

# Proposition de corrigé

Ce corrigé à été rédigé par David LASNE. N'hésitez pas à me signaler par mail (david.lasne@wanadoo.fr) toute coquille ou erreur. Vous pouvez le distribuer à vos élèves. Merci à Nathalie GUILBERT pour la relecture et à Matthieu RIGAUT pour les discussions en amont.

Par ailleurs quelques imperfections ou ambiguïtés repérées dans l'énoncé de cette épreuve sont notées en rouge au fur et à mesure.

## I / Le câble coaxial

### I.1 Le câble coaxial parfait

**Q1.** Lorsque le câble est fermé à son extrémité par un dipôle, le courant "revient" par la gaine. Cependant, on ne se place pas dans l'ARQS ici, donc le courant n'a pas réellement besoin de "revenir"... La question peut donc troubler certains élèves...

**Q2.** La loi des mailles donne, en notant  $u_L$  la tension aux bornes de la bobine, en convention récepteur :

$$u(x, t) = u(x + dx, t) + u_L$$

Or  $u_L = \Lambda dx \frac{\partial i(x, t)}{\partial t}$  et  $u(x + dx, t) = u(x, t) + \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} dx$  donc

$$\boxed{\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = -\Lambda \frac{\partial i(x, t)}{\partial t}}$$

Ensuite, la loi des nœuds donne, en notant  $i_C$  le courant qui "descend" dans le condensateur :

$$i(x, t) = i(x + dx, t) + i_C$$

Or  $i_C = \Gamma dx \frac{\partial u(x + dx, t)}{\partial t} = \Gamma dx \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$  au premier ordre, et  $i(x + dx, t) = i(x, t) + \frac{\partial i(x, t)}{\partial x} dx$  donc

$$\boxed{\frac{\partial i(x, t)}{\partial x} = -\Gamma \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}}$$

**Q3.** On dérive la première équation par rapport au temps et la seconde par rapport à l'espace, et on assimile les dérivées croisées :  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}$  (théorème de SCHWARTZ). Il vient alors :

$$-\Lambda \frac{\partial^2 i(x, t)}{\partial t^2} = -\frac{1}{\Gamma} \frac{\partial^2 i(x, t)}{\partial x^2} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 i(x, t)}{\partial t^2} - \frac{1}{\Lambda \Gamma} \frac{\partial^2 i(x, t)}{\partial x^2} = 0}$$

De même, en dérivant la première équation par rapport à  $x$  et la seconde par rapport à  $t$ , et en assimilant les dérivées croisées de  $i(x, t)$  :

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \Gamma \Lambda \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \frac{1}{\Lambda \Gamma} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = 0}$$

On reconnaît dans les 2 cas une équation de D'ALEMBERT avec une célérité des ondes  $v = \sqrt{\frac{1}{\Gamma \Lambda}}$ .

$v$  est bien une vitesse pour que l'équation reste homogène :  $\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$  est en  $V.s^{-2}$  et  $\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$  est en  $V.m^{-2}$  donc  $v$  est bien en  $m.s^{-1}$ .

Autre manière de le vérifier :  $\sqrt{\frac{1}{LC}}$  est la pulsation caractéristique d'un circuit RLC, donc en  $s^{-1}$ , or  $\Gamma$  et  $\Lambda$  sont des grandeurs linéiques donc  $\sqrt{\frac{1}{\Gamma \Lambda}}$  est bien en  $m.s^{-1}$ .

**Q4.** On injecte la solution proposée dans l'équation de D'ALEMBERT. Comme  $\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = (j\omega)^2 \underline{u}(x, t)$  et  $\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = (-jk)^2 \underline{u}(x, t)$ , celle-ci devient :

$$-k^2 \underline{u}(x, t) + \frac{\omega^2}{v^2} \underline{u}(x, t) = 0 \Rightarrow \boxed{k = \frac{\omega}{v}}$$

On obtient la relation de dispersion usuelle associée à l'équation de D'ALEMBERT : en effet, on a cherché une solution en somme d'OPPM se propageant dans le sens des  $x$  croissants (terme en  $i_0$ ) et décroissants (terme en  $i_1$ ).

**Q5.** On injecte la solution proposée dans l'une des équations de couplage, par exemple  $\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = -\Lambda \frac{\partial i(x, t)}{\partial t}$  :

$$-jk\rho i_0 e^{j(\omega t - kx)} - jk\rho i_1 e^{j(\omega t + kx)} = -\Lambda j\omega i_0 e^{j(\omega t - kx)} - \Lambda j\omega i_1 e^{j(\omega t - kx)}$$

On en déduit :

$$k\rho = \Lambda\omega \Rightarrow \rho = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}} = Z_c$$

Si  $u$  est une tension et  $i$  une intensité,  $\rho$  et donc  $Z_c$  sont des impédances, homogènes à des résistances, donc en  $\Omega$ .

