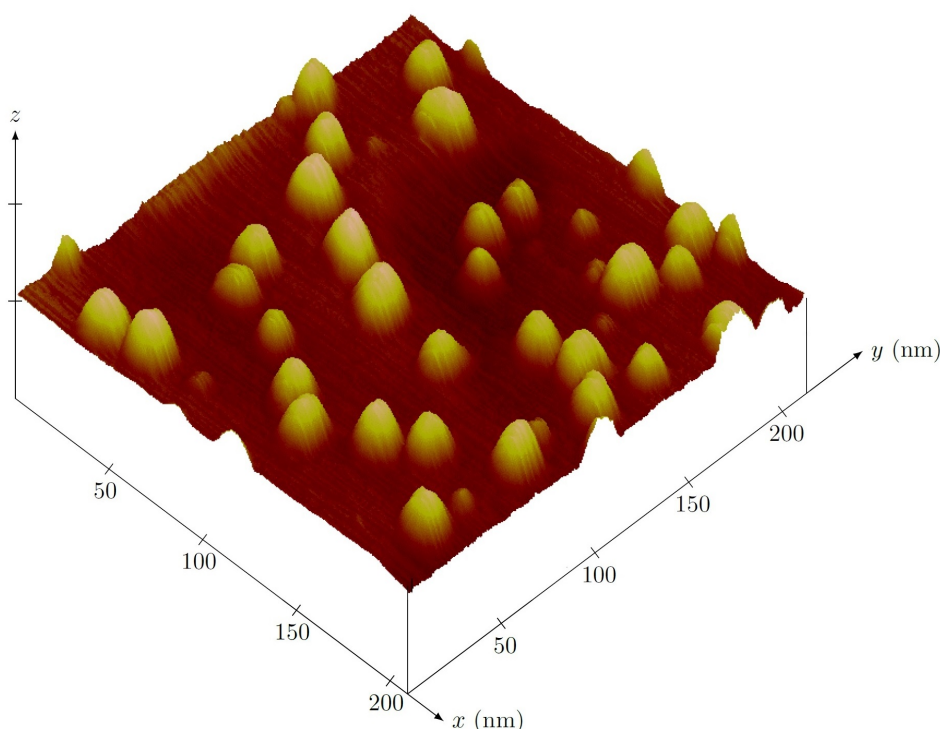


DS n°8bis (CCS-Mines)  
 Thermodynamique - Courbes intensité-potentiel - Mécanique quantique  
 (Samedi 8 avril 2023 – Durée 4 h)

## 1 Confinement d'objets quantiques (d'après CCS - MP - 2016)

### II.A – Confinement d'électrons dans une boîte quantique

On sait réaliser depuis quelques années des « boîtes quantiques », de dimensions nanométriques, qui confinent les électrons de conduction d'un solide à basse température. La possibilité de contrôler les états d'énergie d'un tel dispositif ouvre des perspectives très riches en opto-électronique. Une boîte quantique est constituée d'un matériau  $A$  jouant le rôle de puits, autour duquel on dépose un matériau  $B$  qui forme une barrière de potentiel autour de  $A$  (figure 4).



**Figure 4** Ensemble de boîtes quantiques de GaN (matériau  $A$ ) déposées à 705 °C sur un substrat d'AlN (matériau  $B$ ) et mûries sous vide. Image obtenue par microscopie à force atomique. Source : CEA-Grenoble/DSM/DRFMC/SP2M Rapport d'activité 1996-1998 du SP2M

#### II.A.1) Fonction d'onde électronique

Nous nous intéressons ici au confinement d'un électron dans une telle boîte. Les directions  $x$  et  $y$  étant supposées équivalentes, on traite dans un premier temps le problème à une dimension horizontale  $x$ . L'influence du confinement vertical suivant la direction  $z$  sera abordé ultérieurement.

On admet que dans la boîte, la dynamique de l'électron est décrite par l'équation de Schrödinger où :

- la masse de l'électron libre  $m$  est remplacée par une masse effective  $m^* = 0,07m$  ;
- l'ensemble des atomes des matériaux  $A$  et  $B$  crée un potentiel effectif harmonique  $V(x) = \frac{1}{2}m^*\omega^2x^2$  qui varie lentement à l'échelle atomique et pour lequel  $\omega = 9,10 \times 10^{13} \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ .

Dans tout le problème, on néglige tout effet associé au spin de l'électron.

a) Citer deux exemples d'oscillateurs harmoniques, dans des domaines différents de la physique classique. Pour chacun d'eux, établir l'équation d'évolution par une méthode énergétique et décrire les échanges énergétiques mis en jeu.

b) Écrire l'équation de Schrödinger vérifiée par la fonction d'onde  $\Psi_{1D}(x,t)$  associée à l'état quantique de l'électron dans la boîte. Que représente cette fonction d'onde ?

c) On s'intéresse aux états stationnaires unidimensionnels  $\Psi_{1D}(x, t) = \varphi(x)g(t)$  solutions de cette équation. Expliciter la fonction  $g(t)$  et justifier le caractère stationnaire de ces états.

d) Ces états stationnaires sont-ils libres ou liés ? Que dire des fonctions d'onde  $\Psi_{1D}(x, t)$  associées ?

e) La partie spatiale de la fonction d'onde associée à l'état fondamental  $\Psi_{1D,0}(x, t)$  de l'électron dans la boîte s'écrit  $\varphi_0(x) = \left(\frac{m^*\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{m^*\omega x^2}{2\hbar}\right)$ .

Quelle est dans cet état la position moyenne  $\langle x \rangle$  de l'électron ? Quelle est l'extension caractéristique  $\Delta x$  de la distribution en position de l'électron ?

Effectuer l'application numérique.

f) Dédire de la relation d'indétermination spatiale d'Heisenberg l'énergie de l'état fondamental  $E_0$  pour un électron dont l'impulsion moyenne  $\langle p_x \rangle$  est nulle.

Montrer que cette valeur de l'énergie est liée au confinement spatial de l'électron.

Comparer au cas classique.

Dans la suite, on admettra que les états stationnaires unidimensionnels  $\Psi_{1D,n_x}(x, t)$  ont des énergies du type  $E_0 + n_x \hbar \omega$  avec  $n_x \in \mathbb{N}$ .

On souhaite désormais prendre en compte le confinement équivalent de l'électron dans la direction horizontale  $y$ . Le potentiel effectif bidimensionnel dans lequel évolue l'électron doit alors s'écrire

$$V(x) + V(y) = \frac{1}{2}m^*\omega^2 x^2 + \frac{1}{2}m^*\omega^2 y^2$$

g) On cherche les états stationnaires bidimensionnels  $\Psi_{2D}(x, y, t) = \varphi(x)\chi(y)g(t)$  solutions de l'équation de Schrödinger. Montrer que l'énergie  $E$  de ces états s'écrit sous la forme  $E = E_x + E_y$ ,  $E_x$  et  $E_y$  désignant les énergies des états stationnaires unidimensionnels suivant les directions  $x$  et  $y$ .

