

DM n°16  
 Pour le mardi 7 mars 2023

## I. Mesure de la longueur d'onde centrale d'un raie

Un interféromètre de Michelson utilisé en configuration lame d'air est éclairé par une source ponctuelle  $S_0$ . Les deux miroirs de l'interféromètre sont parfaitement orthogonaux entre eux, mais ne sont pas à la même distance de la séparatrice. On supposera que les lames séparatrice et compensatrice sont assimilables à une seule lame séparatrice  $L_S$  d'épaisseur nulle et orientée à  $45^\circ$ .

La source ponctuelle  $S_0$  émet une lumière formée d'une seule raie de longueur d'onde centrale  $\lambda_0$ . On se place dans la zone de cohérence  $|\delta(M)| \ll \ell_c$ .

On note  $d$  l'épaisseur de la lame d'air que forment les deux miroirs.

1. Faire un schéma simplifié de l'interféromètre dans la configuration lame d'air.
2. On observe les interférences dans le plan focal image d'une lentille convergente (L), de distance focale image  $f' = 2,00$  m. Montrer qu'en un point  $M$  de l'écran, repéré par l'angle  $i$  par rapport à l'axe optique de la lentille, la différence de marche entre les deux rayons issus de l'interféromètre vaut  $\delta(M) = 2d \cos i$ .
3. Écrire l'expression littérale de l'intensité lumineuse (ou éclairement)  $I$  en fonction de l'angle  $i$ . Justifier la forme des franges observées sur l'écran et reproduites à la figure 1.
4. L'épaisseur de la lame d'air vaut  $d = 1,75$  mm. Au centre de l'écran, l'intensité n'est pas maximale. Si  $p_0$  est l'ordre d'interférence au centre, on posera par la suite  $p_0 = p_c + \varepsilon$  avec  $p_c \in \mathbb{N}$  et  $0 < \varepsilon < 1$ .

Déterminer l'ordre d'interférence du plus petit anneau brillant. On suppose que la zone observée sur l'écran est de suffisamment petite taille pour qu'en chaque point de l'écran, on ait  $i \ll 1$ . Montrer que le rayon  $R_m$  du  $m^{\text{ième}}$  anneau brillant vaut :

$$R_m = f' \sqrt{\frac{(m - 1 + \varepsilon)\lambda_0}{d}}$$

5. La figure observée est représentée figure 1. Relever dans un tableau le rayon des dix premiers anneaux brillants. On prendra soin de réfléchir au nombre de chiffres significatifs pertinents.
6. En déduire une valeur numérique de la longueur d'onde  $\lambda_0$  de la diode laser. On détaillera très précisément la méthode employée. À quelle couleur correspond cette longueur d'onde ?
7. Un expérimentateur utilise la vis de chariotage pour augmenter régulièrement la valeur de  $d$  ( $d$  étant initialement positif). Comment évolue la figure observée à l'écran ? On constate également que le contraste de la figure d'interférences diminue au fur et à mesure que  $d$  augmente. Proposer une explication.