**Q6.** On applique la loi d'OHM à l'extrémité du câble :  $\underline{u}(d, t) = \underline{Z}i(d, t)$  :

$$\rho i_0 e^{j(\omega t - kd)} - \rho i_1 e^{j(\omega t + kd)} = \underline{Z}i_0 e^{j(\omega t - kd)} + \underline{Z}i_1 e^{j(\omega t + kd)}$$

$$i_0(\rho - \underline{Z})e^{-jkd} = i_1(\rho + \underline{Z})e^{+jkd} \Rightarrow \mathbf{i_1 = i_0 \frac{\rho - \underline{Z}}{\rho + \underline{Z}} e^{-2jkd}}$$

**Q7.** On note  $\chi = \frac{\rho - \underline{Z}}{\rho + \underline{Z}} e^{-2jkd}$  le coefficient de réflexion pour exprimer  $\underline{Z}_l(x)$  :

$$\underline{Z}_l(x) = \frac{u(x, t)}{i(x, t)} = \frac{\rho(i_0 e^{-jkx} - i_1 e^{+jkx})}{i_0 e^{-jkx} + i_1 e^{+jkx}}$$

$$\underline{Z}_l(x) = \rho \frac{e^{-jkx} - \chi e^{+jkx}}{e^{-jkx} + \chi e^{+jkx}} = \rho \frac{(\rho + \underline{Z})e^{-2jkx} - (\rho - \underline{Z})e^{-2jkd}}{(\rho + \underline{Z})e^{-2jkx} + (\rho - \underline{Z})e^{-2jkd}}$$

$\underline{Z}_l(x)$  est donc indépendant de  $x$  si  $\mathbf{\rho = \underline{Z} = Z_c}$ . Dans ce cas,  $\underline{Z}_l(x) = \rho$  et  $\chi = 0$ , c'est-à-dire  $\mathbf{i_1 = 0}$  : il n'y a **pas d'onde réfléchi** : toute l'onde est transmise, ce qui optimise le transfert du signal. il faut donc mettre en bout de câble une impédance égale à  $Z_c$  ("adaptation d'impédance").

## I.2 Le câble coaxial avec pertes

**Q8.** Les parties métalliques (gaine et âme) sont en métal non parfait, ayant une conductivité limitée, donc une certaine résistance : il y a donc des pertes par effet JOULE.

**Q9.** La loi des mailles donne cette fois :

$$u(x, t) = u(x + dx, t) + u_L + u_R$$

Or  $u_L = \Lambda dx \frac{\partial i(x, t)}{\partial t}$ ,  $u_R = r dx i(x, t)$  et  $u(x + dx, t) = u(x, t) + \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} dx$  donc

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = -\Lambda \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} - r i(x, t)$$

Par ailleurs, on a toujours  $\frac{\partial i(x, t)}{\partial x} = -\Gamma \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$  par la loi des nœuds. En dérivant la première équation par rapport à  $x$ , on obtient :

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = -r \frac{\partial i(x, t)}{\partial x} - \Lambda \frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t}$$

En remplaçant avec la seconde équation, on obtient la relation demandée :

$$\mathbf{\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = r\Gamma \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \Gamma\Lambda \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}}$$

**Q10.** On injecte la solution proposée :

$$(-jk)^2 = \Gamma\Lambda(j\omega)^2 + r\Gamma j\omega$$

D'où la relation de dispersion :  $\mathbf{k^2 = \Gamma\Lambda\omega^2 - r\Gamma j\omega}$ .

**Q11.** Si  $\underline{k} = \alpha - j\beta$ , on peut écrire  $\underline{u}(x, t) = u_0 e^{-\beta x} e^{j(\omega t - \alpha x)}$ . Ainsi  $\alpha$  correspond à l'aspect propagatif de l'onde, et  $\beta$  à l'absorption de l'onde (sur une distance caractéristique  $1/\beta$ ). Si  $\alpha > 0$ , l'onde se propage vers les  $x$  croissants, donc  $\beta > 0$  pour avoir une atténuation, cohérente avec la dissipation d'énergie par effet JOULE.