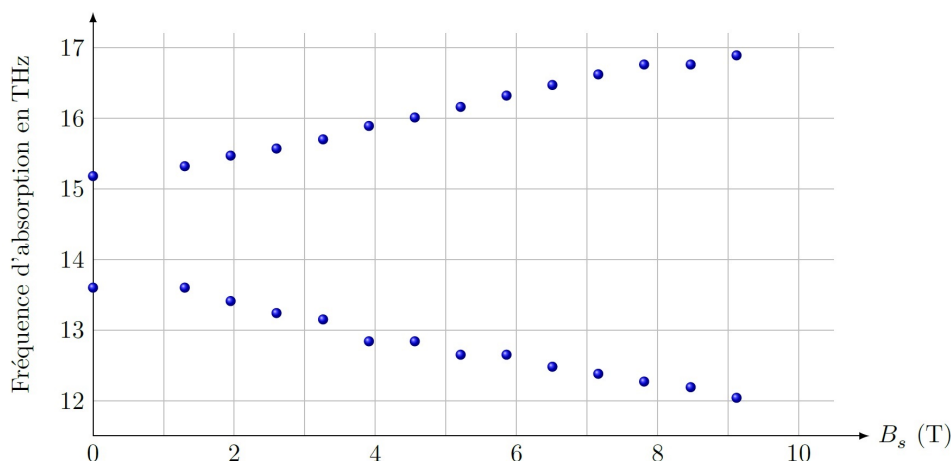
h) Quelle est le nombre d'états quantiques (dégénérescence)  $g_{2D}$  associé à chacun des niveaux d'énergie bidimensionnels de l'électron ?

### II.A.2) Propriétés optiques de la boîte

a) Citer un dispositif usuel qui met à profit les propriétés optiques de telles boîtes quantiques. Quel est le domaine spectral concerné ?

b) L'étude précise des niveaux d'énergie bidimensionnels de la boîte se fait par spectroscopie d'absorption. Décrire le principe de cette technique en explicitant le fonctionnement d'un dispositif couramment utilisé en chimie.

La figure 5 fournit les résultats expérimentaux obtenus pour la fréquence des deux premiers pics d'absorption de la boîte quantique lorsqu'on lui applique un champ magnétique statique et uniforme  $\vec{B}_s = B_s \vec{u}_z$ .



**Figure 5** Fréquence des deux premiers pics d'absorption de la boîte quantique en fonction du champ magnétique appliqué à une température  $T = 10$  K

Dans la suite, on désigne par  $\omega_c$  la pulsation cyclotron mise en évidence dans la première partie. On admet alors que, dans le régime  $\omega_c < \omega/\sqrt{2}$ , la résolution de l'équation de Schrödinger dans le potentiel  $V(x) + V(y)$  conduit pour les trois premiers niveaux d'énergie accessibles par l'électron à

$$E'_0 = \hbar\Omega \quad E_- \simeq 2\hbar\Omega - \frac{\hbar\omega_c}{2} \quad E_+ \simeq 2\hbar\Omega + \frac{\hbar\omega_c}{2}$$

avec  $\Omega = \sqrt{\omega^2 + \omega_c^2/4}$ .

c) Déterminer les valeurs de champ magnétique vérifiant l'inégalité  $\omega_c < \omega/\sqrt{2}$  et  $\omega_c = eB_s/m^*$ .

d) À une température de 10 K, on constate que seul le niveau d'énergie  $E'_0$  contribue de manière significative au signal d'absorption. Justifier quantitativement ce fait.

e) En exploitant la figure 5 reproduite en figure A dans le document réponse, déterminer le domaine de champ magnétique pour lequel le modèle adopté pour la boîte quantique permet d'interpréter les résultats expérimentaux obtenus.

### II.A.3) Anisotropie de la boîte quantique

On peut montrer que les résultats expérimentaux précédents sont interprétables intégralement si on prend en compte une légère anisotropie de la boîte quantique, ce qui revient à considérer le potentiel de confinement

$$\tilde{V}(x, y) = \frac{1}{2}m^*\omega^2(1 + \epsilon)x^2 + \frac{1}{2}m^*\omega^2(1 - \epsilon)y^2 \quad \text{avec } \epsilon \ll 1$$

En exploitant la figure 5, déterminer la valeur de l'anisotropie  $\epsilon$ .

### II.A.4) Rôle de la dimension $z$

Le confinement dans la direction  $z$  peut être modélisé par un puits carré infini de largeur  $D$ .

a) Établir les énergies  $E_z$  des états stationnaires unidimensionnels de l'électron suivant la direction  $z$ .

b) À quelle condition reliant  $D$  et  $\omega$  est-il légitime de considérer que le mouvement de l'électron selon  $z$  est « gelé », c'est à dire que l'on peut ne s'intéresser qu'aux premiers niveaux du mouvement harmonique dans la direction  $x$  ou  $y$  ?

c) Sur la figure 4, l'échelle de la direction verticale n'est pas la même que l'échelle dans le plan  $xOy$ . En supposant que l'approximation consistant à ignorer le mouvement selon  $z$  est valide, déterminer si cette échelle verticale est dilatée ou contractée. On se servira de la grandeur  $\Delta x$  déterminée à la question II.A.1.

d) Déterminer complètement l'expression des états stationnaires unidimensionnels de l'électron suivant la direction  $z$ .

e) Proposer une analogie formelle entre ces résultats et ceux obtenus pour une corde vibrante. Mettre en regard les différences notables entre ces deux systèmes.

f) Représenter les fonctions d'ondes spatiales de l'électron dans la direction  $z$  pour les trois premiers niveaux d'énergies  $E_z$  sur la figure B du document réponse ainsi que les densités de probabilité de présence associées. Commenter.

g) Discuter des résultats attendus dans le cas des énergies élevées.

### II.B – Oscillateur harmonique quantique en équilibre thermique

Nous allons préciser les propriétés physiques d'un unique oscillateur harmonique quantique à une dimension en équilibre thermodynamique avec un thermostat à la température  $T$ . Comme indiqué dans la partie précédente, la résolution de l'équation de Schrödinger pour un tel oscillateur de pulsation  $\omega$  conduit à des états stationnaires d'énergie  $E_n = E_0 + n\hbar\omega$  avec  $n \in \mathbb{N}$ .

On admet qu'à l'équilibre avec le thermostat, cet oscillateur ne se trouve pas dans un état stationnaire mais dans un mélange statistique des états stationnaires d'énergie  $E_n$  affectés des poids respectivement proportionnels au facteur de Boltzmann  $e^{-\frac{E_n}{k_B T}}$ .

II.B.1) Exprimer la probabilité d'occupation  $p_n$  de l'état d'énergie  $E_n$ .

II.B.2) En déduire le rapport  $r$  entre la probabilité d'occupation de l'état d'énergie  $E_{n+1}$  et celle de l'état d'énergie  $E_n$ . Comment la température influence-t-elle ce résultat ?

II.B.3) Déterminer l'énergie moyenne  $\langle E \rangle$  de l'oscillateur harmonique quantique en équilibre thermodynamique.

II.B.4) La figure 6 représente la variation en fonction de la température des énergies moyennes d'un oscillateur harmonique quantique et d'un oscillateur harmonique classique. Identifier, en justifiant votre réponse, chacune des courbes.

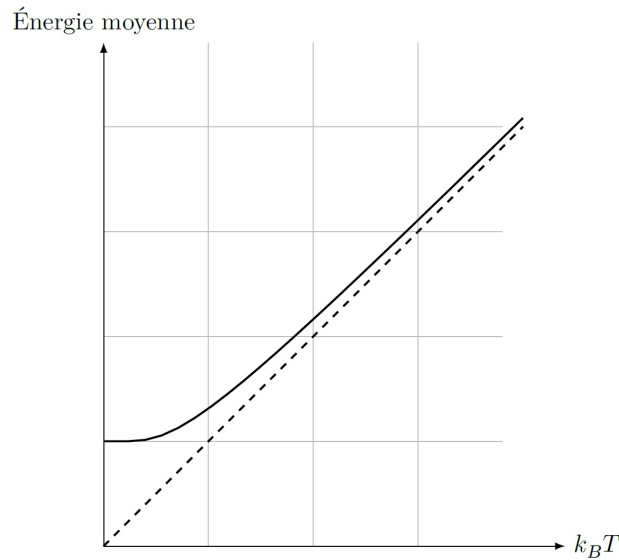


Figure 6

Commenter le comportement de ces oscillateurs

- à  $T = 0$  K ;
- à basse température ;
- à haute température.