## II. Interféromètre de Michelson

### I. Généralités sur les interféromètres

1. Donner un exemple de dispositif à division du front d'onde. Donner un exemple de dispositif à division d'amplitude.

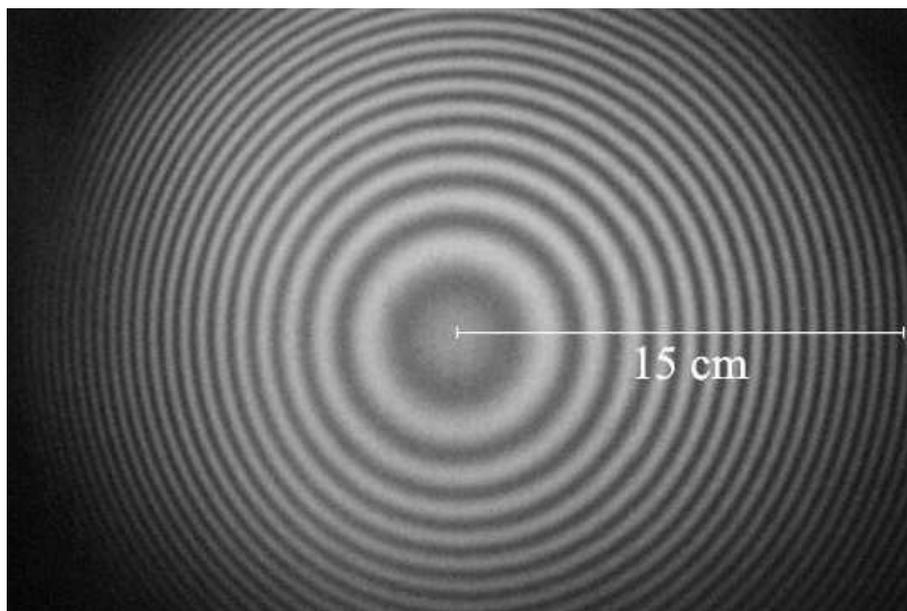


FIGURE 1 –

2. Qu'appelle-t-on longueur de cohérence ? Quel est son rôle dans les conditions d'observation des franges d'interférences ?
3. Comment peut-on sélectionner une raie quasi-monochromatique de la lumière émise ?

Un interféromètre de Michelson est constitué d'une lame semi-réfléchissante, non-absorbante, appelée séparatrice  $S_p$  dont les facteurs de transmission et de réflexion sont supposés égaux, et de deux miroirs plans  $M_1$  et  $M_2$ . La lame  $S_p$  est inclinée à  $45^\circ$  par rapport aux normales à  $M_1$  et  $M_2$ . L'interféromètre est plongé dans l'air. Dans tout le problème, on ne tiendra compte ni des inconvénients liés à l'épaisseur non négligeable de la séparatrice (inconvénients supposés parfaitement corrigés grâce à une lame compensatrice), ni d'éventuels changements de phase par réflexion. L'indice de l'air sera pris égal à 1.

On utilise comme source étendue  $S$  une lampe spectrale de symétrie de révolution autour de l'axe  $Jx$ .

## II. Interféromètre de Michelson utilisé en lame d'air

Ici,  $M_1$  et  $M_2$  sont perpendiculaires l'un à l'autre.

4. L'interféromètre a été réglé de sorte que les deux bras de l'interféromètre aient des longueurs égales ( $JA_1 = JA_2$ ). L'observation se fait en lumière monochromatique, dans le plan focal image d'une lentille mince convergente  $L$  d'axe optique ( $Jy$ ) et de distance focale image  $f' = 1$  m. Qu'observe-t-on ?
5. On translate  $M_2$  normalement à son plan de  $e = 1,1$  mm dans la direction des  $x$  positifs. On considère un rayon incident (issu d'un point source quelconque de la source étendue), avec un angle d'incidence  $i$ . Montrer à l'aide d'un schéma que le phénomène d'interférences observé est analogue à celui d'une lame d'air à faces parallèles. Faire un tracé des deux rayons lumineux émergents de l'interféromètre associés à ce rayon incident. En quel point  $P$  de l'écran vont-ils interférer après passage dans la lentille ?

