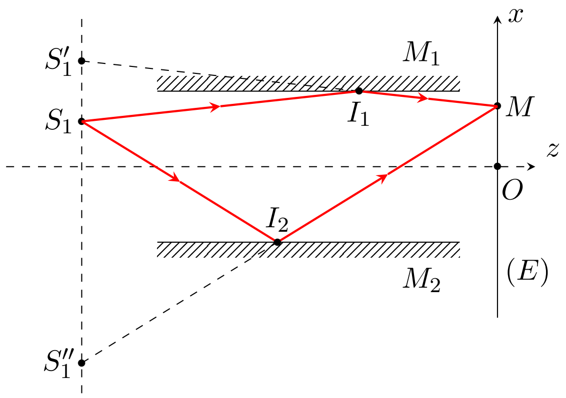
Corrigé du DM n°15

1 Dispositif interférentiel



1. Pour commencer, on suppose que S_2 n'est pas présente.
   a) La paroi (P) empêche les rayons lumineux d'arriver directement de S_1 à M. La seule possibilité est qu'ils se réfléchissent sur les miroirs. Il y aura donc deux rayons pouvant arriver en M :
      - Le rayon qui se réfléchit sur M_1 en I_1 et qui semble provenir de S'_1, symétrique de S_1 par rapport au plan du miroir M_1.
      - Le rayon qui se réfléchit sur M_2 en I_2 et qui semble provenir de S''_1, symétrique de S_1 par rapport au plan du miroir M_2.

   b) Calculons la différence de marche entre ces deux rayons. En supposant que l'indice de l'air vaut 1, il vient :

$$\delta(M) = (S_1M)_2 - (S_1M)_1 = S_1I_2 + I_2M - S_1I_1 - I_1M$$

   Or, $S_1I_1 = S'_1I_1$ et $S_1I_2 = S''_1I_2$ et comme les points S'_1, I_1 et M sont alignés (et qu'il en va de même pour les points S''_1, I_2, M), on obtient en définitive :

$$\delta(M) = S''_1M - S'_1M$$

   ce qui est une différence de marche analogue à celle des trous d'Young.

   Dans le repère $(Oxyz)$ les différents points ont pour coordonnées :

$$S'_1\,(2b - a, 0, -D) \qquad S''_1\,(-2b - a, 0, -D) \quad \text{et} \quad M(x, 0, 0)$$

   ce qui conduit à :

$$S'_1M = \sqrt{D^2 + (x + a - 2b)^2} = D\sqrt{1 + \frac{(x + a - 2b)^2}{D^2}} \approx D + \frac{(x + a - 2b)^2}{2D}$$

   et

$$S''_1M = \sqrt{D^2 + (x + a + 2b)^2} = D\sqrt{1 + \frac{(x + a + 2b)^2}{D^2}} \approx D + \frac{(x + a + 2b)^2}{2D}$$

   et donc :

$$\delta(M) = \frac{(x + a + 2b)^2 - (x + a - 2b)^2}{2D} = \frac{4b\,(x + a)}{D}$$

Comme les deux ondes proviennent de la même source ponctuelle et qu'elles sont monochromatiques de même longueur d'onde λ, l'intensité est donnée par la *formule de Fresnel* :

$$\boxed{I_1(M) = 2I_0\left[1+\cos\left(\frac{8\pi}{\lambda}\frac{b(x+a)}{D}\right)\right]}$$

2. Les deux sources étant incohérentes, il faut ajouter leurs intensités. Pour obtenir l'intensité $I_2(M)$, il suffit de changer a en $-a$. On obtient donc :

$$I_2(M) = 2I_0\left[1+\cos\left(\frac{8\pi}{\lambda}\frac{b(x-a)}{D}\right)\right]$$

et donc :

$$\begin{aligned} I(M) &= 2I_0\left[2+\cos\left(\frac{8\pi}{\lambda}\frac{b(x+a)}{D}\right)+\cos\left(\frac{8\pi}{\lambda}\frac{b(x-a)}{D}\right)\right] \\ &= 4I_0\left[1+\cos\left(\frac{8\pi}{\lambda}\frac{ab}{D}\right)\cos\left(\frac{8\pi}{\lambda}\frac{bx}{D}\right)\right] \end{aligned}$$

3. L'interfrange i est la période de la fonction $x \longmapsto I(x)$ et il est donc égal à :

$$\boxed{i = \frac{\lambda D}{4b}}$$

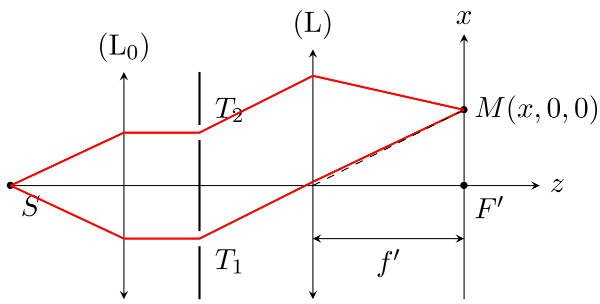
Le contraste se calcule avec $I_{\min} = 4I_0\left[1-\left|\cos\left(\frac{8\pi}{\lambda}\frac{ab}{D}\right)\right|\right]$ et $I_{\max} = 4I_0\left[1+\left|\cos\left(\frac{8\pi}{\lambda}\frac{ab}{D}\right)\right|\right]$, ce qui entraîne :

$$\boxed{C = \frac{I_{\max}-I_{\min}}{I_{\max}+I_{\min}} = \left|\cos\left(\frac{8\pi}{\lambda}\frac{ab}{D}\right)\right|}$$

II. Détermination de la densité spectrale d'une diode laser

1) Cela signifie Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation.