## Données numériques

Célérité de la lumière dans le vide	$c = 3,00 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$
Masse de l'électron	$m = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Charge élémentaire	$e = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$
Permittivité diélectrique du vide	$\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F}\cdot\text{m}^{-1}$
Constante d'Avogadro	$\mathcal{N}_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Constante de Boltzmann	$k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$
Constante de Planck	$h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$
Constante de Planck réduite	$\hbar = h/(2\pi)$
Rayon de la Terre	$R_T = 6,37 \times 10^3 \text{ km}$
Vitesse angulaire de rotation propre de la Terre	$\Omega_T = 7,29 \times 10^{-5} \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$
Rayon de l'orbite géostationnaire	$R_g = 4,22 \times 10^4 \text{ km}$
Intensité du champ de pesanteur à la surface de la Terre	$g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$
Ordre de grandeur du champ magnétique à la surface de la Terre	$5 \times 10^{-5} \text{ T}$

## Formulaire

- Impulsion d'une particule relativiste

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v} \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

- Énergie cinétique d'une particule relativiste

$$E_c = mc^2(\gamma - 1) \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

- Champ créé au point  $M$  par un dipôle de moment magnétique  $\vec{\mathcal{M}}$  placé en  $O$

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \left( 3 \frac{\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{r}}{r^2} \vec{r} - \vec{\mathcal{M}} \right) \quad \text{avec } \vec{r} = \vec{OM}$$

- Couple subi par un dipôle de moment magnétique  $\vec{\mathcal{M}}$  dans un champ magnétique extérieur  $\vec{B}$

$$\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}$$

- Opérateur divergence en coordonnées cylindriques au point  $M(r, \theta, z)$

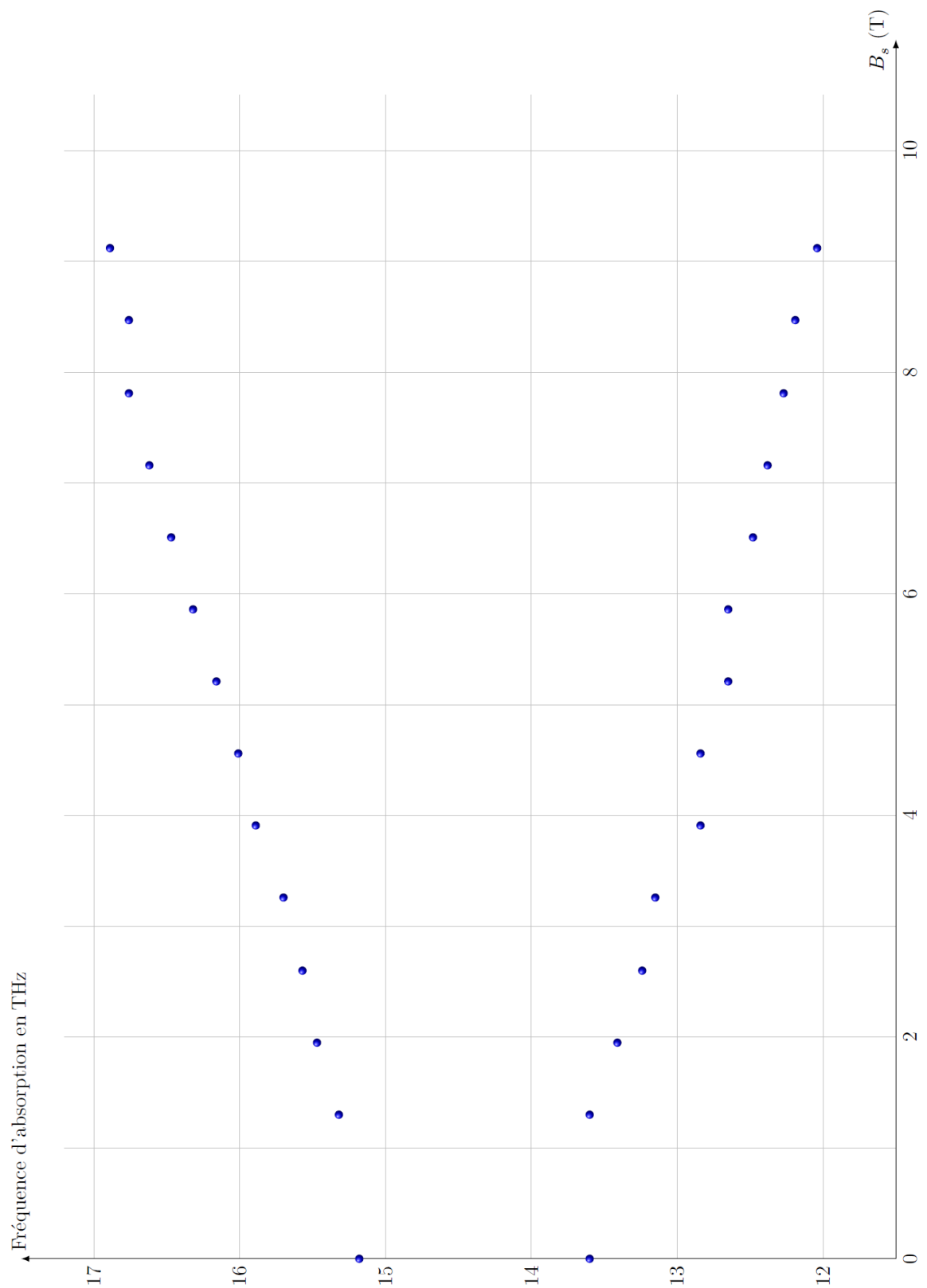
$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

- Densité de probabilité pour une loi normale d'espérance (moyenne)  $\langle x \rangle$  et d'écart type  $\sigma$