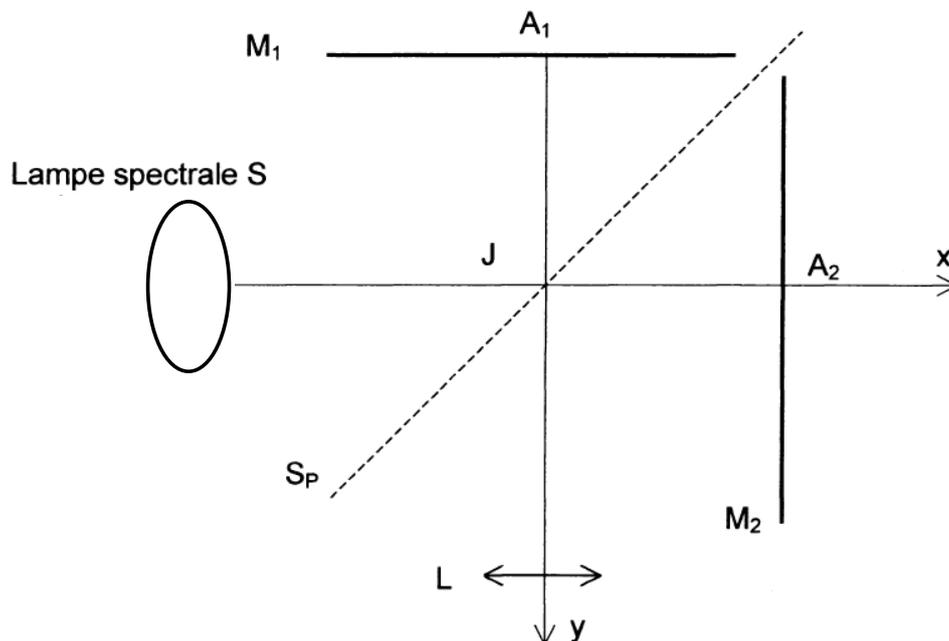


FIGURE 2 –

6. Exprimer la différence de marche en ce point en fonction de l'inclinaison  $i$  des rayons émergents de l'interféromètre par rapport à l'axe  $(A_1, y)$ . En déduire l'intensité lumineuse (ou éclaircissement) sur l'écran ainsi que l'ordre d'interférence  $p$  au point  $P$  associé à l'angle d'incidence  $i$ . En quel point de l'écran cet ordre  $p$  est-il maximal ?

Dans toute la suite, on se contentera d'une analyse limitée à l'ordre 2 inclus en  $i$  (angle d'incidence) car on suppose  $i \ll 1$ .

7. Quel est le lieu de localisation des franges d'interférences lorsque la source  $S$  est étendue ?
8. Avec une raie de longueur d'onde  $\lambda_0 = 546,1$  nm dans le vide et toujours avec  $e = 1,1$  mm, déterminer la valeur de l'ordre d'interférence du premier anneau brillant, puis son rayon. Déterminer de même les rayons des deuxième et troisième anneaux brillants. Que constate-t-on ?
9. On place sur le bras  $JA_1$  et parallèlement au miroir  $M_1$  une lame transparente à faces parallèles d'épaisseur  $e' = 9,5$   $\mu\text{m}$  et d'indice  $n = 1,5117$ . Calculer la variation, due à l'introduction de cette lame, de l'ordre d'interférence **au centre**.

Dans toute la suite, on enlève cette lame à faces parallèles.

### III. Interféromètre de Michelson utilisé en coin d'air

10. À partir d'une situation où les deux bras sont égaux  $JA_1 = JA_2$ , on fait tourner le miroir  $M_2$  d'un angle  $\alpha$  très faible autour d'un axe passant par  $A_2$  et perpendiculaire au plan passant par  $J$ ,  $A_1$  et  $A_2$ .

Montrer à l'aide d'un schéma que le dispositif est équivalent à un coin d'air d'angle  $\alpha$ . Comment peut-on éclairer le coin d'air en incidence quasi-normale ?

11. Pour observer une image nette et agrandie des interférences sur un écran, on utilise une lentille convergente  $L'$  de distance focale 0,2 m (cette lentille remplace la lentille  $L$ ) et un

écran. La lentille est placée à 0,25 m du miroir  $M_1$ , son axe optique correspond à l'axe ( $Jy$ ) (on rappelle que l'angle  $\alpha$  est faible). Préciser la position de l'écran d'observation et calculer le grandissement.

12. Caractériser le système de franges et donner l'expression de l'interfrange  $i$  observé sur l'écran.

$AN : i = 3,75 \text{ mm}$  ,  $\lambda = 546,1 \text{ nm}$ . Donner la valeur de  $\alpha$ .

13. On éclaire le coin d'air en lumière blanche : qu'observe-t-on sur l'arête du coin d'air (ou sur son image) ?

Expliquer pourquoi, si l'angle  $\alpha$  augmente, la région du coin d'air où l'observation des franges en lumière blanche (teintes de Newton) est observable devient plus étroite.

