

Correction - DS n°6 (CCINP)
(Samedi 4 février 2023 – Durée 4 h)

I. PRODUCTION DU DIHYDROGÈNE

- Il s'agit de l'enthalpie standard de réaction associée à la réaction de formation à la température T , d'une mole d'une espèce à partir des éléments constitutifs de cette espèce, pris dans leur état standard de référence à la température T .

$\Delta_f H^0(\text{H}_{2(g)}) = 0$ car c'est l'enthalpie standard associée à la réaction : $\text{H}_{2(g)} = \text{H}_{2(g)}$ qui est nulle.

- En partant d'un mélange initial quelconque contenant les 4 gaz, les facteurs d'équilibre intensifs sont :

$$T, P, x(\text{CH}_4), x(\text{H}_2\text{O}), x(\text{CO}) \quad \text{et} \quad x(\text{H}_2)$$

(Comme $\Delta_r \nu_{\text{gaz}} \neq 0$, la pression est bien facteur d'équilibre). Nous avons donc : $N = 6$. Il y a 2 relations entre ces facteurs, à savoir : LAM et $x(\text{CH}_4) + x(\text{H}_2\text{O}) + x(\text{CO}) + x(\text{H}_2) = 1$ et donc $R = 2$. En définitive :

$$v = N - R = 4$$

En partant d'un mélange équimolaire de CH_4 et H_2O , on ajoute deux relations à l'équilibre :

$$x(\text{CH}_4) = x(\text{H}_2\text{O}) \quad \text{et} \quad x(\text{H}_2) = 3x(\text{CO})$$

d'où $R = 4$ et donc :

$$v = 6 - 4 = 2$$

- On calcule $\Delta_r H^0$ et $\Delta_r G^0$ en utilisant la loi de Hess :

$$\Delta_r H^0 = \Delta_f H^0(\text{CO}) - \Delta_f H^0(\text{CH}_4) - \Delta_f H^0(\text{H}_2\text{O}) = 205,7 \text{ kJ}\cdot\text{mol}^{-1} > 0$$

la réaction est donc endothermique, et

$$\Delta_r G^0(298 \text{ K}) = \Delta_f G^0(\text{CO}) - \Delta_f G^0(\text{CH}_4) - \Delta_f G^0(\text{H}_2\text{O}) = 141,7 \text{ kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$$

On en déduit :

$$\Delta_r S^0 = \frac{\Delta_r H^0 - \Delta_r G^0(298 \text{ K})}{298} = 214,8 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$$

$\Delta_r S^0 > 0$ car le désordre augmente dans le sens direct (augmentation du nombre de moles de gaz).

- D'après la loi de modération de Le Châtelier, toute augmentation isotherme de pression entraîne un déplacement de l'équilibre dans le sens d'une diminution du nombre de moles de gaz, c'est à dire dans le *sens indirect*.

Selon la loi de modération de Van't Hoff, toute augmentation isobare de température entraîne un déplacement d'équilibre dans le sens endothermique qui est le *sens direct* ici.

- À 1223 K, $\Delta_r G^0(1223 \text{ K}) = \Delta_r H^0 - 1223 \Delta_r S^0 = -57 \text{ kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$. On en déduit :

$$K^0 = \exp\left(-\frac{\Delta_r G^0(1223 \text{ K})}{R \times 1223}\right) = 2,73 \cdot 10^2$$

On s'attend donc à ce que la réaction soit avancée thermodynamiquement, sans pour autant qu'elle soit totale.

6. L'avancement à l'équilibre vaut : $\xi = n_0\alpha$. On peut en déduire le tableau d'avancement :

	$\text{CH}_4(g)$	+	$\text{H}_2\text{O}(g)$	\rightleftharpoons	$\text{CO}(g)$	+	$3 \text{H}_2(g)$	total gaz
état initial	n_0		n_0		0		0	$2n_0$
état final	$n_0 - \xi$		$n_0 - \xi$		ξ		3ξ	$2n_0 + 2\xi$
état final	$n_0(1 - \alpha)$		$n_0(1 - \alpha)$		αn_0		$3\alpha n_0$	$2n_0(1 + \alpha)$