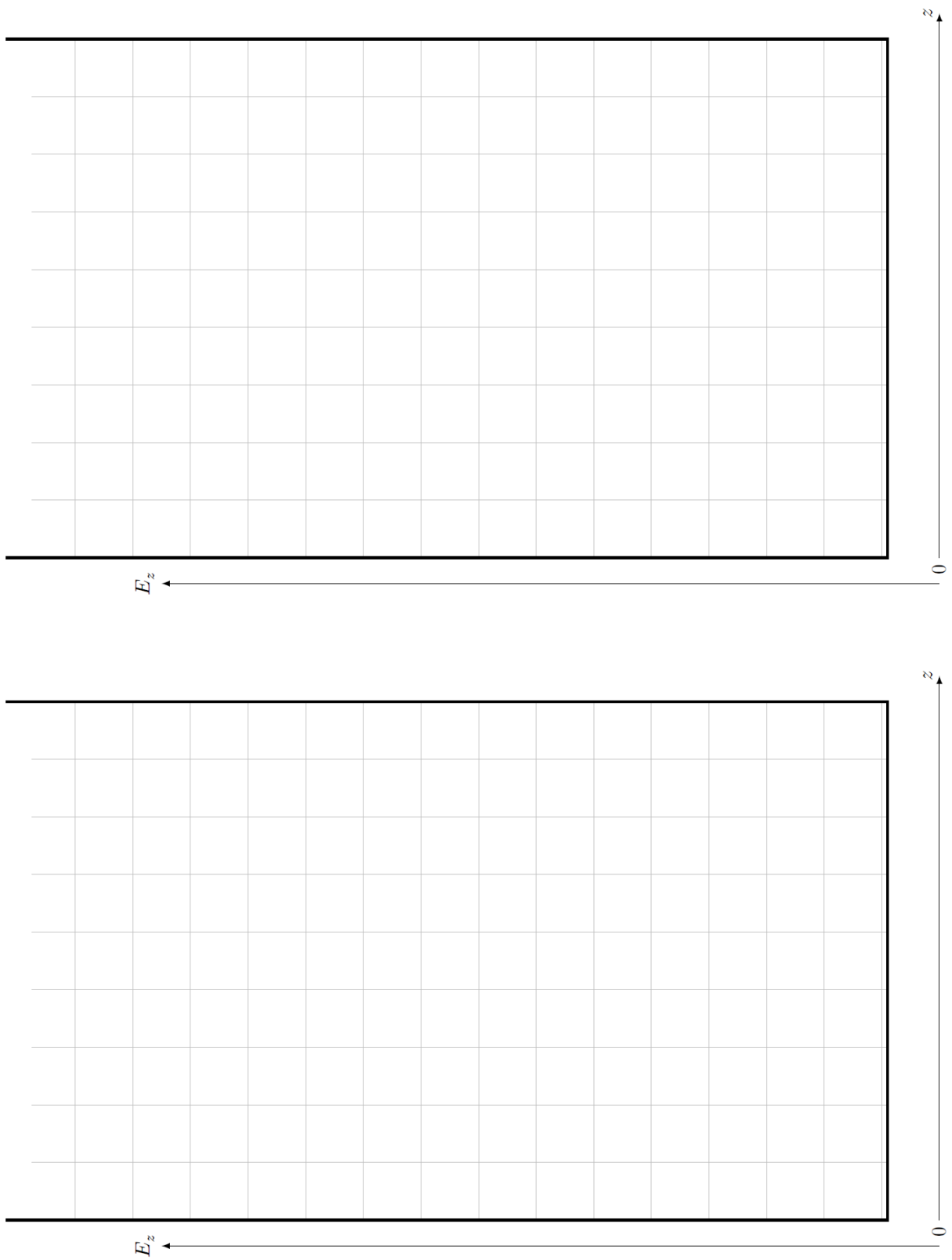
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \langle x \rangle}{\sigma}\right)^2\right)$$

- Relation d'indétermination spatiale d'Heisenberg

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

**Figure A** du document réponse

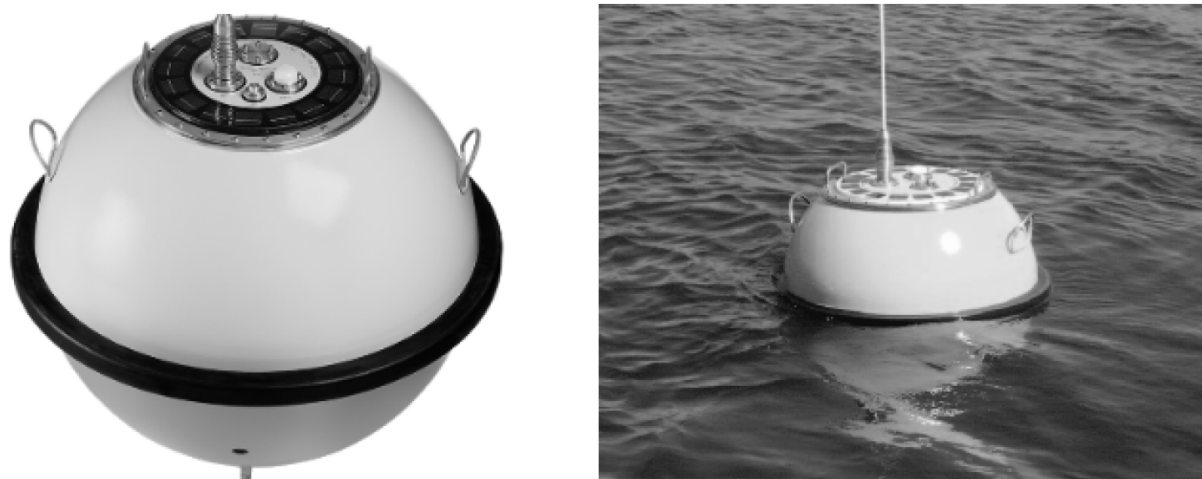
**Figure A** Fréquence des deux premiers pics d'absorption de la boîte quantique en fonction du champ magnétique appliqué à une température  $T = 10$  K

**Figure B** du document réponse

**Figure B** Tracés des fonctions d'ondes spatiales des trois premiers niveaux d'énergie et des densités de probabilité de présence associées

## 2 Les bouées houlographes *Waverider* (d'après CCS - MP - 2022)

Depuis la fin des années 1960, la société néerlandaise Datawell développe des bouées houlographes commercialisées sous le nom de *Waverider*. Flottant à la surface de la mer, une telle bouée se déplace au gré des vagues de sorte qu'en enregistrant son mouvement, on accède aux caractéristiques de la houle. Le fonctionnement du *Waverider* repose sur une ingénieuse combinaison de principes physiques que ce problème aborde au travers de modèles simples.



**Figure 1** Photographies d'une bouée houlographe *Waverider*

Cet énoncé, formé de quatre parties largement indépendantes, est accompagné d'un document réponse à utiliser à plusieurs reprises et à rendre avec la copie. Diverses valeurs numériques et un formulaire d'analyse vectorielle sont regroupés à la fin du texte.

### I Prévention de la corrosion

La coque des bouées *Waverider* est faite d'acier AISI 316, un alliage de fer, de carbone (moins de 1%) et de chrome. L'oxydation du chrome permet la formation d'une couche superficielle de passivation et rend en principe l'acier « inoxydable », donc apte à demeurer longtemps en milieu marin. Cependant, la présence d'ions chlorures entraîne une dégradation locale de la couche de passivation, déclenchant irrémédiablement la corrosion du fer. Dans cette partie, on étudie la corrosion de l'acier en milieu marin et le moyen choisi par Datawell pour s'en prémunir.

#### *I.A – Thermodynamique de la corrosion du fer*

La figure A du document réponse est un diagramme potentiel-pH du fer tracé pour la concentration en espèces dissoutes  $C_{\text{tra}} = 1,0 \times 10^{-6} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ . Les espèces prises en compte sont  $\text{Fe}_{(\text{s})}$ ,  $\text{FeOOH}_{(\text{s})}$ ,  $\text{Fe}(\text{OH})_{2(\text{s})}$ ,  $\text{Fe}_{(\text{aq})}^{2+}$ ,  $\text{Fe}_{(\text{aq})}^{3+}$  et  $\text{HFeO}_2^{-}(\text{aq})$ . Les frontières associées aux couples d'oxydoréduction de l'eau ont été superposées en pointillés gris.