#### IV. Application 1 : détermination des longueurs d'onde d'un doublet

L'interféromètre étant utilisé dans les mêmes conditions que dans la partie précédente, on remplace la source primaire par une lampe à vapeur de sodium dont on suppose que le spectre d'émission ne contient que deux raies intenses, de couleur jaune et de longueurs d'onde  $\lambda_1 = 589,0 \text{ nm}$  et  $\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda$  avec  $0 < \Delta\lambda \ll \lambda_1$ .

On observe alors des franges très contrastées de même forme que celles obtenues dans la partie précédente.

14. Compte tenu de l'approximation  $\Delta\lambda \ll \lambda_1$ , montrer que l'intensité lumineuse à la surface des miroirs est donnée par l'expression :

$$I = 4I_0 \left( 1 + \cos \left( \frac{\pi \Delta\lambda}{\lambda_{moy}^2} \delta \right) \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda_{moy}} \delta \right) \right)$$

où  $\lambda_{moy} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$ .

15. Ensuite on translate  $M_2$  d'une distance  $d$  et on constate que les franges disparaissent une première fois lorsque  $d = 0,15 \text{ mm}$ . En déduire  $\Delta\lambda$  et  $\lambda_2$ .

#### V. Application 2 : détermination de la largeur spectrale d'une raie

L'interféromètre, toujours utilisé dans les mêmes conditions que dans la partie III, est éclairé par une lampe à vapeur de Cadmium. La raie principale du Cadmium ( $\lambda_0 = 643,8 \text{ nm}$ ) n'est pas rigoureusement monochromatique et on cherche à déterminer sa largeur spectrale  $\Delta\nu$ .

16. Quelle est la couleur de la raie principale du cadmium ?
17. Michelson avait trouvé pour la raie rouge du cadmium une longueur de cohérence  $L_c = 30 \text{ cm}$ . Calculer  $\Delta\nu$  pour la raie rouge du cadmium et en déduire la durée  $\tau$  du train d'onde.
18. On se propose de calculer l'intensité lumineuse due à cette raie en supposant qu'elle est composée d'une infinité de vibrations monochromatiques dont les fréquences sont comprises entre  $(\nu_0 - \Delta\nu/2)$  et  $(\nu_0 + \Delta\nu/2)$ , où  $\nu_0$  est la fréquence centrale de la raie correspondant à la longueur d'onde  $\lambda_0$ , et où  $\Delta\nu \ll \nu_0$ . On suppose que si on obturait une des deux voies, les vibrations dont la fréquence est comprise entre  $\nu$  et  $\nu + d\nu$  produiraient dans le plan focal image de la lentille une intensité de la forme :  $J_0 d\nu$ .

(a) Justifier pourquoi il est possible d'écrire l'intensité sur l'écran sous la forme :

$$I(\delta) = \int_{\nu_0 - \Delta\nu/2}^{\nu_0 + \Delta\nu/2} 2J_0 \left[ 1 + \cos \left( \frac{2\pi\nu\delta}{c} \right) \right] d\nu$$

(b) Montrer que  $I(\delta)$  peut s'écrire sous la forme :

$$I(\delta) = 2J_0\Delta\nu \left[ 1 + V(\delta) \cos\left(\frac{2\pi\nu_0\delta}{c}\right) \right]$$

et exprimer le facteur de contraste  $\mathcal{C} = |V(\delta)|$  ( $V(\delta)$  est appelé facteur de visibilité) des franges en fonction de la différence de marche  $\delta$ , de  $\Delta\nu$  et de la vitesse de la lumière dans le vide  $c$ . On pourra faire intervenir la fonction sinus cardinal  $\text{sin}_c$  définie par  $\text{sin}_c(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ .

(c) Pour quelle valeur de  $\delta$  obtient-on le premier brouillage de la figure d'interférence ?

### III. — Contrôle d'épaisseur de certaines pièces

Pour une bonne mise au point mécanique et aérodynamique du dragster, il est important de contrôler précisément certaines épaisseurs, on utilise pour cela des dispositifs interférentiels. La première mesure consiste en la vérification de l'épaisseur d'un dépôt métallique opaque destiné à protéger certaines pièces, la seconde est la mesure de l'épaisseur d'une pièce en verre et donc transparente.

