De la physique dans le tunnel de Fréjus

Ce sujet comporte deux parties indépendantes qui s'intéressent à divers aspects de la physique dans le tunnel de Fréjus. A l'exception de i tel que $i^2 = -1$, les nombres complexes sont soulignés. La notation $\overline{\underline{z}}$ désigne le nombre complexe conjugué de $\underline{z}$. Les vecteurs seront traditionnellement surmontés d'une flèche, par exemple $\vec{j}$ pour un flux surfacique ; sauf s'ils sont unitaires et seront alors surmontés d'un chapeau, par exemple $\widehat{e}_z$ tel que $\|\widehat{e}_z\| = 1$. Pour les applications numériques on utilisera 3 chiffres significatifs.

I. — Température dans le tunnel de Fréjus

Le tunnel routier du Fréjus relie la vallée de l'Arc, en France, au val de Suse, en Italie. Long d'environ 13 km, le tunnel passe sous le col du Fréjus dans les Alpes cottiennes. La pointe Fréjus culmine à une altitude de 2934 m.

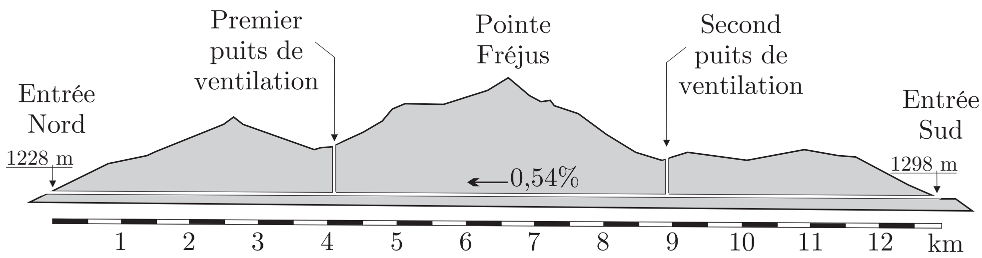

Figure 1 – Tunnel de Fréjus

La roche environnante dans le tunnel a une température constante tout au long de l'année d'environ 30° C. Dans un premier temps nous étudierons les évolutions saisonnières de la température dans le sol. Puis nous tenterons d'expliquer cette température élevée par un modèle géophysique.

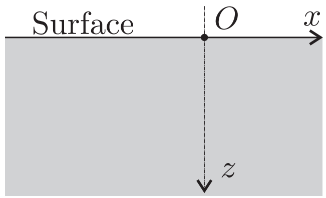

Figure 2 – Sol

I.A. — Évolutions saisonnières de la température dans le sol

On se place au sommet de la pointe Fréjus à une altitude de 2934 m. On assimile la roche à un milieu semi-infini de conductivité thermique κ, de masse volumique ρ_s et de capacité thermique massique c_s. Sa surface est plane et horizontale et est soumise à la variation de température extérieure $T(z = 0,t) = \theta_0 + T_0 cos(\omega t)$ avec $\theta_0 = 0°$ C. (Voir figure 2).

❏ **1** — Calculer la moyenne temporelle de la température extérieure en $z = 0$. Calculer la température maximale et minimale. Proposer une valeur numérique pour T_0 pour les évolutions annuelles de température.

❏ **2** — Le flux thermique élémentaire, défini comme la quantité d'énergie traversant une surface élémentaire $d\mathcal{S}$ pendant dt , est noté $d\phi_Q$. Rappeler la définition du vecteur $\vec{j}_Q$, densité de flux thermique. Quelle est sa dimension ?

❏ **3** — Rappeler la loi de Fourier, ainsi que ses conditions d'application. En déduire les dimensions de la conductivité thermique κ.

❏ **4** — On étudie une tranche mésoscopique de sol comprise entre z et $z + dz$ de surface $\mathcal{S}$. Quelle est l'énergie thermique δQ reçue par cette tranche entre t et $t + dt$?

❏ **5** — Pourquoi étudie-t-on une tranche « mésoscopique » ?

❏ **6** — Établir l'expression de sa variation d'énergie interne dU en fonction de $\dfrac{\partial j_Q}{\partial z}$ et $\mathcal{S}$ puis en fonction de ρ_s, c_s, $\mathcal{S}$ et $\dfrac{\partial T}{\partial t}$.

