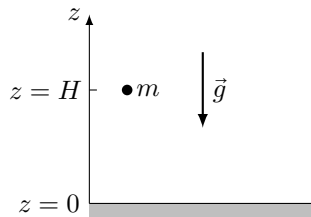


Corrigé exercice 4 : Mécanique quantique

4 Niveaux d'énergie d'un neutron dans le champ de pesanteur. Centrale MP 2017

On commence par se placer dans le cadre de la mécanique classique. Une particule de masse m est lâchée depuis une hauteur H dans le champ de pesanteur terrestre, avec une vitesse initiale nulle. Elle est soumise à la seule force de pesanteur. Le sol en $z = 0$ est impénétrable et correspond à une barrière de potentiel d'amplitude infinie. On suppose que le rebond sur le sol se fait sans perte d'énergie mécanique, la vitesse verticale voyant son sens changer mais pas sa norme. L'axe (Oz) est vertical ascendant.

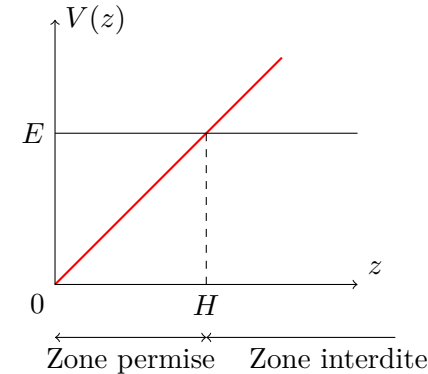
- 1) Donner l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur $V(z)$ de la particule. On suppose $V(0) = 0$. Que peut-on dire de l'énergie mécanique de la particule au cours de son mouvement ? Représenter $V(z)$ en fonction de z sur un graphe et y faire figurer l'énergie mécanique E . Quelles sont les altitudes accessibles à la particule ?



On a :

$$V(z) = mgz$$

En l'absence de forces non conservatives, par exemple des forces de frottement, l'énergie mécanique est conservée.



Les valeurs de z permises vérifient : $E - V(z) = \frac{1}{2}mv^2 \geq 0$ d'où $V(z) \leq E$. Ce sont donc les valeurs :

$$z \in [0, H] \text{ avec } H \text{ tel que } E = mgH$$

- 2) Déterminer l'expression de l'énergie cinétique de la particule à une altitude z quelconque comprise entre 0 et H . L'exprimer en fonction de m , g , H et z .

Raisonnement avec l'énergie. La particule étant lâchée depuis une hauteur $z = H$ sans vitesse initiale, on a $E = mgH$. La conservation de E entraîne donc :

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgz = mgH \quad \text{d'où} \quad v = \sqrt{2g(H - z)}$$

où seules les valeurs $z \in [0, H]$ sont permises.

- 3) La probabilité classique $d\mathcal{P}_{cl}$ de présence de la particule entre les altitudes z et $z + dz$ est proportionnelle au temps passé entre ces deux altitudes. Mettre $d\mathcal{P}_{cl}$ sous la forme $d\mathcal{P}_{cl} = f(z)dz$ et représenter $f(z)$ en fonction de z . On veillera à normaliser correctement la probabilité.

La particule va et vient sans arrêt entre 0 et H puisqu'elle rebondit en $z = 0$ sans perte d'énergie mécanique. De plus, la durée de chute

entre deux altitudes z_1 et $z_2 < z_1$ est la même que la durée de montée entre z_2 et z_1 (il suffit pour s'en convaincre d'imaginer qu'on filme la chute puis de passer le film à l'envers).

On analyse la phase de montée. La durée dt pour aller de z à $z + dz$ se calcule par :

$$v = \frac{dz}{dt} = \sqrt{2g(H-z)} \quad \text{d'où} \quad dt = \frac{dz}{\sqrt{2g(H-z)}}$$

Pour un aller-retour, le temps total passé entre les altitudes z et $z + dz$ est donc :

$$dt_m = \frac{2dz}{\sqrt{2g(H-z)}}$$

et la probabilité classique est proportionnelle à ce temps :

$$d\mathcal{P}_{cl} = K dt_m = \frac{2K dz}{\sqrt{2g(H-z)}}$$

avec K constante, d'où :

$$f(z) = \frac{2K dz}{\sqrt{2g(H-z)}}$$

On normalise cette probabilité. La probabilité de présence de la particule entre les altitudes 0 et H valant 1, on a :

$$\int_0^H \frac{2K dz}{\sqrt{2g(H-z)}} = \frac{2K}{\sqrt{2g}} \left[-2\sqrt{H-z} \right]_0^H = \frac{4K}{\sqrt{2g}} \sqrt{H} = 1$$