**Q12.** On a  $\underline{u}(x, t) = u_0 e^{-\beta x} e^{j(\omega t - \alpha x)}$  et  $\underline{i}(x, t) = i_0 e^{-\beta x} e^{j(\omega t - \alpha x)}$ , donc la puissance moyenne s'écrit :

$$P(x) = \frac{1}{2} \text{Re}(\underline{u}(x, t) \underline{i}^*(x, t)) = \frac{1}{2} u_0 i_0 e^{-2\beta x} = P_0 e^{-2\beta x}$$

On en déduit 
$$A = \frac{10}{\ln 10} \frac{2\beta x}{x} = 2\beta \frac{10}{\ln 10}.$$

**Q13.** On a  $\underline{k}^2 = \Gamma \Lambda \omega^2 \left(1 - \frac{r \Gamma j \omega}{\Gamma \Lambda \omega^2}\right)$ . On passe à la puissance 1/2, puis on utilise le DL de  $(1+x)^\alpha$  pour  $x \ll 1$  (en admettant qu'il fonctionne pour les complexes et que la racine est définie également...):

$$\underline{k} \approx \sqrt{\Gamma \Lambda} \omega \left(1 - \frac{r \Gamma j \omega}{2 \Gamma \Lambda \omega^2}\right)$$

On identifie la partie imaginaire de  $\underline{k}$  à  $\beta$  donc on trouve  $\beta = \sqrt{\Gamma \Lambda} \omega \cdot \frac{r \Gamma \omega}{2 \Gamma \Lambda \omega^2} = \frac{r}{2} \sqrt{\frac{\Gamma}{\Lambda}}$ . On reporte dans l'expression de  $A$  pour obtenir l'expression demandée :

$$A = 2\beta \frac{10}{\ln 10} = \frac{10}{\ln 10} r \sqrt{\frac{\Gamma}{\Lambda}}$$

**Q14.** Le phénomène responsable est l'**effet de peau** : le champ EM ne pénètre dans un conducteur ohmique que sur une profondeur caractéristique  $\delta \propto \frac{1}{\sqrt{\omega}}$ , donc le courant ne circule que sur cette épaisseur caractéristique. Ainsi, lorsque la fréquence augmente, la section de conduction diminue donc la résistance augmente avec  $r \propto \frac{1}{\sqrt{\omega}}$ .

## II / La fibre optique

### II.1 Généralités

**Q15.** Pour la réflexion, avec les notations du schéma :

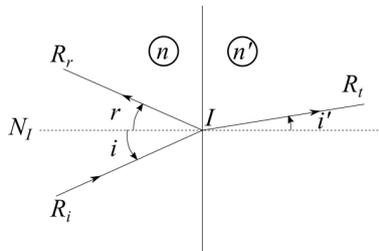
- Le plan d'incidence ( $\mathcal{R}_i, N_I$ ) et le plan de réflexion ( $\mathcal{R}_r, N_I$ ) sont confondus.
- avec les angles **orientés** :

$$r = -i$$

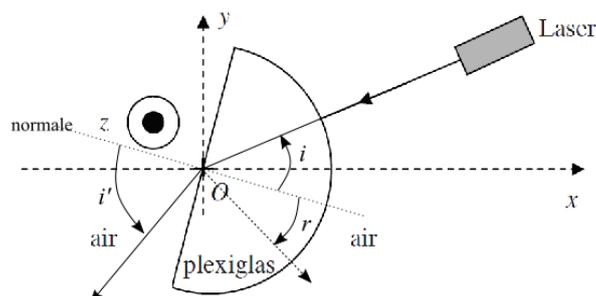
Pour la réfraction, avec les notations ci-dessous :

- Le plan d'incidence ( $\mathcal{R}_i, N_I$ ) et le plan de réfraction ( $\mathcal{R}_t, N_I$ ) sont confondus.
- avec les angles **orientés** :

$$n \sin i = n' \sin i'$$



**Q16.** Le laser n'est pas dévié lorsqu'il traverse le dioptre sphérique car s'il suit le rayon du cercle, il arrive localement sous incidence normale sur ce dioptre. Sur le dioptre plan, une faible partie du faisceau (quelques %) est réfléchi, ce qui permet de vérifier la loi sur l'angle de réflexion. La majorité du faisceau traverse le dioptre plan en étant dévié, ce qui permet de vérifier la loi sur l'angle de réfraction (à condition de connaître l'indice optique du plexiglas). L'air étant moins réfringent que le plexiglas, le faisceau sortira en s'éloignant de la normale. La coplanéarité des rayons peut éventuellement être vérifiée également en choisissant un faisceau laser rasant le support, on constatera alors que les faisceaux réfléchis et réfractés sont aussi rasants.



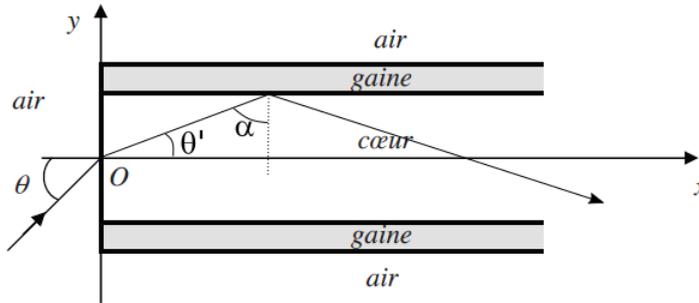
Si on augmente progressivement l'angle d'incidence, on pourra également mettre en évidence le phénomène de réflexion totale car l'air est moins réfringent que le plexiglas.