On en déduit les fractions molaires, sachant que le nombre total de moles de gaz vaut : $n_g = 2n_0 + 2\xi = 2n_0(1 + \alpha)$, et donc :

$$x(\text{CH}_4) = x(\text{H}_2\text{O}) = \frac{n_0 - \xi}{2n_0 + 2\xi} = \frac{1 - \alpha}{2(1 + \alpha)}$$

et

$$x(\text{H}_2) = \frac{3\xi}{n_0 + 2\xi} = \frac{3\alpha}{2(1 + \alpha)} \quad \text{et} \quad x(\text{CO}) = \frac{\xi}{2n_0 + 2\xi} = \frac{\alpha}{2(1 + \alpha)}$$

La loi d'action des masses conduit alors à :

$$K^0 = \frac{x(\text{CO}) x^3(\text{H}_2)}{x(\text{CH}_4) x(\text{H}_2\text{O})} \left(\frac{P}{P^0} \right)^2$$

et donc, avec $P = 10 P^0$, il vient :

$$K^0 = 100 \frac{27\alpha^4}{4(1 + \alpha)^2 (1 - \alpha)^2} \implies \frac{\alpha^2}{1 - \alpha^2} = \sqrt{\frac{4K^0}{2700}} = 0,636$$

On obtient directement :

$$\boxed{\alpha \approx 0,62}$$

On notera que cette valeur est cohérente avec la remarque faite pour la valeur de K^0 .

7. La pression partielle d'un gaz A étant : $P(A) = x(A) P$, on en déduit :

$$\boxed{P(\text{CH}_4) = P(\text{H}_2\text{O}) = 1,17 \text{ bar} \quad P(\text{CO}) = 1,91 \text{ bar} \quad \text{et} \quad P(\text{H}_2) = 5,74 \text{ bar}}$$

8. Reprenons l'expression du quotient réactionnel dans l'état d'équilibre (E_1) obtenu à la fin de la question 6. En introduisant les nombres de moles de chaque constituant gazeux et en appelant n_g le nombre total de moles de gaz, nous obtenons (avec $T = 1223 \text{ K}$) :

$$Q_1 = \frac{n(\text{CO}) n(\text{H}_2)^3}{n(\text{CH}_4) n(\text{H}_2\text{O}) n_g^2} \left(\frac{P}{P^0} \right)^2 = K^0(T)$$

puis, juste après l'ajout de dn moles d'eau (état hors équilibre) :

$$Q_2 = \frac{n(\text{CO}) n(\text{H}_2)^3}{n(\text{CH}_4) [n(\text{H}_2\text{O}) + dn] [n_g + dn]^2} \left(\frac{P}{P^0} \right)^2 < Q_1$$

On en déduit que, dans cet état (E_2) :

$$\Delta_r G_2 = RT \ln \left(\frac{Q_2}{K^0(T)} \right) < 0$$

Ainsi, l'équilibre chimique est déplacé en sens direct $\xrightarrow{1}$. Ce sens d'évolution est cohérent avec la loi de modération de Le Châtelier puisqu'on consomme l'eau ajoutée.

9. Pour $T = 1223 \text{ K}$:

$$\Delta_r G_3 = \Delta_r G_3^0(T) + RT \ln \left(\frac{P(\text{CO}_2)P^0}{P(\text{CO})^2} \right) = -2,15 \text{ kJ.mol}^{-1}$$

et

$$\Delta_r G_4 = \Delta_r G_4^0(T) + RT \ln \left(\frac{P(\text{H}_2)^2}{P(\text{CH}_4)P^0} \right) = 9,26 \text{ kJ.mol}^{-1}$$

10. $\Delta_r G_3 < 0$ donc l'évolution de [3] se fait dans le sens $\xrightarrow{1}$ d'après le critère d'évolution $\Delta_r G d\xi < 0$: du carbone graphite va donc se déposer. En revanche, $\Delta_r G_4 > 0$ et l'évolution de [4] se fait dans le sens $\xleftarrow{2}$ et le carbone graphite va au contraire disparaître.

1 Communication avec un satellite relais (d'après CCS-MP-2022)

Q 16. Rappeler les équations de Maxwell dans le vide et établir l'équation de propagation du champ électrique dans le vide, en l'absence de charge et de courant.

MG $\text{div}(\vec{E}) = 0$ car $\rho = 0$

MT $\text{div}(\vec{B}) = 0$

MA $\text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ car $\vec{j} = \vec{0}$

MF $\text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

or $\text{rot}(\text{rot}(\vec{E})) = \text{grad}(\text{div}(\vec{E})) - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E}$
 $\text{rot}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}(\text{rot}(\vec{B})) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$

d'où $\Delta \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$

Q 17. Établir la relation de dispersion de l'onde de champ électrique complexe $\vec{E}(M, t)$ dans le vide. Le vide est-il un milieu dispersif ?