#### III.A. — Contrôle d'épaisseur d'un dépôt métallique

On éclaire une lame de verre semi-réfléchissante, supposée infiniment fine, et formant un angle  $\varepsilon = 0,1^\circ$  avec une plaque réfléchissant totalement la lumière sur laquelle le dépôt métallique a été effectué. L'éclairement est assuré par une lumière monochromatique de longueur d'onde  $\lambda_0 = 532 \text{ nm}$ . L'incidence est quasi normale. Le dépôt est assimilable à un parallélépipède métallique opaque d'épaisseur constante posé au contact de la lame réfléchissante. L'ensemble est représenté sur la partie gauche de la figure 6.

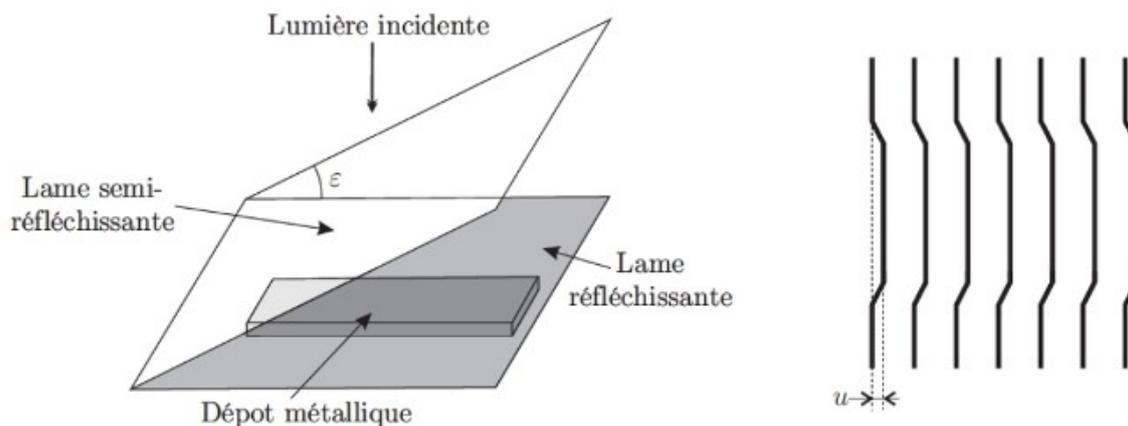


FIGURE 6 – Dispositif optique et franges observées sur l'écran

Au voisinage des lames, on observe des franges non rectilignes, on dit qu'elles sont « déchirées ». Ces franges sont observées sur un écran placé à 50 cm d'une lentille convergente de distance focale  $f' = 4 \text{ cm}$ . Elles sont représentées sur la partie droite de la figure 6.

- 19 — Déterminer l'expression de l'interfrange  $d_i$  observée sur l'écran dans la zone où le dépôt est absent. On exprimera  $d_i$  en fonction de  $\lambda_0$ ,  $\varepsilon$  et du grandissement  $\gamma$  de la lentille et on calculera sa valeur numérique.
- 20 — Expliquer ce que l'on observe sur l'écran (présence du décroché) et montrer que l'épaisseur  $e$  du dépôt métallique dépend de la valeur  $u$  du décroché mesurée sur l'écran (partie droite de la figure 6). On explicitera la relation entre  $e$ ,  $u$  et d'autres paramètres utiles de l'expérience. On mesure  $u = 0,59$  mm sur l'écran, quelle est la valeur numérique de l'épaisseur du dépôt ? On commentera ce résultat.
- 21 — Qu'observe-t-on sur l'écran si on remplace l'air par de l'eau dans la même expérience. Préciser, en le justifiant, ce qui est modifié et ce qui ne l'est pas.
- 22 — Qu'observe-t-on sur l'écran si l'on augmente l'angle  $\varepsilon$ . Préciser, en le justifiant, ce qui est modifié et ce qui ne l'est pas.