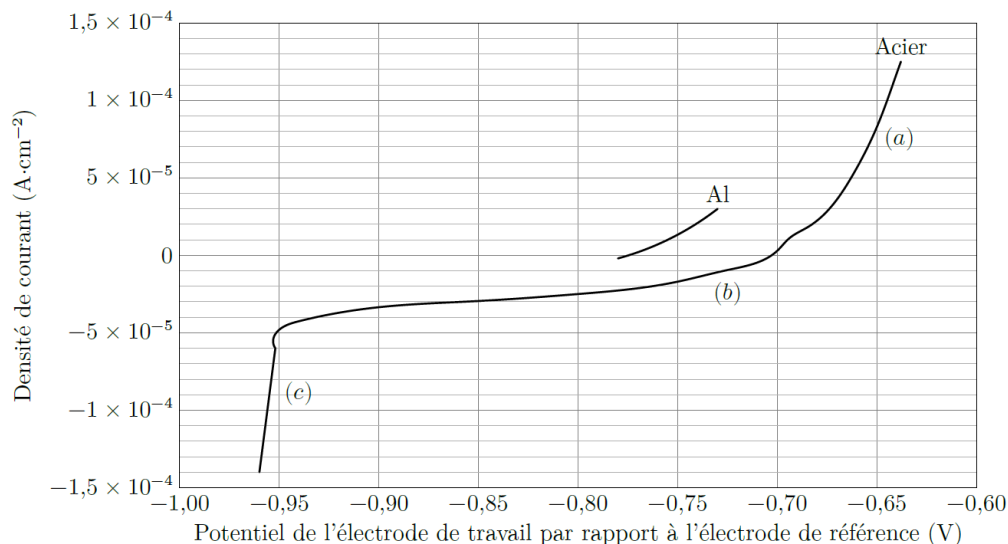
- Q 1.** Compléter ce diagramme potentiel-pH en attribuant à chaque domaine une espèce contenant Fe.
- Q 2.** À partir du diagramme, déterminer le potentiel standard du couple  $\text{Fe}_{(\text{aq})}^{2+}/\text{Fe}_{(\text{s})}$  et le  $\text{p}K_s$  de  $\text{Fe}(\text{OH})_{2(\text{s})}$ .
- Q 3.** Sans utiliser le diagramme, déterminer la pente de la frontière séparant  $\text{Fe}^{2+}$  et  $\text{FeOOH}_{(\text{s})}$ .
- Q 4.** À partir du diagramme, écrire la réaction se produisant quand une pièce de fer est laissée à l'abandon dans une solution aqueuse saturée en dioxygène et dont le pH vaut 7.

#### *I.B – Cinétique de la corrosion de l'acier*

Dans une étude publiée en 2016 dans la revue *Ocean Engineering*, Kim *et al.* analysent la corrosion de l'acier dans une solution aqueuse de chlorure de sodium modélisant l'eau de mer, saturée en dioxygène et de pH égal à 8,2. Afin de relever la courbe courant-potentiel d'une pièce d'acier, ils utilisent une contre électrode en platine et une électrode de référence au calomel saturé, de potentiel  $E_{\text{ref}} = 0,25 \text{ V}$ .



- Q 5.** Donner précisément le schéma du dispositif permettant d'enregistrer la courbe courant-potentiel.
- Q 6.** La courbe obtenue, en raisonnant en densité de courant, est représentée sur la figure 2. Quelles sont les réactions électrochimiques se produisant sur les portions repérées par les lettres (a), (b) et (c) ?



**Figure 2** Courbe densité de courant-potentiel d'une pièce d'acier plongeant dans une solution modélisant le milieu marin et courbe densité de courant-potentiel pour l'aluminium

- Q 7.** Estimer numériquement la surtension cathodique associée au couple  $H^+/H_2$ . Dans leur étude, Kim *et al.* publient différentes courbes courant-potentiel obtenues pour le même système modèle, en modifiant la vitesse d'écoulement de l'eau salée autour des électrodes (figure B du document réponse). En les exploitant, ils montrent que la densité de courant de corrosion  $j_{\text{corr}}$  dépend de la vitesse d'écoulement de l'eau salée autour de l'électrode. Les résultats sont rassemblés dans le tableau 1 où seule la vitesse d'écoulement change entre les différentes mesures effectuées.

vitesse d'écoulement ( $m \cdot s^{-1}$ )	0	2	5
densité de courant de corrosion ( $A \cdot cm^{-2}$ )	$1,79 \times 10^{-5}$	$2,46 \times 10^{-4}$	$8,49 \times 10^{-4}$

**Tableau 1** Valeurs des densités de courant de corrosion en fonction de la vitesse d'écoulement du fluide autour de l'électrode

- Q 8.** Pour chacune des courbes représentées sur la figure B, entourer la partie correspondant à un phénomène de limitation du courant lié à la cinétique de transport du dioxygène dissout dans l'eau.
- Q 9.** Proposer une interprétation qualitative à l'augmentation de la densité de courant de corrosion avec la vitesse d'écoulement du fluide autour de l'électrode.

### I.C – Protection par anode sacrificielle

Pour protéger de la corrosion la coque en acier inoxydable du Waverider, on lui associe une anode sacrificielle en aluminium. L'aluminium s'oxyde en  $Al^{3+}$ .

Pour comprendre le rôle de la pièce d'aluminium, on s'appuie sur la figure 2 sur laquelle la courbe densité de courant-potentiel anodique d'une pièce d'aluminium a été juxtaposée à celle de l'acier.

- Q 10.** Afin de décrire les phénomènes se produisant lorsque l'acier en contact avec l'aluminium est laissé à l'abandon dans un milieu marin, compléter le schéma de la figure C du document réponse en portant dans chaque cadre rectangulaire le nom d'une espèce physico-chimique.

On suppose que les pièces d'acier et d'aluminium présentent la même surface active et que les réactions électrochimiques s'y répartissent uniformément.

- Q 11.** Estimer numériquement la densité de courant de corrosion  $j_{\text{corr}}$  associée à cette situation, en  $A \cdot cm^{-2}$ . Dans ces conditions, une certaine épaisseur  $\Delta e_{Al}$  d'aluminium est consommée pendant une durée  $\Delta t$ .

- Q 12.** Déterminer l'expression de  $\Delta e_{Al}/\Delta t$  en fonction de  $j_{\text{corr}}$ ,  $\mathcal{F}$ ,  $\rho_{Al}$ ,  $M_{Al}$ , puis calculer numériquement l'épaisseur d'aluminium consommée en une année.

- Q 13.** La sphère d'acier inoxydable présente un diamètre de 70 cm et les anodes d'aluminium une surface de l'ordre de  $30 \text{ cm}^2$  et une épaisseur de 3 cm. Le constructeur recommande de renouveler ces anodes tous les trois ans. Confronter ces données aux résultats de la question précédente et proposer une explication aux éventuelles divergences.

## Données numériques

Masse molaire de l'aluminium	$M_{\text{Al}} = 27,0 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$
Masse volumique de l'aluminium	$\rho_{\text{Al}} = 2,72 \times 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$
Produit ionique de l'eau	$K_e = 1 \times 10^{-14}$
Charge élémentaire	$e = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$
Constante d'Avogadro	$\mathcal{N}_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Constante de Faraday	$\mathcal{F} = \mathcal{N}_A e = 96,5 \times 10^3 \text{ C}\cdot\text{mol}^{-1}$
Perméabilité magnétique du vide	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H}\cdot\text{m}^{-1}$
Accélération de la pesanteur	$g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$
$\frac{RT}{\mathcal{F}} \ln 10 = 0,06 \text{ V}$	

Potentiels standards

Couple	O <sub>2</sub> /H <sub>2</sub> O	H <sup>+</sup> /H <sub>2</sub>
$E^\circ$	1,23 V	0 V

## Analyse vectorielle en coordonnées cylindriques

$$\text{div } \vec{A}(r, \theta, z) = \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\Delta \psi(r, \theta, z) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$$

$$\vec{\text{rot}} A(r, \theta, z) = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \vec{u}_r + \left( \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{u}_z$$