❏ **7** — En déduire l'équation de la chaleur à une dimension $\dfrac{\partial T(z,t)}{\partial t} = D\dfrac{\partial^2 T(z,t)}{\partial z^2}$ dans laquelle on précisera l'expression et la dimension du coefficient D de diffusion thermique.

On cherche des solutions de la forme $\underline{T}(z,t) = \theta_0 + T_0 e^{i(\omega t - \underline{k}z)}$ vérifiant la condition aux limites $T(z=0,t) = \theta_0 + T_0 \cos(\omega t)$.

❏ **8** — Interpréter cette forme de solution. Déterminer la relation de dispersion correspondante. En déduire l'expression de $\underline{k}$ qu'on mettra sous la forme $\underline{k} = k' + ik''$ avec $k' > 0$. Quelle est la signification physique de k' et k''. Déterminer l'expression correspondante de la solution réelle $T(z,t)$.

❏ **9** — Calculer la profondeur z_e à partir de laquelle les oscillations annuelles de température ne s'écartent pas de θ_0 de plus de 1%. Que peut-on dire de la température dans le tunnel routier de Fréjus ? Pour les roches granitiques constituant le Fréjus on donne $\rho_s = 2{,}65 \times 10^3\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$, $c_s = 8{,}50 \times 10^3\,\mathrm{J}\cdot\mathrm{K}^{-1}\cdot\mathrm{kg}^{-1}$ et $\kappa = 3{,}00$ SI.

❏ **10** — Que peut-on dire des variations quotidiennes de la température à la profondeur z_e ? En terme de filtrage fréquentiel, comment se comporte le sol ?

I.B. — Température d'origine géophysique

La température moyenne de 30° C relevée dans le tunnel de Fréjus peut être expliquée par un modèle géothermique simple de la croûte terrestre. On considère qu'au niveau des Alpes, l'épaisseur de la croûte terrestre continentale est $L_c = 45{,}0\,\mathrm{km}$. Les roches granitiques qui constituent une partie des Alpes contiennent des éléments radioactifs comme l'uranium, le thorium et le potassium. La chaleur produite par ces éléments radioactifs est directement proportionnelle à leur concentration.

Dans les modèles couramment utilisés cette concentration décroît exponentiellement avec la profondeur, de sorte que la puissance volumique dégagée peut s'écrire $\mathcal{P} = \mathcal{P}_0 e^{-\frac{z}{H}}$ avec $H = 10{,}0\,\mathrm{km}$. On prendra $\mathcal{P}_0 = 2{,}50\,\mu\mathrm{W}\cdot\mathrm{m}^{-3}$. La croûte terrestre repose sur le manteau terrestre, à la fois plus dense et plus chaud que la croûte. On admet enfin qu'au niveau de l'interface $\mathcal{I}_{c/m}$ entre la croûte et le manteau ce dernier génère un flux surfacique constant $\vec{j}_m = -j_m\widehat{e}_z$ avec $j_m = 35{,}0\,\mathrm{mW}\cdot\mathrm{m}^{-2}$.

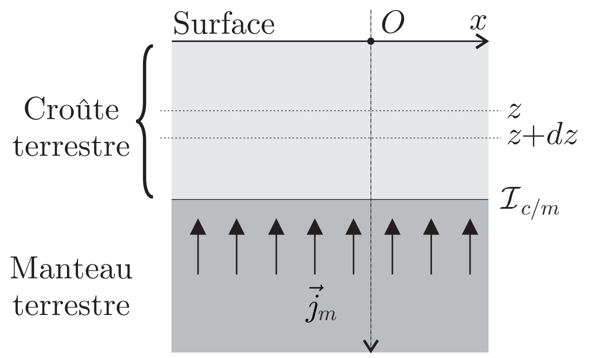

FIGURE 3 – Modèle géophysique

❏ **11** — Effectuer, *en régime stationnaire*, le bilan thermique dans une tranche de croûte terrestre de surface $\mathcal{S}$, comprise entre z et $z + dz$.

❏ **12** — En déduire la température $T(z)$ en fonction de : H, L_c, $\mathcal{P}$, j_m, κ et $\theta_0 = 0°$ C la température moyenne de surface en $z = 0$.

