Corrigé du DM n°11

1 Durée de vie d'un atome

1. a) On applique le principe fondamental de la dynamique à l'électron (de masse m), soumis uniquement à la force exercée par le proton immobile en O :

$$m\,\vec{a}(t) = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\, r_e^2}\,\overrightarrow{e_r}(t)$$

d'où :

$$\boxed{\vec{a}(t) = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m\, r_e^2}\,\overrightarrow{e_r}(t)}$$

b) En explicitant $\vec{a}$ sur la base polaire on obtient pour un mouvement circulaire de rayon r_e :

$$\vec{a} = -\frac{v^2}{r_e}\,\overrightarrow{e_r} \implies v^2 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m\, r_e}$$

et donc :

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0\, r_e}}$$

L'énergie potentielle de l'electron est celle de la force électrique, force centrale newtonienne qui s'écrit donc :

$$\boxed{E_p = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\, r_e}}$$

On en déduit que :

$$\boxed{E = E_c + E_p = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0\, r_e}}$$

La puissance rayonnée à travers une sphère de centre O et de rayon r est donnée par la formule de Larmor :

$$P_{\text{ray}} = \frac{2}{3}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2\,\|\overrightarrow{a}_{\text{ret}}\|^2}{c^3}$$

2. a) D'après la question 1. on a :

$$P_{\text{ray}} = \frac{2}{3}\frac{e^2}{(4\pi\varepsilon_0)^3}\frac{e^4}{m^2\, r_e^4}\frac{\|\overrightarrow{e_r}(t-r/c)\|^2}{c^3}$$

donc :

$$\boxed{P_{\text{ray}} = \frac{2}{3}\frac{e^2}{(4\pi\varepsilon_0)^3}\frac{e^4}{m^2c^3\, r_e^4}}$$

puisque $\overrightarrow{e_r}$ est un vecteur unitaire à tout instant.

b) On part de :

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = -P_{\text{ray}} \quad \text{avec} \quad E(t) = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0\, r_e(t)}$$

d'où :

$$\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0\, r_e^2}\frac{\mathrm{d}r_e}{\mathrm{d}t} = -\frac{2}{3}\frac{e^6}{(4\pi\varepsilon_0)^3}\frac{1}{m^2c^3\, r_e^4}$$

Après simplification on obtient :

$$\boxed{r_e^2\frac{\mathrm{d}r_e}{\mathrm{d}t} = -\frac{4}{3}\frac{e^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2}\frac{1}{m^2c^3}}$$

ce qui est une équation différentielle à variables séparables qui se résout selon :

$$\frac{1}{3}\frac{\mathrm{d}r_e^3}{\mathrm{d}t} = -\frac{4}{3}\frac{e^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2}\frac{1}{m^2c^3} \implies \boxed{r_e^3(t) = r_0^3 - \frac{4\,e^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2}\frac{1}{m^2c^3}\,t}$$

c) Application numérique :

$$\boxed{\tau = \frac{m^2 (c r_0)^3}{4 e^4} (4\pi\varepsilon_0)^2 \overset{\text{AN}}{=} 1{,}57.10^{-29}\ \text{s}}$$

ce qui est vraiment très peu. Les atomes ne devraent donc pas être stables.

Sur une trajectoire circulaire de rayon r_e, la période de révolution de l'électron T est telle que (la norme de la vitesse étant constante) :

$$v\,T = 2\pi r_e \quad \Longrightarrow \quad T = \frac{2\pi\,\sqrt{4\pi\varepsilon_0 m}}{e}\,(r_e)^{3/2}$$

Application numérique lorsque $r_e = r_0$ (période initiale) :

$$T = 1{,}52.10^{-19}\ \text{s} \gg \tau$$

2 Bilan énergétique d'un condensateur

1. On cherche le champ magnétique correspondant sous la forme : $\overrightarrow{B} = B(r,t)\,\overrightarrow{u_\theta}$.