Document réponse

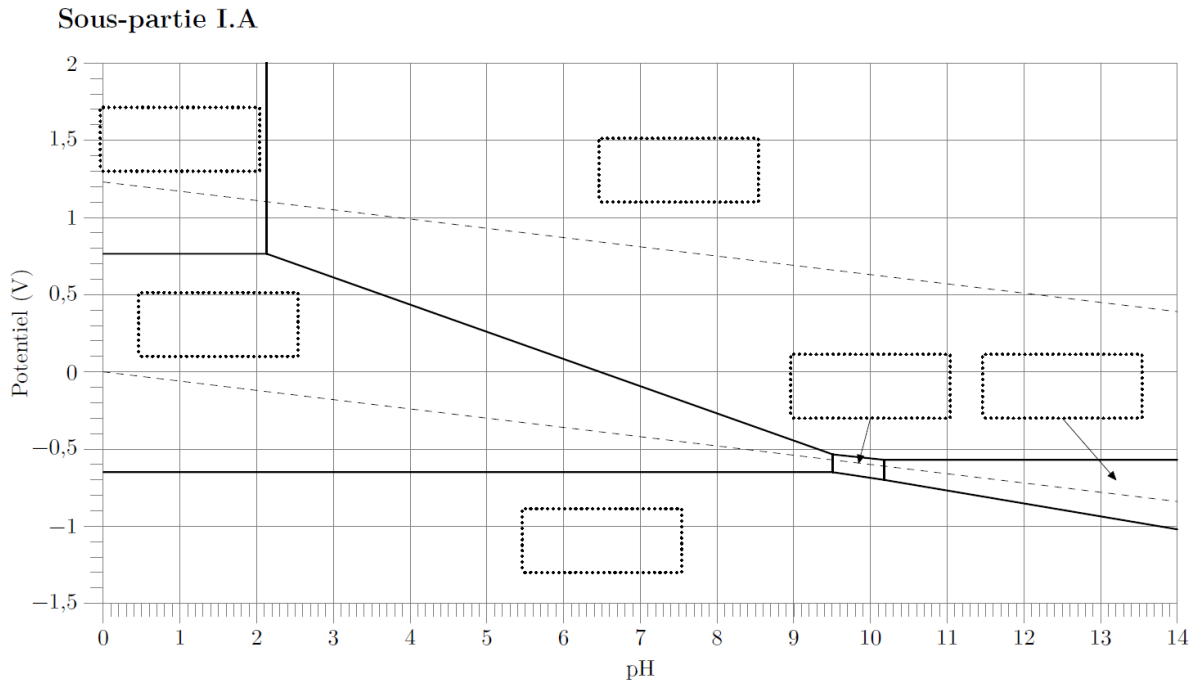


Figure A Digramme potentiel-pH du fer

Question 8

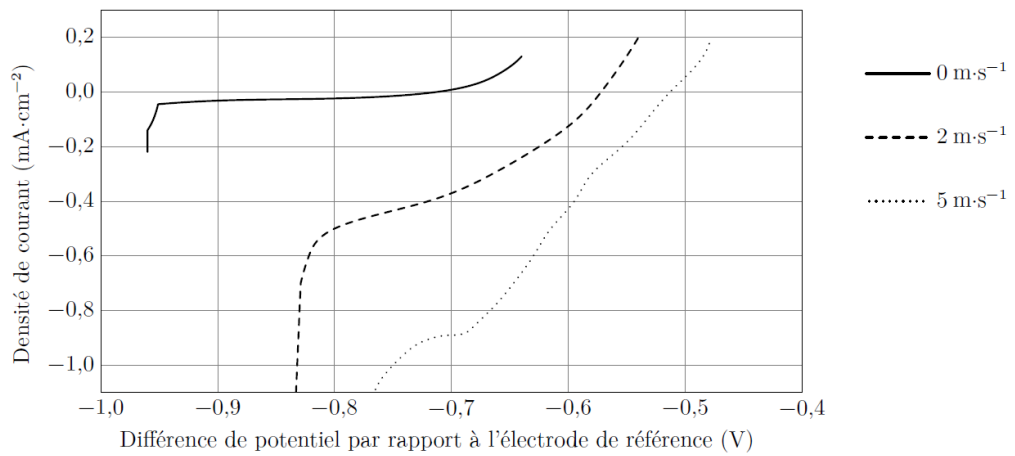


Figure B Courbes densité de courant-potential d'une pièce d'acier plongeant dans une solution modélisant le milieu marin et s'écoulant à différentes vitesses

## Question 10

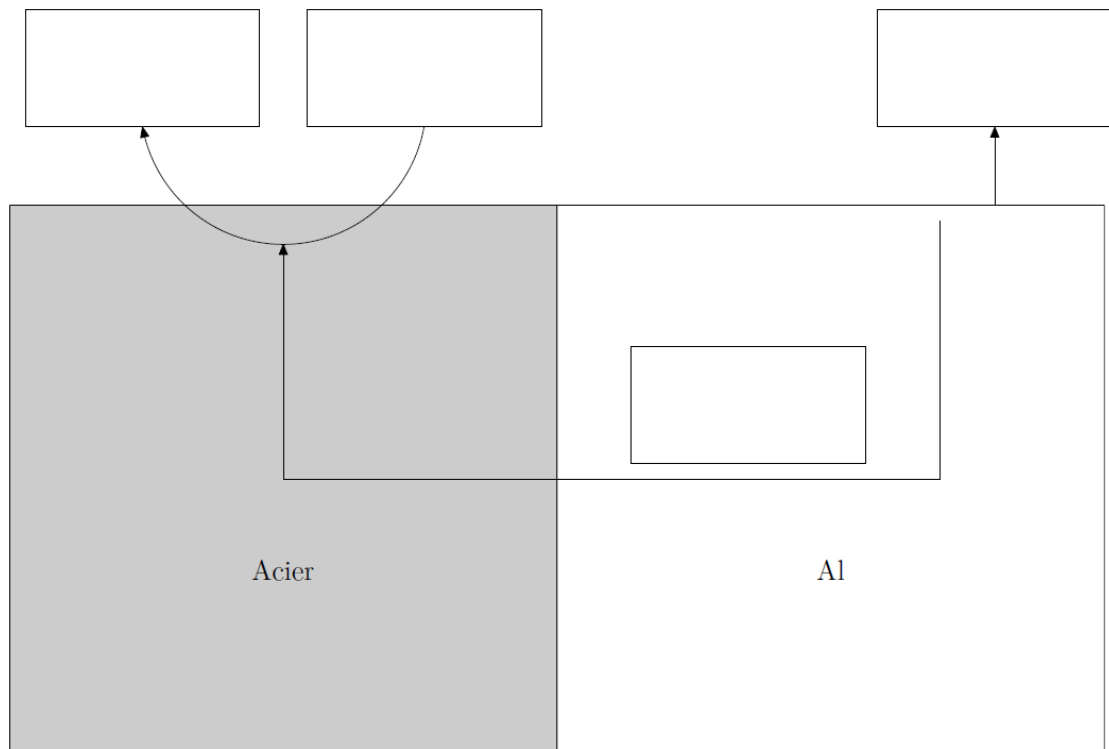


Figure C Acier et aluminium en contact dans l'eau de mer

### 3 Centres de données (d'après CCS - MP - 2022)

Un centre de données — *data center* en anglais — est un lieu regroupant des installations informatiques chargées de stocker et de distribuer des données (*data*). Ces dernières années, l'expansion des services en ligne a entraîné une croissance exponentielle du nombre de centres de données, dégageant de grandes quantités de chaleur. La régulation en température de ces lieux est donc devenue un enjeu environnemental majeur.

Ce problème est composé de deux parties, elles-mêmes divisées en différentes sous-parties, totalement indépendantes. La première partie propose une étude thermodynamique et thermique de dispositifs utilisables pour le refroidissement d'un centre de données. La deuxième partie porte sur le projet de délocalisation des centres de données dans l'espace.

Certaines questions, peu ou pas guidées, demandent de l'initiative de la part du candidat. Leur énoncé est repéré par une barre en marge. Il est alors demandé d'explicitier clairement la démarche, les choix et de les illustrer, le cas échéant, par un schéma. Le barème valorise la prise d'initiative et tient compte du temps nécessaire à la résolution de ces questions.

Certaines données numériques sont regroupées en fin d'énoncé ; d'autres relèvent de l'initiative du candidat.