Enfin, on utilise un laser pour avoir un faisceau parallèle, donc un seul angle d'incidence (si l'on néglige, à cette échelle petite devant la longueur de RAYLEIGH, la divergence du faisceau). De plus, le laser est monochromatique, ce qui évite les problèmes de dispersion (avec de la lumière blanche, on observerait un faisceau de sortie en "arc en ciel" car l'indice du plexiglas dépend de la longueur d'onde, donc l'angle de réfraction également).

## II.2 La fibre optique à saut d'indice

**Q17.** Pour que le faisceau reste dans la fibre, il faut qu'il y ait une réflexion totale au niveau du dioptre cœur/gaine. Il faut donc que l'angle  $\alpha$  dépasse l'angle limite  $\alpha_\ell = \arcsin \frac{n_g}{n_c}$ . Or  $\alpha + \theta' + \frac{\pi}{2} = \pi$  donc  $\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta'$ . On en déduit :

$$\alpha > \alpha_\ell \Rightarrow \theta' < \frac{\pi}{2} - \alpha_\ell$$



On passe au sinus et on applique la loi de SNELL-DESCARTES à l'entrée de la fibre, ce qui donne :

$$n_a \sin \theta < n_c \sin \left( \frac{\pi}{2} - \alpha_\ell \right) \Rightarrow \theta < \arcsin \left( \frac{n_c}{n_a} \sin \left( \frac{\pi}{2} - \alpha_\ell \right) \right) = \arcsin \left( \frac{n_c}{n_a} \cos \arcsin \frac{n_g}{n_c} \right) = \arcsin \left( \frac{n_c}{n_a} \sqrt{1 - \left( \frac{n_g}{n_c} \right)^2} \right)$$

On a donc  $\theta < \theta_L = \arcsin \left( \frac{n_c}{n_a} \sqrt{1 - \left( \frac{n_g}{n_c} \right)^2} \right)$ .

Application numérique :  $\theta_L = 12^\circ$ .

**Q18.** Le chemin le plus court est le chemin direct, en ligne droite, pour  $\theta = 0$ , donc  $T_1 = \frac{n_c L}{c}$ .

**Q19.** Le chemin le plus long est celui pour  $\theta = \theta_L$ . Dans ce cas, la distance parcourue, avec toutes les réflexions, est  $D = \frac{L}{\sin \alpha_\ell} = \frac{n_c}{n_g} L$ , donc  $T_2 = \frac{n_c^2 L}{n_g c}$  (on a bien  $n_c > n_g$  donc  $T_2 > T_1$ ).

**Q20.** On a  $\delta T = T_2 - T_1 = \frac{n_c L}{c} \left( \frac{n_c}{n_g} - 1 \right)$ .

Or  $2\Delta = 1 - \left( \frac{n_c}{n_g} \right)^2 \Rightarrow \frac{n_c}{n_g} = \sqrt{1 - 2\Delta} \approx 1 - \Delta$  donc :

$$\delta T \approx \frac{n_c L}{c} \left( \frac{1}{1 - \Delta} - 1 \right) \approx \frac{n_c L}{c} \Delta$$

Application numérique :  $\delta T = 5.10^{-7}$  s.

**Q21.** L'impulsion en sortie a la même allure que celle en entrée, mais plus étalée (donc d'amplitude plus faible par conservation de l'énergie totale transportée) car selon l'angle d'incidence, la durée de parcours ira de  $T_1$  à  $T_2$ . L'impulsion s'étale donc de  $\delta T$ , pour avoir une durée approximative en sortie  $\tau_s \approx \tau_e + \delta T$ .

**Q22.** Pour que les impulsions ne se mélangent pas, il faut une période supérieure à  $\tau_s$ , donc  $f < \frac{1}{\tau_s}$ . Comme  $\delta T \gg \tau_e$ , on a

$$\tau_s \sim \delta T \text{ donc } f < f_{\max} = \frac{1}{\delta T}$$

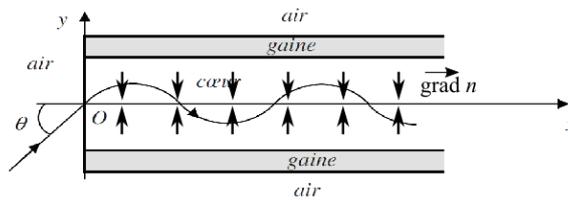
**Q23.** Si  $f < f_{\max} = \frac{1}{\delta T} = \frac{c}{\Delta n_c L_{\max}}$ , on a  $B = f \cdot L_{\max} = \frac{c}{\Delta n_c}$ .