❏ **13** — Exprimer le flux thermique total $\vec{j}_S = j_S\widehat{e}_z$ au niveau de la surface en $z = 0$.

❏ **14** — Comparer les deux termes proportionnels à z et simplifier l'expression de $T(z)$. Calculer la température au centre du tunnel de Fréjus ($z = 1{,}70\,\mathrm{km}$) puis j_S.

I.C. — Prise en compte du relief

On suppose maintenant que la température à la surface plane $z = 0$ possède une dépendance spatiale en x que l'on modélise par la relation $T(x,z = 0) = T_s + T_1 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$. Pour étudier l'effet du relief sur la température dans le tunnel de Fréjus on prendra $\lambda = 10{,}0$ km.

❏ **15** — On suppose pour cette question qu'il n'y a pas de source d'énergie thermique dans la roche. Donner sans démonstration l'équation différentielle satisfaite par $T(x,z)$ en régime stationnaire. En utilisant la méthode de séparation des variables, déterminer la solution $T(x,z)$ qui respecte la condition aux limites $T(x,z = 0)$ et qui demeure finie lorsque $z \to +\infty$. Justifier la prise en compte des effets de la variation spatiale de la température.

❏ **16** — Toujours pour une surface plane d'équation $z = 0$, en utilisant la linéarité de l'équation satisfaite par la température, déterminer $T(x,z)$ en considérant les sources internes d'énergie thermique.

❏ **17** — On considère ici que la topographie de la surface peut être représentée par l'équation $h(x) = h_0 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$. La température de la surface $T_s = T(x,z = h)$ sera prise égale à celle de l'air ambiant et sera modélisée par $T_s = \theta_0 + \beta z$. En effectuant un développement limité en z à l'ordre 1, exprimer la température $T(x,z = 0)$ en fonction de h, $T(x,z = h)$ et $\left(\dfrac{\partial T}{\partial z}\right)_{z=0}$. Déterminer $\left(\dfrac{\partial T}{\partial z}\right)_{z=0}$ en fonction notamment du flux d'énergie thermique à la surface j_S. En déduire que que l'on peut écrire

$$T(x,z) = \theta_0 + c_1 z + c_2\left(1 - e^{-z/H}\right) + c_3 h_0 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) e^{-z/\delta}$$

où l'on précisera l'expression des constantes c_1, c_2, c_3 et δ en fonction des données du problème.

FIN DE LA PARTIE I

II. — Radioactivité α et effet tunnel

Le tunnel de Fréjus abrite le Laboratoire Souterrain de Modane (LSM), sous 1700 mètres de roche. Unité mixte du CNRS et du CEA, le LSM est en fonctionnement depuis 1982. Le LSM est un site scientifique exceptionnel protégé des rayons cosmiques, où ont lieu des recherches sur le neutrino, la matière noire ainsi que des mesures de faibles radioactivités et leurs applications aux études sur l'environnement et aux datations. Le LSM est entre autres spécialisé dans la spectrométrie γ. Le rayonnement γ, qui suit généralement une émission α ou β, est issu du noyau de l'atome et correspond à une désexcitation de ce dernier. En effet, après une désintégration α ou β, le nouveau noyau n'est pas toujours dans un état d'équilibre énergétique : il possède encore « un trop plein d'énergie », on dit qu'il est excité. Pour se débarrasser de cet excédent, il va émettre un ou plusieurs rayonnements γ d'énergie déterminée et caractéristique du noyau et donc de l'atome en présence. Nous allons dans cette partie nous intéresser plus particulièrement à la radioactivité α.

II.A. — Le quanton libre

❏ **18** — Une particule quantique (quanton) est localisée sur un axe $(O,\widehat{u}_x)$. L'état quantique de cette particule est caractérisé par une fonction d'onde : $\underline{\Psi}(x,t)$. Rappeler le postulat de Born donnant la probabilité dP que la particule se trouve dans l'intervalle $[x,x + dx]$ à l'instant t. En déduire la dimension de $\underline{\Psi}(x,t)$.

❏ **19** — Interpréter la propriété $\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\underline{\Psi}(x,t)\right|^2 dx = 1$.