## I Refroidir les centres de données, quelques solutions techniques contemporaines

### I.A – À l'échelle des composants

À l'échelle des composants, il est nécessaire d'évacuer la chaleur dégagée, par les transistors des microprocesseurs notamment. Pour ce faire, des ventilateurs sont installés afin de renouveler en permanence l'air au contact des composants. De plus, des ailettes de refroidissement sont assemblées directement sur la surface des composants afin de pouvoir dissiper le plus possible de chaleur vers l'extérieur par transfert conducto-convectif.

On modélise une de ces ailettes par un cylindre d'axe  $(Ox)$ , de rayon  $a$ , de longueur  $b \gg a$  et de conductivité thermique  $\lambda$ . Elle est accolée en  $x = 0$  au composant de température  $T_d$  ; le contact thermique en  $x = 0$  est supposé parfait. Le reste de l'ailette est au contact de l'air que l'on suppose de température  $T_a$  uniforme.

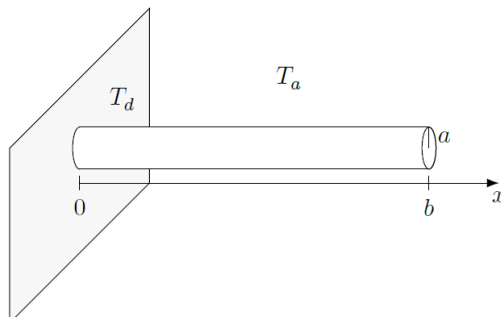


Figure 1 Modélisation de l'ailette

En régime stationnaire, supposé atteint dans toute cette sous-partie, la température  $T(x)$  est considérée comme uniforme sur la section droite de l'ailette située à l'abscisse  $x$  pour tout  $x \in [0, b]$ .

**Q 1.** Énoncer la loi de Fourier relative au vecteur densité de flux thermique  $\vec{j}_Q$  qui caractérise le phénomène de conduction thermique le long de l'axe de l'ailette.

L'air qui entoure le solide, constamment renouvelé et de température uniforme  $T_a$ , échange avec l'ailette un transfert conducto-convectif. Dans une fine couche de fluide au contact de la surface du solide, ce transfert latéral peut-être modélisé par la loi de Newton :

$$\vec{j}_{cc}(x) = h(T(x) - T_a) \vec{n}$$

où  $\vec{j}_{cc}$  correspond à la densité de flux conducto-convectif et  $\vec{n}$  est un vecteur unitaire, normal à la surface d'échange et orienté du solide vers l'air. Le coefficient  $h$ , dont certaines valeurs numériques sont disponibles en fin d'énoncé, est appelé coefficient de transfert thermique de surface.

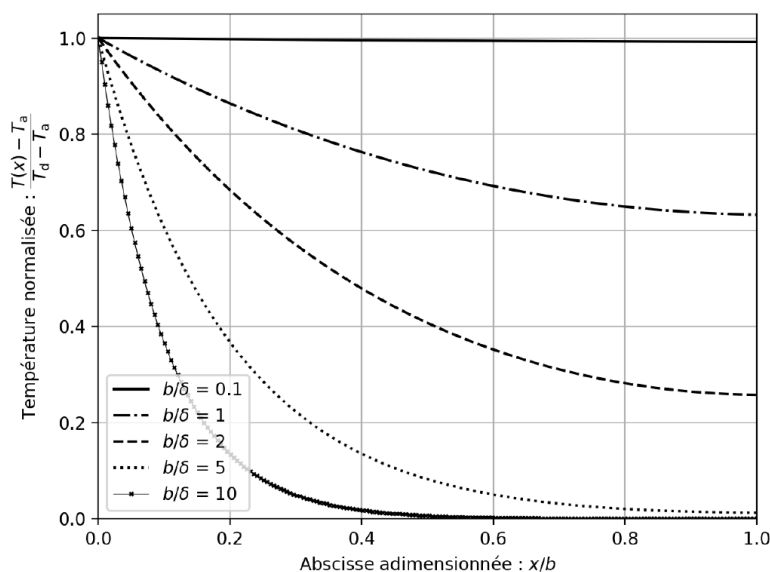
**Q 2.** En réalisant un bilan de puissance thermique sur une tranche de longueur  $dx$  de l'ailette, montrer que la température suit l'équation différentielle

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{1}{\delta^2}T = -\frac{1}{\delta^2}T_a \quad \text{avec} \quad \delta = \sqrt{\frac{\lambda a}{2h}}. \quad (\text{I.1})$$

**Q 3.** Vérifier l'homogénéité de l'expression du paramètre  $\delta$  introduit dans la question précédente. Estimer sa valeur numérique dans le cas d'une ailette en silicium de rayon  $a = 1$  mm.

**Q 4.** Expliciter les conditions aux limites que doit vérifier le champ de température  $T(x)$  en  $x = 0$  et en  $x = b$ .

Sur la figure 2 est représentée la solution « normalisée » de l'équation (I.1), définie par  $\frac{T(x) - T_a}{T_d - T_a}$ , en fonction de l'abscisse adimensionnée  $x/b$ , pour différentes valeurs du rapport  $b/\delta$ .



**Figure 2** Représentation graphique du champ de température dans une ailette en silicium (solution de l'équation (I.1)) pour différentes valeurs du rapport  $b/\delta$

**Q 5.** En précisant les approximations effectuées, obtenir une expression analytique approchée de  $T(x)$  dans le cas où  $b \gg \delta$ . Vérifier la cohérence de cette expression avec la figure 2.

On définit la résistance thermique  $R_{th}$  de l'ailette de refroidissement par  $R_{th} = \frac{T_d - T_a}{\mathcal{P}}$ , où  $\mathcal{P}$  désigne la puissance thermique totale évacuée par l'ailette dans l'air.

**Q 6.** La figure 3 donne une représentation graphique de l'évolution de la résistance thermique d'une ailette cylindrique en fonction du rapport  $b/\delta$ , pour différents matériaux. Interpréter physiquement l'existence d'une valeur asymptotique de  $R_{th}$  commune aux différents matériaux lorsque  $b \ll \delta$ ; justifier sa valeur numérique.

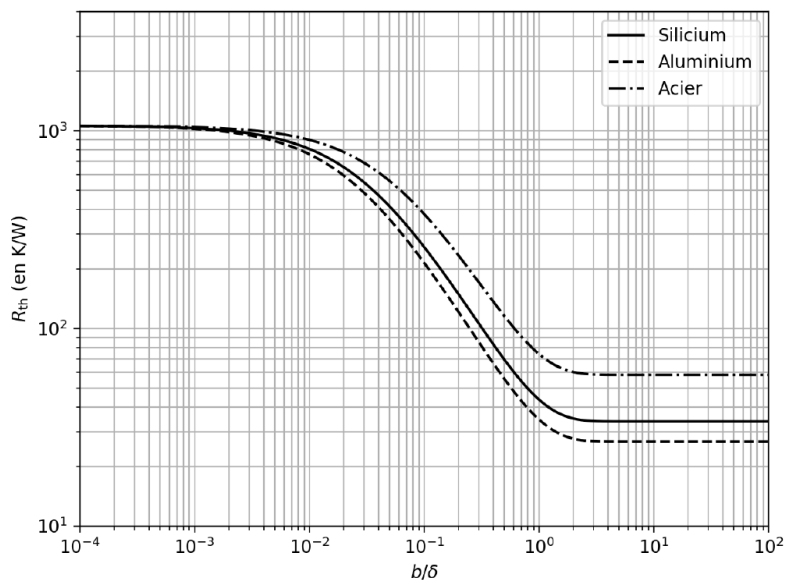
**Q 7.** Retrouver, par le calcul, la valeur asymptotique de la résistance thermique  $R_{th}$  de l'ailette en silicium dans le cas où  $b \gg \delta$ .

