Corrigé exercice 2 : Mécanique quantique

Valeur numérique de la constante de Planck :

$$h = 6{,}62\times10^{-34}\ \text{J.s} \quad \text{et} \quad \hbar = 1{,}05\times10^{-34}\ \text{J.s}$$

Formulaire : pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $\beta \in \mathbb{C}$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\alpha u^2 + \beta u)\,\mathrm{d}u = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\,\exp\left(\frac{\beta^2}{4\alpha}\right)$$

et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u^2\,\exp(-\alpha u^2)\,\mathrm{d}u = \sqrt{\frac{\pi}{4\alpha^3}}$$

2 Oscillateur harmonique quantique

On étudie un modèle unidimensionnel dans lequel une particule de masse m est soumis à une énergie potentielle de la forme $V(x) = \frac{1}{2}m\omega_0^2\,x^2$ (oscillateur harmonique de pulsation propre ω_0). La théorie quantique prévoit que son énergie est quantifiée, les différentes valeurs possibles formant une suite :

$$E_n = \hbar\omega_0\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

où $n \in \mathbb{N}$ est un entier naturel appelé nombre quantique. L'état fondamental correspond à $n = 0$ et, pour cette énergie particulière, l'état stationnaire de la particule s'écrit :

$$\Psi_{\text{stat}}(x,t) = C\exp\left(-\frac{m\omega_0 x^2}{2\hbar}\right)\exp\left(-i\,\frac{E_0 t}{\hbar}\right)$$

1) *Déterminer C. Quelle est sa dimension ?*

On normalise la probabilité de présence :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi_{\text{stat}}(x,t)|^2\,\mathrm{d}x = 1$$

ce qui donne grâce au formulaire :

$$|C|^2\int_{\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{m\omega_0 x^2}{\hbar}\right)\,\mathrm{d}x = C^2\sqrt{\frac{\pi\hbar}{m\omega_0}} = 1$$

et donc :

$$|C| = \sqrt{\frac{m\omega_0}{\pi\hbar}}$$

En raison de l'indétermination de phase, on peut toujours prendre l'argument de C égal à 0 (par exemple). Avec ce choix, C est alors une constante réelle qui vaut :

$$\boxed{C = \sqrt{\frac{m\omega_0}{\pi\hbar}}}$$

La dimension de C peut se déduire de l'examen de $|\Psi_{\text{stat}}(x,t)|^2$ qui est une probabilité par unité de longueur (densité linéique de probabilité). Une probabilité est sans dimension et donc $|\Psi_{\text{stat}}(x,t)|^2$ est homogène à l'inverse d'une longueur.

Or, dans $|\Psi_{\text{stat}}(x,t)|^2$, l'exponentielle est sans dimension et nous avons donc :

$$\boxed{[C^2] = \mathrm{m}^{-1} \quad \text{et donc} \quad [C] = \mathrm{m}^{-1/2}}$$

2) *En utilisant l'équation de Schrödinger indépendante du temps, déterminer l'expression de E_0 et vérifier la cohérence avec l'expression générale de E_n donnée au début de l'exercice.*

Soit :

$$\varphi(x) = C \exp\left(-\frac{m\omega_0 x^2}{2\hbar}\right)$$

la partie spatiale de l'état stationnaire quantique. Elle vérifie l'équation de Schrödinger indépendant du temps (en dimension 1) :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\,\varphi''(x) + \frac{1}{2}\,m\omega_0^2\,x^2\,\varphi(x) = E_0\,\varphi(x)$$

Le calcul de la dérivée seconde conduit à :

$$\varphi''(x) = C\,\frac{m\omega_0}{\hbar}\,\exp\left(-\frac{m\omega_0 x^2}{2\hbar}\right)\left\{\frac{m\omega_0}{\hbar}\,x^2 - 1\right\}$$

En reportant cette expression dans l'équation (1) on constate que les termes en x^2 s'en vont et qu'après simplification on trouve :

$$\boxed{E_0 = \frac{\hbar\omega_0}{2}}$$

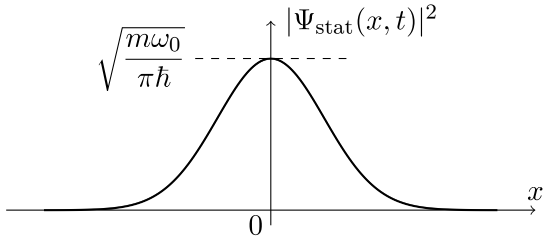
ce qui est cohérent avec la forme générale de E_n donnée dans l'énoncé : dans l'état fondamental on a $n = 0$.

