 B_z}{dz^2} \sim \frac{B_z}{\delta^2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{r} \frac{dB_z}{dr} \sim \frac{1}{r} \frac{B_z}{\delta}$$

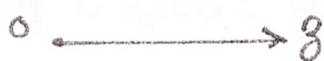
où  $B_z$  représente un ordre de grandeur typique de  $B_z$ . On a donc :

$$\frac{d^2 B_z}{dz^2} + \frac{1}{r} \frac{dB_z}{dr} \sim \frac{B_z}{\delta^2} \left( 1 + \frac{\delta}{r} \right) \sim \frac{B_z}{\delta^2}$$

négligeable

on peut donc négliger  $\frac{1}{r} \frac{dB_z}{dr}$  devant  $\frac{d^2 B_z}{dz^2}$ .

II.8.a Il faut que ces deux distributions créent la même intensité électrique. Prenons une longueur  $l$  selon  $Oz$



Intensité traversant  $e$   
 $I = l N i(t)$



intensité traversant  $e$  :  
 $I = js \times e$

on identifie :

$$l N i(t) = js e \Rightarrow \underline{js = N i(t)}$$

II.8.b On écrit la relation de passage en  $r = a$

$$\underbrace{\vec{B}(a_+)}_{=0} - \vec{B}(a_-) = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{u}_r \text{ donc}$$

$$\vec{B}_g(a_-) \vec{u}_g = -\mu_0 N I_0 e^{i\omega t} \vec{u}_\theta \wedge \vec{u}_r$$

$$= +\mu_0 N I_0 e^{i\omega t} \vec{u}_g$$

$e^{i\omega t} \vec{B}_1 \vec{u}_g$  donc  $\underline{\vec{B}_1} = \mu_0 I N$

II.8.c  $\vec{d} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{d\vec{B}_g}{dr} e^{i\omega t} \vec{u}_\theta$  donne

$$\vec{d} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{(-1+i)}{\delta} \underline{\vec{B}_1} e^{\frac{r-a}{\delta}} e^{i\frac{r-a}{\delta}} e^{i\omega t} \vec{u}_\theta$$

II.8.d On repasse en notations réelles avant de faire ce calcul de la puissance. En notant que  $(1+i) = \sqrt{2} e^{i\pi/4}$ , on trouve:

$$\vec{j} = \text{Re}(\vec{d}) = -\frac{\sqrt{2} N I_0}{\delta} e^{\frac{r-a}{\delta}} \cos\left(\frac{r-a}{\delta} + \omega t + \frac{\pi}{4}\right) \vec{u}_\theta$$

donc

$$\langle p_{\nu} \rangle = \left\langle \frac{j^2}{\delta} \right\rangle = \frac{2 N^2 I_0^2}{\delta \delta^2} e^{\frac{2(r-a)}{\delta}} \langle \cos^2\left(\frac{r-a}{\delta} + \omega t + \frac{\pi}{4}\right) \rangle_T$$

soit

$$\langle p_{\nu} \rangle(r) = \frac{N^2 I_0^2}{\delta \delta^2} e^{\frac{2(r-a)}{\delta}}$$

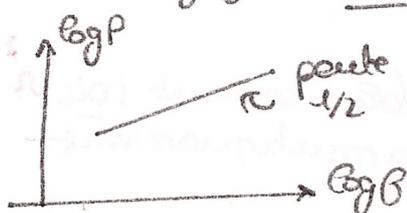
et  $P = \iiint \langle p_{\nu} \rangle(r) r dr d\theta dz = \frac{2\pi L N^2 I_0^2}{\delta \delta^2} \int_0^a e^{\frac{2(r-a)}{\delta}} dr r$

Finalement, on obtient

$$P = \frac{\pi L N^2 I_0^2}{\delta \delta} a = \frac{\pi L a N^2 I_0^2}{\delta} \sqrt{\mu_0 \pi} \sqrt{\delta}$$

$\int \frac{da}{a} (-1 - \frac{\delta}{2a} + \frac{\delta}{2a} e^{-2a/\delta})$

à intégrer par partie pour trouver  
termes négligeables car  $a \gg \delta$



$\frac{AN I_0}{\delta} = 28 \cdot 10^3 \text{ A}$   
valeur très élevée !!