**Q 8.** En pratique, les ailettes sont réalisées en aluminium et leur longueur est fixée à  $b = 2$  cm. En vous appuyant sur la figure 3, justifier ces choix, puis estimer le nombre d'ailettes (de rayon  $a = 1$  mm) à associer à un microprocesseur dissipant une puissance thermique de 200 W pour que la température de ce dernier n'excède par  $60^\circ\text{C}$  en régime stationnaire de fonctionnement. Commenter.

### I.B – À l'échelle des locaux

Dans toute cette sous-partie, on s'intéresse au système de refroidissement d'une salle informatique de  $25\text{ m}^3$ , située dans le sud de la France, dans laquelle sont placés plusieurs serveurs de données. L'objectif est de maintenir la température de la salle à une valeur inférieure ou égale à  $T_{\max} = 35^\circ\text{C}$ , sachant que les serveurs de données dégagent une énergie thermique de  $100\text{ kW}\cdot\text{h}$  chaque jour.

**Q 9.** La solution première de refroidissement de la salle repose sur l'utilisation d'un système de conditionnement d'air (parfois désigné « climatiseur » par abus de langage). Estimer le coût annuel, en euros, de cette solution en considérant que le système de conditionnement d'air fonctionne en permanence et que son efficacité — ou COP (Coefficient de Performance) — est égale à 3.

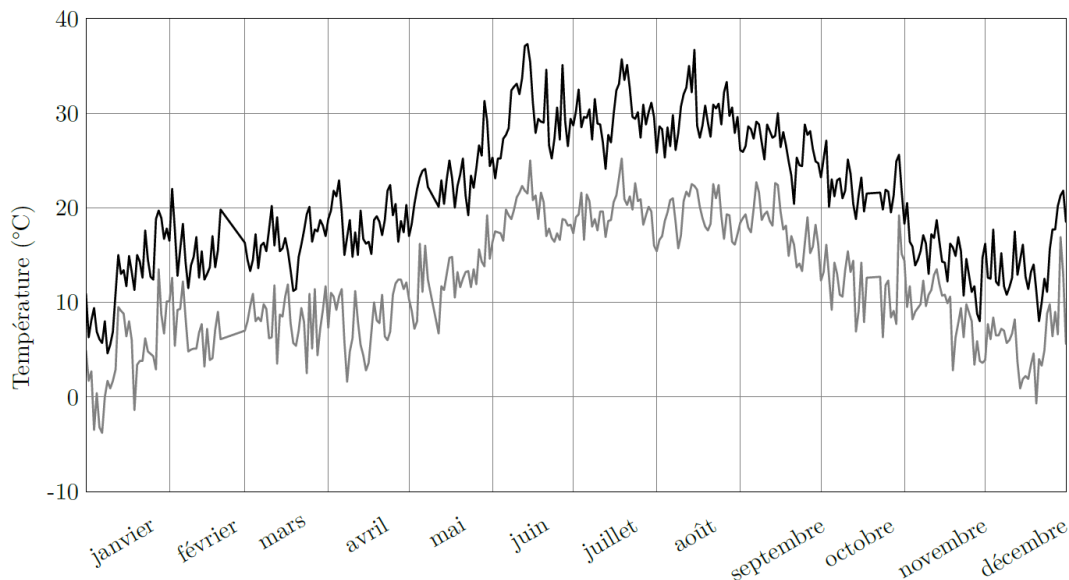


**Figure 3** Évolution de la résistance thermique d'une ailette de rayon  $a = 1$  mm, en présence de ventilation, en fonction du rapport  $b/\delta$

Afin de réduire les dépenses engagées pour le refroidissement de la salle, une alternative intéressante est celle du *free-cooling*, qui consiste à ventiler la salle tout en exploitant la fraîcheur de l'air extérieur. Pour ce faire, on a recours à l'installation d'un ventilateur pouvant remplacer l'air de la pièce avec le débit de volume  $D_v = 830 \text{ m}^3 \cdot \text{h}^{-1}$ . La puissance absorbée par le ventilateur est  $\mathcal{P}_v = 60 \text{ W}$ .

**Q 10.** L'air de la pièce est modélisé par un gaz parfait diatomique, à la pression atmosphérique et à la température  $T_{\max}$ . Exprimer, puis évaluer numériquement, la masse volumique  $\rho_{\text{air}}$  de l'air dans ces conditions. En déduire le débit de masse d'air  $D_m$ , en  $\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$ , brassé par le ventilateur dans ces mêmes conditions.

Les relevés annuels de température à l'extérieur de la salle sont présentés sur la figure 4.



**Figure 4** Relevé des températures journalières minimales et maximales à l'extérieur de la salle pour l'année 2021 (source [infoclimat.fr](http://infoclimat.fr))

Lorsque le système de *free-cooling* ne permet pas de maintenir la température de la salle à une température inférieure ou égale à  $T_{\max}$ , le système de conditionnement d'air prend le relais et le système de *free-cooling* s'arrête.

**Q 11.** À l'aide d'un modèle simple, estimer la période de l'année sur laquelle le système de *free-cooling* est fonctionnel. En déduire le gain annuel en euros obtenu grâce à l'installation du système de *free-cooling* dans cette salle informatique.

## Données

Conductivité thermique du silicium	$\lambda_{\text{Si}} = 148 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$
Conductivité thermique de l'aluminium	$\lambda_{\text{Al}} = 237 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$
Conductivité thermique de l'acier	$\lambda_{\text{acier}} = 50 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$
Coefficient conducto-convectif air-métal (air statique)	$h_s = 30 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$
Coefficient conducto-convectif air-métal (air renouvelé)	$h_r = 300 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$
Prix du kW·h	0,17 €
Constante des gaz parfaits	$R = 8,314 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$
Constante de la gravitation universelle	$G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{s}^{-2}$
Masse de la Terre	$M_T = 5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$
Rayon moyen de la Terre	$R_T = 6,40 \times 10^6 \text{ m}$
Perméabilité magnétique du vide	$\mu_0 = 1,257 \times 10^{-6} \text{ H}\cdot\text{m}^{-1}$
Permittivité diélectrique du vide	$\epsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12} \text{ F}\cdot\text{m}^{-1}$
Vitesse de la lumière dans le vide	$c = 3,00 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$
Charge élémentaire	$e = 1,602 \times 10^{-19} \text{ C}$
Masse de l'électron	$m_e = 9,109 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Masse du proton	$m_p = 1,673 \times 10^{-27} \text{ kg}$
Constante d'Avogadro	$N_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Constante de Faraday	$\mathcal{F} = 9,65 \times 10^4 \text{ C}\cdot\text{mol}^{-1}$
Masse molaire atomique du lithium	$M_{\text{Li}} = 6,94 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$
Masse molaire atomique du carbone	$M_{\text{C}} = 12,0 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$
Masse molaire atomique de l'azote	$M_{\text{N}} = 14,0 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$
Masse molaire atomique de l'oxygène	$M_{\text{O}} = 16,0 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$

## Formulaire

$$\overline{\text{rot}}(\overline{\text{rot}} \vec{a}) = \overline{\text{grad}}(\text{div} \vec{a}) - \Delta \vec{a}$$

Soit deux fonctions sinusoïdales  $f$  et  $g$ , scalaires ou vectorielles, de même période et d'écritures complexes respectives  $\underline{f}$  et  $\underline{g}$ . La valeur moyenne de la fonction  $f \times g$ , le symbole  $\times$  signifiant une opération de produit (scalaire ou vectoriel), vérifie la relation

$$\langle f \times g \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\underline{f} \times \underline{g}^*)$$

où  $\text{Re}$  désigne la partie réelle et  $\underline{g}^*$  le conjugué de la fonction complexe  $\underline{g}$ .