   On se place entre les deux armatures (dont le milieu est de l'air, assimilable au vide du point de vue des propriétés électromagnétiques). Le théorème d'Ampère généralisé s'écrit donc :

$$\oint_C \overrightarrow{B}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{\ell} = \mu_0\, i_S(t) + \frac{1}{c^2}\,\frac{\mathrm{d}\Phi(\overrightarrow{E}/S)}{\mathrm{d}t}$$

   où C est une courbe fermée orientée et S une surface quelconque s'appuyant sur C (orientée par la règle de la main droite). On choisit pour C un cercle d'axe Oz et de rayon $r < a$: S est alors le disque de rayon r. Comme $i_S(t) = 0$ (aucun courant ne traverse S) :

$$2\pi r\, B(r,t) = \frac{1}{c^2}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(E(t)\,\pi r^2\Big) = \frac{\pi r^2}{c^2}\,\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$$

   d'où :

$$\boxed{B(r,t) = \frac{r}{2c^2}\,\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}}$$

2. On commence par voir que :

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\tau}E_0\exp(-t/\tau) = -\frac{1}{\tau}E(t)$$

   et donc que :

$$u_{em}(B) = \frac{B^2(r,t)}{2\mu_0} = \frac{r^2}{8c^4\mu_0}\,\frac{E^2(t)}{\tau^2} \quad \text{et} \quad u_{em}(E) = \frac{\varepsilon_0 E^2(t)}{2}$$

   On a donc :

$$\boxed{\mu = \frac{r^2}{4c^4\epsilon_0\mu_0\,\tau^2} = \frac{r^2}{4c^2\tau^2} = \frac{r^2}{4\lambda^2}}$$

3. La valeur maximale de μ est $a^2/(4\lambda^2)$. La condition de la question est donc :

$$\frac{a^2}{4\lambda^2} \ll 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{a \ll c\tau \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{a}{c} \ll \tau}$$

   En posant $\tau_C = a/c$ on obtient le résultat de l'énoncé.

   Remarque :

   La condition $a \ll c\tau$ nous indique que tous les points du condensateur sont dans la zone ARQS.

   Lorsque cela est réalisé, il est légitime de considérer le condensateur comme un système purement électrique.

4. Par définition :

$$\overrightarrow{\pi} = \frac{\overrightarrow{E}\wedge\overrightarrow{B}}{\mu_0} = -\frac{r}{2c^2\mu_0}\,E\,\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}\,\overrightarrow{u_r} = \frac{\varepsilon_0\, r}{2\tau}\,E^2\,\overrightarrow{u_r}$$

   Sa direction est radiale : de l'énergie électromagnétique se propage radialement vers l'extérieur du condensateur.

5. Par définition :

$$\Phi(\pi) = \oiint \overrightarrow{\pi} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S} = \frac{\varepsilon_0\, a}{2\tau}\, E^2\, 2\pi a\, h$$

la contribution des deux bases (disques) du cylindre étant nulle. En notant que $V = \pi\, a^2 h$ on obtient :

$$\boxed{\Phi(\pi) = \frac{\varepsilon_0 E^2}{\tau}\, V}$$

Dans la limite $\tau \gg \tau_C$ des champs lentement variables on a vu que $u_{em}(B) \ll u_{em}(E)$; la densité volumique d'énergie électromagnétique s'identifie donc quasiment à $u_{em}(E)$. La loi intégrale de conservation de l'énergie électromagnétique appliquée au cylindre s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}U_{em}}{\mathrm{d}t} + \Phi(\overrightarrow{\pi}) + \iiint \vec{j} \cdot \overrightarrow{E}\, \mathrm{d}\tau = 0 \qquad (*)$$

avec :

$$U_{em} = \iiint u_{em}\, \mathrm{d}\tau = \frac{\varepsilon_0\, E^2}{2}\, V$$

(énergie électromagnétique contenue dans V). On cherche à vérifier l'équation $(*)$. On a :

- $\overrightarrow{j} = \vec{0}$ dans V (pas de courants) ;
- $\dfrac{\mathrm{d}U_{em}}{\mathrm{d}t} = \varepsilon_0\, E\, \dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}\, V = -\, \dfrac{\varepsilon_0 E^2}{\tau}\, V = -\Phi(\overrightarrow{\pi})$

L'équation (*) est donc bien vérifiée.