3) *Représenter l'allure générale de la densité de probabilité de présence de la particule en fonction de x. En déduire sans calcul que, dans cet état quantique, $\langle X\rangle = 0$.*

La densité de probabilité de présence de la particule est :

$$|\Psi_{\text{stat}}(x,t)|^2 = \sqrt{\frac{m\omega_0}{\pi\hbar}}\,\exp\left(-\frac{m\omega_0 x^2}{\hbar}\right)$$

Il s'agit d'une fonction gaussienne, paire en x, atteignant son maximum en $x = 0$ et qui tend vers 0 lorsque $x \to \pm\infty$.



Par définition de la valeur moyenne de la position, on en déduit que, :

$$\boxed{\langle X\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x\,|\Psi_{\text{stat}}(x,t)|^2\,\mathrm{d}x = 0}$$

puisque l'application $x \longmapsto x\,|\Psi_{\text{stat}}(x,t)|^2$ est impaire en x et que l'on intègre entre $-\infty$ et $+\infty$.

4) *Calculer l'indétermination quantique ΔX sur la position.*

Puisque $\langle X\rangle = 0$, l'écart type vérifie : $(\Delta X)^2 = \langle X^2\rangle$ et donc :

$$\begin{aligned}(\Delta X)^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\,|\Psi_{\text{stat}}(x,t)|^2\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{m\omega_0}{\pi\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\,\exp\left(-\frac{m\omega_0 x^2}{\hbar}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{\hbar}{2m\omega_0}\end{aligned}$$

en utilisant le formulaire. Il vient donc :

$$\boxed{\Delta X = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}}}$$

5) *Malheureusement, ΔX est difficile à mesurer car, à température T non nulle, il existe aussi une incertitude sur la position ΔX_T liée à l'agitation thermique et qui est donnée par :*

$$\Delta X_T = \sqrt{\frac{k_B T}{m\omega_0^2}}$$

où $k_B = 1{,}38.10^{-23}$ J.K^{-1} est la constante de Boltzmann.

a) *Quelle est la température T_0 en dessous de laquelle l'indétermination quantique devient plus importante que l'incertitude sur la position liée à l'agitation thermique ?*

On veut $\Delta X_T \leqslant \Delta X$ ce qui entraîne :

$$\frac{k_B T}{m\omega_0^2} \leqslant \frac{\hbar}{2m\omega_0} \iff T \leqslant \frac{\hbar\omega_0}{2k_B}$$

et donc :

$$\boxed{T_0 = \frac{\hbar\omega_0}{2k_B}}$$

b) *A.N. : calculer T_0 pour une masse $m = 50$ g accrochée à un ressort de raideur $k = 300$ N.m^{-1}.*

Pour une masse $m = 50$ g accrochée à un ressort de raideur $k = 300$ N.m^{-1}, nous avons $\omega_0 = \sqrt{k/m} = 77{,}5$ rad.s^{-1} (relation classique), ce qui conduit à :

$$\boxed{T_0 = 2{,}8.10^{-10}\text{ K}}$$

Il est donc impossible de descendre en dessous de T_0 et l'incertitude sur la position due à l'agitation thermique masque complètement l'indétermination quantique.

c) *Même question pour un atome de masse $m = 9.10^{-26}$ kg qui oscille autour de sa position d'équilibre stable dans un cristal, avec la pulsation propre $\omega_0 = 0{,}52.10^{13}$ rad.s^{-1}.*

Dans ce cas on trouve :

$$\boxed{T_0 \approx 19\text{ K}}$$

Il est donc possible d'observer l'indétermination quantique (en réalisant $N \gg 1$ mesures de positions d'une particule placé dans l'état stationnaire Ψ_{stat} et en regardant la dispersion des résultats de mesure) à condition de refroidir le cristal bien en dessous de 19 K. On sait le faire actuellement et on peut refroidir jusqu'à des températures de l'ordre du milli K.