Cette grandeur ne dépend que des caractéristiques physiques propres à la fibre (indices optiques) mais pas de ses conditions d'utilisation (longueur utilisée, fréquence, etc...).

Application numérique :  $L_{\max} = 201$  m. C'est bien trop court pour des communications longue distance (liaison téléphonique, Internet...).

## II.3 La fibre optique à gradient d'indice

**Q24.** D'après l'expression de  $n(y)$ , l'indice est maximal au centre et décroît de part et d'autre. Le vecteur  $\overrightarrow{\text{grad}n}$  allant des faibles valeurs de  $n$  vers les plus importantes, il est orienté vers l'axe central de la fibre :



**Q25.** On applique la loi de SNELLE-DESCARTES à chaque dioptré :  $n_{j-1} \sin i_{j-1} = n_j \sin i_j = n_{j+1} \sin i_{j+1}$ . On en déduit que la grandeur  $n \sin i$  reste constante, et si on passe au modèle continu, on obtient (en remarquant que  $\varphi$  est l'angle par rapport au dioptré et non à la normale, donc  $\sin i = \cos \varphi$  :

$$n(y) \cos \varphi = \text{cste} = n_c \cos \theta_0$$

Par ailleurs, on a  $\tan \varphi = \frac{dy}{dx}$  donc :

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = (\tan \varphi)^2 = \left(\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}\right)^2 = \frac{1 - \cos^2 \varphi}{\cos^2 \varphi}$$

En utilisant la relation démontrée précédemment, on trouve bien  $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \left(\frac{n(y)}{n_c \cos \theta_0}\right)^2 - 1$ .

**Q26.** L'énoncé donne l'équation  $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2\Delta}{(r_c \cos \theta_0)^2} y$ , que l'on peut écrire, en posant  $\kappa = \frac{\sqrt{2\Delta}}{r_c \cos \theta_0}$ , sous la forme :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \kappa^2 y = 0$$

On reconnaît une équation du type "oscillateur harmonique", dont la solution est de la forme :

$$y(x) = \lambda \cos \kappa x + \mu \sin \kappa x$$

Cette fonction est bien périodique, de période (spatiale)  $\frac{2\pi}{\kappa}$ . Elle s'annule toutes les demi-périodes, donc

$$d = \frac{\pi}{\kappa} = \frac{\pi r_c \cos \theta_0}{\sqrt{2\Delta}}$$

**Q27.** L'ouverture numérique ne dépend que de l'indice optique au point d'entrée, donc elle est la même pour les 2 fibres. L'intérêt est que cette grandeur ne dépend pas de la technologie utilisée. **Question un peu étrange, ou alors j'ai raté quelque chose...**

**Q28.** Pour l'AN, il faut la valeur de  $\theta_0$ , que l'on trouve à partir de  $\theta_L$  et de la loi de SNELLE-DESCARTES :  $\theta_0 = 8^\circ$ .

*Application numérique* :  $\delta T' = 2$  ns. On a donc  $\delta T' \ll \delta T$ , ce qui est un avantage technologique (on pourra employer une fréquence plus élevée, donc un débit d'information supérieur). Ceci peut s'expliquer car les rayons qui entrent en biais, et qui prenaient beaucoup de retard dans la fibre classique, sont cette fois "redressés" par le gradient d'indice.

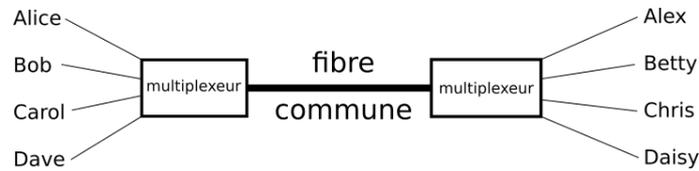
**Q29.** Il faut que le rayon le plus incliné soit "redressé" avant d'atteindre le bord du cœur.

On peut calculer complètement l'équation du rayon lumineux  $y(x)$  avec les CI pour trouver l'amplitude : on obtient  $\lambda = 0$  car  $y(0) = 0$  et  $\mu = \frac{\tan \theta_0}{\kappa}$  avec la pente en  $x = 0$ , et il faut que  $r_c > \mu$ . **Je ne sais pas si l'on attendait une réponse aussi explicite ou juste qualitative.**

## II.4 Le multiplexage par longueurs d'onde

**Q30.** L'intérêt du multiplexage est de pouvoir transmettre plusieurs communications différentes sur la même ligne en même temps : chaque couple de correspondants utilise une longueur d'onde, mais avec une seule fibre, d'où un avantage économique évident.