2) a) On a le schéma ci-dessous :



Un calcul de différence de marche utilise pour la suite donne (en supposant que l'indice de l'air vaut 1) :

$$\delta(M) = \frac{ax}{f'}$$

b) Chaque composante monochromatique composant la lumière émise par S crée sa propre figure d'interférences avec une intensité donnée par la formule de Fresnel :

$$K\,J_{no}(\sigma)\,[\,1+\cos(2\pi\sigma\,\delta)\,]\,\mathrm{d}\sigma$$

K étant une constante de proportionnalité. L'intensité en M (où la différence de marche est δ) est donc donnée par :

$$I(M) = K \int_0^{+\infty} J_{no}(\sigma)\,[\,1 + \cos(2\pi\sigma\,\delta)\,]\,\mathrm{d}\sigma \quad \text{avec} \quad \delta = \frac{ax}{f'}$$

c) Les données mathématiques de l'énoncé conduisent à :

$$I(x) = K\,J_0\pi\Delta\sigma + J_0\pi\Delta\sigma\,e^{-2\pi\Delta\sigma|\delta|}\,\cos(2\pi\sigma_0\,\delta)$$

d'où :

$$\boxed{I(x) = \frac{I_0}{2}\left[1 + e^{-2\pi\Delta\sigma\,a|x|/f'}\,\cos\left(\frac{2\pi\sigma_0\,ax}{f'}\right)\right]}$$

3) Avec $a = vt$ on obtient en $x = x_0$ fixé :

$$I(x_0, t) = \frac{I_0}{2}\left[1 + e^{-2\pi\Delta\sigma\,vt|x_0|/f'}\,\cos\left(\frac{2\pi\sigma_0\,vt\,x_0}{f'}\right)\right]$$

qui est de la forme voulue par l'énoncé à condition de poser :

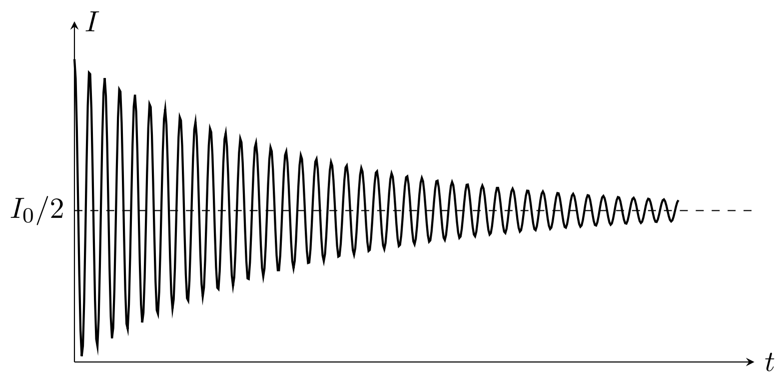
$$\boxed{\tau = \frac{f'}{2\pi\Delta\sigma\,vx_0} \quad \text{et} \quad T = \frac{f'}{\sigma_0 v\,x_0}}$$

On constate que :

$$\frac{T}{\tau} = 2\pi\,\frac{\Delta\sigma}{\sigma_0} \ll 1$$

Le cosinus oscille donc très rapidement entre les deux courbes enveloppes $\frac{I_0}{2}\left[1 + e^{-t/\tau}\right]$ et $\frac{I_0}{2}\left[1 - e^{-t/\tau}\right]$.

4) On peut proposer la figure ci-dessous :



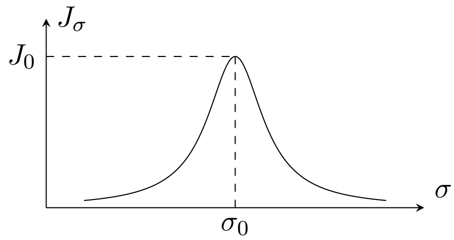
5) a) On mesure la période T sur la seconde figure : $12T = 4$ donc $T = 333$ ms. Sur la première figure, on remarque que, partant de 1 pour l'enveloppe supérieure, on arrive à 0,59 au bout de 400 s. On en déduit que :

$$\frac{1}{2}\left[1 + e^{-400/\tau}\right] = 0{,}59 \quad \text{donc} \quad \boxed{\tau = 234\ \text{s}}$$

On mesure alors :

$$\boxed{\Delta\sigma = 5{,}4 \times 10^2\ \text{m}^{-1} \quad \text{et} \quad \lambda_0 = 416\ \text{nm}}$$

b) La largeur à mi-hauteur de la raie se calcule par :



On cherche ensuite les deux valeurs de σ solutions de $J_\sigma(\sigma) = J_0/2$, ce qui conduit à l'équation :

$$\left(\frac{\sigma - \sigma_0}{\Delta\sigma}\right)^2 = 1 \iff \sigma = \sigma_0 \pm \Delta\sigma$$

La largeur à mi-hauteur est donc : $\boxed{\Delta\sigma_{1/2} = \sigma_+ - \sigma_- = 2\Delta\sigma = 1{,}1 \times 10^3 \text{ m}^{-1}}$.

Sachant que $\sigma = \nu/c$, il s'ensuit que $\Delta\nu_{1/2} = c\Delta\sigma_{1/2}$ et donc que :

$$\boxed{\tau_c = \frac{1}{\Delta\nu_{1/2}} = \frac{1}{c\,\Delta\sigma_{1/2}} = 3{,}06 \times 10^{-12} \text{ s} \quad \text{et} \quad \ell_c \approx 1 \text{ mm}}$$

On montre alors facilement que :

$$\boxed{\frac{\Delta\lambda_{1/2}}{\lambda_0} = \frac{\Delta\sigma_{1/2}}{\sigma_0} \implies \Delta\lambda_{1/2} = \lambda_0^2\,\Delta\sigma_{1/2} = \ 0{,}2 \text{ nm}}$$