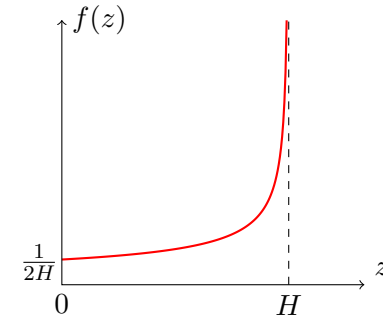
d'où :

$$K = \frac{\sqrt{2g}}{4\sqrt{H}}$$

et finalement :

$$f(z) = \frac{1}{2\sqrt{H(H-z)}}$$

Représentation :



La densité linéaire de probabilité $f(z)$ augmente fortement lorsque $z \rightarrow H$, ce qui est cohérent puisque la particule passe plus de temps aux altitudes proche de H qu'en $z = 0$.

- 4) On propose maintenant de déterminer les états stationnaires d'un neutron d'énergie E et de masse m dans le champ de pesanteur au-dessus de la surface $z = 0$ par résolution de l'équation de Schrödinger. La fonction d'onde qui décrit le mouvement du neutron est :

$$\Psi(z, t) = \varphi(z) \exp\left(-i \frac{Et}{\hbar}\right)$$

Le neutron ne peut pas pénétrer dans le sol dont la surface constitue une barrière de potentiel infinie : on considère donc toujours que $V(z < 0) \rightarrow +\infty$.

- a) On définit la grandeur suivante : $\ell_g = \left(\frac{\hbar^2}{2gm^2}\right)^{1/3}$. Quelle est sa dimension ?

On a :

$$[\ell_g^3] = \frac{\text{J}^2 \cdot \text{s}^2}{\text{m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{kg}^2} = \frac{\text{N}^2 \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^2}{\text{m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{kg}^2} = \frac{\text{kg}^2 \cdot \text{m}^4 \cdot \text{s}^{-4} \cdot \text{s}^4}{\text{m} \cdot \text{kg}^2} = \text{m}^3$$

et donc ℓ_g est homogène à une longueur.

- b) Écrire l'équation de Schrödinger indépendante du temps sous forme adimensionnée en utilisant l'altitude adimensionnée $\xi = z/\ell_g$ et l'énergie adimensionnée $\varepsilon = \frac{E}{mg\ell_g}$.

Ah la question classique de l'adimensionnement d'une équation différentielle ! On détaille.

L'équation de Schrödinger indépendante du temps est vérifiée par la partie spatiale :

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m} \varphi''(z) + mgz \varphi(z) = E \varphi(z)} \quad (1)$$

On pose $\xi = \frac{z}{\ell_g}$ d'où $z = \ell_g \xi$ et on introduit la nouvelle fonction :

$$\chi : \xi \mapsto \varphi(z) = \varphi(\ell_g \xi)$$

Afin de faciliter les calculs de dérivées on peut introduire la fonction :

$$u : \xi \mapsto \ell_g \xi$$

On a donc :

$$\chi(\xi) = (\varphi \circ u)(\xi)$$

d'où :

$$\chi'(\xi) = (\varphi' \circ u)(\xi) \times u'(\xi) = (\varphi' \circ u)(\xi) \times \ell_g$$

et

$$\chi''(\xi) = (\varphi'' \circ u)(\xi) \times u'(\xi) \times \ell_g = \ell_g^2 \varphi''[u(\xi)] = \ell_g^2 \varphi''(z)$$

c'est à dire :

$$\boxed{\varphi''(z) = \frac{1}{\ell_g^2} \chi''(\xi)}$$

On remplace dans (1) :

$$-\frac{\hbar^2}{2m\ell_g^2} \chi''(\xi) + mg\ell_g \xi \chi(\xi) = \varepsilon mg\ell_g \chi(\xi)$$

ce qui donne :

$$-\underbrace{\frac{\hbar^2}{2mg\ell_g^3}}_{=1} \chi''(\xi) + \xi \chi(\xi) = \varepsilon \chi(\xi)$$

et finalement :

$$\boxed{-\chi''(\xi) + \xi \chi(\xi) = \varepsilon \chi(\xi)}$$

Remarque :

Mathématiquement la fonction χ est différente de la fonction φ puisque $\chi = \varphi \circ u$. Cependant les physiciens ont le défaut de la noter pareil (!!) c'est à dire qu'ils vont simplement écrire $\varphi(\xi)$ à la place de $\chi(\xi)$ (cf. question suivante), ce qui est une cause d'embrouilles sans fin ... mais on ne change pas comme cela 3 siècles d'habitudes !