**Q31.** **Question d'un intérêt discutable... Que peut-on faire de plus que le schéma déjà donné plus bas ? Essayons quand même...**



Alice, Bob, Carol et Dave sont dans une ville, et Alex, Betty, Chris et Daisy dans une autre. Alice communique avec Alex en utilisant une longueur d'onde (par exemple 1000 nm), Bob et Betty utilisent la même ligne, mais avec des signaux à 1020 nm, Carol et Chris font de même mais à 1040 nm et Dave et Daisy à 1060 nm. Le multiplexeur sert, dans un sens, à "combiner" les signaux, et dans l'autre, à les "séparer". Chacun peut suivre sa propre conversation sans être perturbé par les autres, mais en utilisant une unique fibre optique entre les 2 villes.

**Q32.** Plus une question de vocabulaire que de physique, surtout que ce terme n'est pas vraiment employé couramment dans les cours... Le terme "réciproque" signifie que les multiplexeurs fonctionnent dans les 2 sens : ils peuvent combiner ou au contraire séparer les signaux à différentes longueurs d'onde.

**Q33.** On a vu en cours l'effet d'un réseau : s'il est éclairé sous une incidence  $i$ , la lumière est diffractée dans la direction  $i'$  telle que  $\sin i' - \sin i = p \frac{\lambda}{a}$  ("formule des réseaux", avec  $a$  le pas du réseau et  $\lambda$  la longueur d'onde). On comprend donc le rôle du réseau en comme multiplexeur de "sortie" : chaque longueur d'onde (donc chaque signal) est dirigé dans une direction déterminée, ce qui permet de les séparer. Mais à l'inverse, la formule étant symétrique, si on éclaire le réseau avec, pour chaque longueur d'onde, l'incidence adaptée, on peut faire en sorte que toutes les longueurs d'onde soient envoyées dans la même direction, vers l'"entrée" de la fibre.

## II.5 Pertes associées à l'usage de la fibre optique

**Q34.** On effectue un bilan de puissance sur la tranche d'épaisseur  $dx$ . On est en régime stationnaire, donc il n'y a pas de terme de variation temporelle. On peut donc écrire :

$$\delta P_{\text{échangée}} + \delta P_{\text{créée}} = 0$$

Or  $\delta P_{\text{échangée}} = P(x) - P(x + dx)$ . Pour calculer  $\delta P_{\text{créée}}$ , il faut multiplier le nombre d'impuretés  $n_v S dx$  par la puissance absorbée par chacune, qui s'écrit comme une fraction de  $P(x)$ , dans un rapport  $\frac{\sigma}{S}$ , d'où  $\delta P_{\text{créée}} = -\frac{\sigma}{S} P(x) n_v S dx$ . Finalement :

$$P(x) - P(x + dx) - \frac{\sigma}{S} P(x) n_v S dx = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{dP}{dx} = -\sigma n_v P(x)}$$

La résolution est immédiate :  $\boxed{P(x) = P_0 e^{-\sigma n_v x}}$ . On peut vérifier que  $h = \frac{1}{\sigma n_v}$  est bien homogène à une longueur caractéristique.

**Q35.**  $\ln \frac{P_0}{P(x)} = +\sigma n_v x$  donc  $\boxed{A = \frac{10}{\ln 10} \sigma n_v}$ .

**Q36.** On cherche  $d_{max}$  tel que  $P(d_{max}) = 0,01 P_0$ , soit  $e^{-\sigma n_v d_{max}} = 0,01$ . On obtient donc  $\boxed{d_{max} = \frac{2 \ln 10}{\sigma n_v} = \frac{20}{A}}$ .

*Application numérique :*  $d_{max, fibre} = 100$  km et  $d_{max, coax} = 2$  km : on a beaucoup moins d'atténuation avec une fibre qu'avec un câble, qui n'est donc pas adapté pour des longues distances.

**Q37.** On choisit la longueur d'onde pour laquelle l'atténuation est minimale. Si l'on regarde la courbe expérimentale, on constate que c'est pour  $\lambda \approx 1,6$   $\mu\text{m}$ . On est dans le domaine des infrarouges.

**Q38.** L'atome d'oxygène est 16 fois plus massif que celui d'hydrogène : d'après le PFD, à force équivalente, son accélération sera beaucoup plus faible.

**Q39.** La lumière est une onde électromagnétique : les particules chargées sont donc soumises à un champ électrique, donc une force électrique  $\vec{F} = q\vec{E}$  qui va mettre en mouvement la particule chargée.

**Q40.** On applique le PFD à l'atome d'hydrogène, soumis à la force électrique et à la force de rappel du ressort :

$$m\ddot{x} = -kx + qE \Rightarrow \boxed{\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{q}{m}E_0 \cos(2\pi f t)}$$

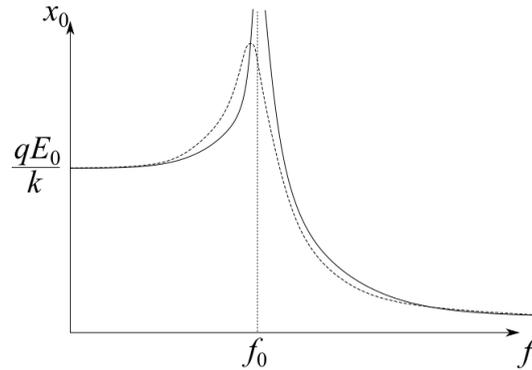
C'est l'équation d'un oscillateur harmonique forcé, de pulsation/fréquence propre  $\boxed{\omega_0 = 2\pi f_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$ .

**Q41.** En régime sinusoïdal permanent, on cherche  $x(t) = x_0 \cos(2\pi f t + \varphi)$ . On peut passer en complexes, mais ici, en l'absence de terme d'amortissement en  $\dot{x}$ , on peut directement dériver et on obtient :

$$-(2\pi f)^2 x_0 \cos(2\pi f t + \varphi) + (2\pi f_0)^2 x_0 \cos(2\pi f t + \varphi) = \frac{q}{m} E_0 \cos(2\pi f t)$$

Ceci impose  $\varphi = 0$  et l'amplitude vaut  $x_0 = \frac{qE_0}{4\pi^2 m(f_0^2 - f^2)}$ .

On observe une résonance pour  $f = f_0$ , mais avec une amplitude qui diverge. Ceci est dû à l'absence de terme d'amortissement (frottement) dans ce modèle. En réalité (courbe en - -), la résonance serait finie, et pour une fréquence légèrement inférieure à  $f_0$ .



**Q42.** On calcule  $f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$ . Application numérique :  $f_0 = 1,07 \cdot 10^{14}$  Hz. Or l'absorption se fait pour une fréquence correspondant au premier harmonique, donc pour  $f = 2f_0$ . On en déduit que  $\lambda_{OH} = \frac{c}{2f_0}$ .

Application numérique :  $\lambda_{OH} = 1,4 \mu\text{m}$ , ce qui est cohérent avec la courbe.

Comprendre que la fréquence à prendre soit  $2f_0$ , pour le "premier harmonique", n'aura peut-être pas été simple pour beaucoup d'élève, pour lesquels la notion d'harmonique est parfois floue. Peut-être qu'un début de phrase du type "Le pic principal... correspond au premier harmonique et non au fondamental" aurait été bienvenu.

**Q43.** Dans un milieu neutre (comme ici un diélectrique), on peut utiliser la structure d'OPPM et les relations entre  $\vec{k}$ ,  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  en remplaçant simplement  $c$  par  $\frac{c}{n}$ . On a déjà la relation de dispersion :  $\vec{k}_1 = n_1 \frac{\omega}{c}$ , et on peut écrire  $\vec{B}_1 = \frac{\vec{k}_1 \wedge \vec{E}_1}{\omega}$ , ce qui donne :

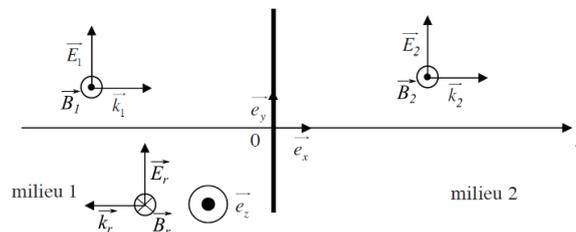
$$\vec{B}_1 = \frac{n_1}{c} \underline{E}_{01} e^{j(\omega t - k_1 x)} \vec{e}_z$$

Question un peu imprécise : l'énoncé demande  $\vec{B}_1$  mais on attend plutôt sa représentation complexe  $\underline{B}_1$  car le champ électrique est donné sous forme complexe et la suite de l'énoncé fait calculer le vecteur de POYNTING moyen à partir des complexes.

**Q44.** Pour l'onde réfléchie,  $\vec{k}_r = -\vec{k}_1 = -n_1 \frac{\omega}{c} \vec{e}_x$  et  $\underline{B}_r = -\frac{n_1}{c} \underline{E}_{0r} e^{j(\omega t + k_1 x)} \vec{e}_z$ .