- c) Quelles sont les conditions aux limites qui s'imposent à $\varphi(\xi)$?

La barrière étant de hauteur infinie, on a nécessairement $\varphi(z) = 0$ pour $z < 0$. On doit imposer la continuité de φ en $z = 0$ ce qui donne :

$$\varphi(z=0) = 0 \quad \text{d'où} \quad \boxed{\chi(0) = 0}$$

D'autre part, si on veut :

$$1 = \int_0^{+\infty} |\Psi(z, t)|^2 dz = \int_0^{+\infty} |\varphi(z)|^2 dz \quad \text{finie}$$

alors cela impose que :

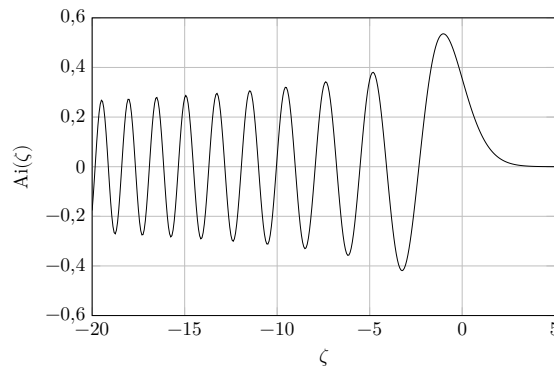
$$\lim_{z \rightarrow +\infty} \varphi(z) = 0 \quad \text{et donc} \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \chi(\xi) = 0$$

Par la suite je continuerai à utiliser $\chi(\xi)$ à la place de $\varphi(\xi)$.

La solution acceptable de l'équation de Schrödinger indépendante du temps adimensionnée s'écrit :

$$\varphi(\xi) = C \operatorname{Ai}(\xi - \varepsilon)$$

où C est un facteur de normalisation (qui n'est pas à calculer). Toutes les informations utiles sur la fonction d'Airy Ai sont données ci-dessous.



Comportement asymptotique en $+\infty$

$$\operatorname{Ai}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\exp(-\frac{2}{3}x^{3/2})}{2\sqrt{\pi}x^{1/4}}$$

Trois premiers zéros de $\operatorname{Ai}(\zeta)$

n	1	2	3
ζ_n	-2,34	-4,09	-5,52

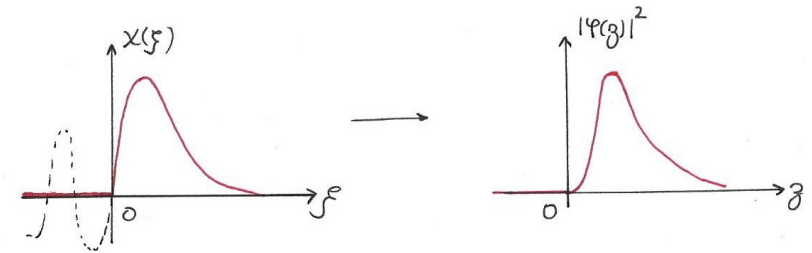
- d) Donner les valeurs numériques des niveaux d'énergie ε_n pour les deux premiers niveaux d'énergie $n = 1$ et $n = 2$.

$\chi(0) = 0$ entraîne $C \operatorname{Ai}(-\varepsilon) = 0$. Ainsi, $-\varepsilon$ est un zéro de Ai . On lit dans le tableau les deux premiers zéros :

$\varepsilon_1 = 2,34$	$\varepsilon_2 = 4,09$
$E_1 = 2,34 mg\ell_g$	$E_2 = 4,09 mg\ell_g$

- e) Représenter l'allure de la densité de probabilité de présence d'un neutron en fonction de z pour ces deux premiers niveaux d'énergie. On explicitera la démarche suivie.

Pour $n = 1$: $\chi(\xi) = C \operatorname{Ai}(\xi - \varepsilon_1) = C \operatorname{Ai}(\xi - 2,34)$, ce qui revient à décaler $\operatorname{Ai}(\xi)$ de 2,34 dans le sens des ξ croissants (ce qui revient à placer le premier zéro en $\xi = 0$) et à ne garder que la partie physique $\xi \geq 0$ (on annule $\chi(\xi)$ pour $\xi \leq 0$). On obtient donc :



De même pour $n = 2$: $\chi(\xi) = C \operatorname{Ai}(\xi - \varepsilon_2) = C \operatorname{Ai}(\xi - 4,09)$ et il faut décaler $\operatorname{Ai}(\xi)$ de 4,09 dans le sens des ξ croissants (ce qui revient à placer le deuxième zéro en $\xi = 0$).