**Q45.** La continuité des champs en  $x = 0$  donne (les  $e^{(\dots)}$  et les  $\frac{1}{c}$  se simplifient) :

$$\begin{cases} \underline{E}_{01} + \underline{E}_{0r} = \underline{E}_{02} & (1) \\ n_1 \underline{E}_{01} - n_1 \underline{E}_{0r} = n_2 \underline{E}_{02} & (2) \end{cases}$$



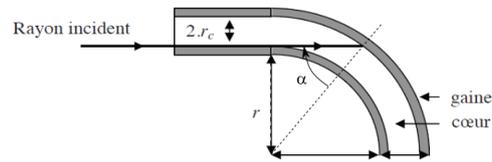
On fait  $n_1 \times (1) + (2)$  :  $2n_1 \underline{E}_{01} = (n_1 + n_2) \underline{E}_{02}$ , ce qui donne  $\underline{E}_{02} = \tau \underline{E}_{01}$  avec  $\tau = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$  le coefficient de transmission en amplitude. Les indices sont réels, donc  $\tau$  est réel et positif, donc il n'y a **pas de déphasage** à la transmission.

**Q46.** Avec la formule fournie, on trouve  $\langle \vec{R}_1 \rangle = \frac{n_1}{2\mu_0 c} \underline{E}_{01} \underline{E}_{01}^* \vec{e}_x$  et  $\langle \vec{R}_2 \rangle = \frac{n_2}{2\mu_0 c} \underline{E}_{02} \underline{E}_{02}^* \vec{e}_x$ .

Le coefficient de transmission en puissance s'écrit donc  $T = \frac{\langle \vec{R}_2 \rangle \cdot \vec{e}_x}{\langle \vec{R}_1 \rangle \cdot \vec{e}_x} = \frac{n_2 \underline{E}_{02} \underline{E}_{02}^*}{n_1 \underline{E}_{01} \underline{E}_{01}^*}$ , soit  $T = \frac{n_2}{n_1} \tau^2 = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}$ .

**Q47.** Application numérique :  $T^2 = 0,92$  (car il y a 2 dioptries), soit  $-0,36$  dB : l'atténuation est faible, sans être tout à fait négligeable.

**Q48.** Pour que l'onde reste dans la fibre, il faut qu'il y ait réflexion totale au moment où la lumière atteint la gaine. Sinon, la lumière n'est plus guidée mais sort de la fibre.



Il faut donc que l'angle  $\alpha$  dépasse l'angle limite de réflexion totale, comme à la **Q17**. Or sur le schéma, on remarque que  $\sin \alpha = \frac{r}{r+2r_c}$  où  $r$  est le rayon de courbure et  $r_c \approx r_g \approx 0,5$  mm est le rayon de la fibre.

Le rayon de courbure doit donc vérifier :

$$\frac{r}{r+2r_c} > \frac{n_g}{n_c} \Rightarrow r > \frac{2r_c n_g}{n_c - n_g}$$

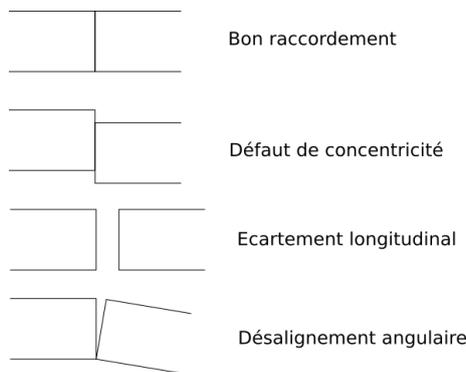
*Application numérique* :  $r_{min} = 10$  cm. Ceci laisse une relative marge de manœuvre, mais peut-être gênant pour une installation domestique (raccordement à une Box sans espace suffisant, passage dans un angle...)

**Petit doute** : j'ai considéré que  $r_g$  est bien le rayon extérieur de la gaine, comme pour le câble coaxial du début, et pas son épaisseur...  $r_c \approx r_g$  signifie que la gaine a une épaisseur négligeable dans ce cas. Si on suppose que  $r_g$  est l'épaisseur de gaine, on trouve un résultat comparable.

**Q49. Concentricité** : les deux fibres doivent être concentriques, donc de même axe.

**Écartement longitudinal** : les deux fibres doivent être proches pour que les rayons sortant de l'une rentrent bien dans la seconde s'ils sont inclinés.

**Désalignement angulaire** : les axes des 2 fibres doivent être alignés.



**Q50.** Si l'on passe d'une fibre 50/125 à une fibre 62,5/125, on aura beaucoup moins de problèmes que dans l'autre sens. En effet, si le cœur de la première fibre est étroit, le faisceau sera plus concentré et plus facile à "faire rentrer" dans la seconde. A l'inverse, si l'on a une fibre 62,5/125 et que l'on souhaite raccorder une 50/125, on aura un problème : même avec le meilleur raccordement, les rayons lumineux éloignés de l'axe ne pourront pas rentrer dans la seconde fibre.

**\*\*\* FIN DU CORRIGE \*\*\***