$\vec{E} = E_0 e^{i(\omega t - kx)} \vec{u}_y$

donc $\Delta \vec{E} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = -k^2 \vec{E}$

de plus, $\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 \vec{E}$

l'équation d'onde devient alors $k^2 \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \omega^2 \vec{E}$

soit $k^2 = \mu_0 \epsilon_0 \omega^2$ d'où $k = \pm \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \omega$

Ici on voit, $k > 0$ car on s'intéresse à une onde se propageant dans le sens des x croissants

donc $k = \frac{\omega}{c}$ est la relation de dispersion attendue.

Q 18. Déterminer, en notation complexe, le champ magnétique $\vec{B}(M, t)$ associé au champ électrique $\vec{E}(M, t)$.

On a vu que \vec{E} qui est une onde plane progressive harmonique, on peut donc utiliser la relation de structure

$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{k \vec{u}_x \wedge E_0 e^{i(\omega t - kx)} \vec{u}_y}{\omega}$

$\vec{B} = \frac{\omega}{c} E_0 e^{i(\omega t - kx)} \vec{u}_z$

Q 19. En admettant que le rapport des amplitudes du champ électrique et du champ magnétique dans le plasma soit assimilable à celui dans le vide, montrer que les effets de la partie magnétique de la force de Lorentz sont négligeables devant ceux de la partie électrique.

Dans le vide, $\|\vec{B}\| = \frac{\|\vec{E}\|}{c}$ d'après la question précédente.

Comparons les composantes magnétiques et électriques de la force de Lorentz s'exerçant sur une particule de charge q

Compara les composants magnétiques et électriques de la force de Lorentz s'agissant sur une particule de charge q

$$\frac{\|\vec{f}_{\text{mag}}\|}{\|\vec{f}_{\text{elec}}\|} = \frac{\|q \vec{v} \wedge \vec{B}\|}{\|q \vec{E}\|} \# \frac{q \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{B}\|}{q \|\vec{E}\|} \# \frac{\|\vec{v}\|}{c} \ll 1 \text{ car } \|\vec{v}\| \ll c \text{ (particules non relativistes)}$$

ordre de grandeur

Donc $\|\vec{f}_{\text{mag}}\| \ll \|\vec{f}_{\text{elec}}\|$

Q 20. En admettant que l'accélération d'un électron du plasma soit donnée par $\frac{d\vec{v}}{dt}$, déterminer l'expression du vecteur vitesse complexe \vec{v}_e d'un électron, positionné en M à l'instant t , en fonction de m_e , e , ω et $\vec{E}(M, t)$. De la même façon, donner l'expression du vecteur vitesse \vec{v}_c d'un cation. Que peut-on dire de $\|\vec{v}_e\|$ par rapport à $\|\vec{v}_c\|$?

système d'électrons
référentiel géocentrique galiléen
2^{ème} loi de Newton

$$m_e \vec{a} = \sum \vec{f}_{\text{at}} = \vec{f}_{\text{lec}} = -e \vec{E}$$

donc $m_e \frac{\partial \vec{v}_e}{\partial t} = -e \vec{E}$

ou, en régime sinusoïdal forcé: $\frac{\partial \vec{v}_e}{\partial t} = i\omega \vec{v}_e$

D'où $m_e i\omega \vec{v}_e = -e \vec{E}$

$$\vec{v}_e = \frac{-e}{m_e i\omega} \vec{E}$$

Pour un cation de charge $+e$ et de masse m_c , la même démarche donne

$$\vec{v}_c = \frac{+e}{m_c i\omega} \vec{E}$$

$m_c \gg m_e$ donne $\|\vec{v}_e\| \ll \|\vec{v}_c\|$

Q 21. Justifier qu'il existe dans le plasma une densité de courant $\vec{j}(M, t)$. En déduire, en utilisant les résultats précédents, que l'expression de la conductivité complexe du plasma notée $\underline{\gamma}$ s'écrit de façon approchée

$$\underline{\gamma} \approx -i \frac{n_e e^2}{m_e \omega}$$

$$\begin{aligned} \vec{j} &= \vec{j}_e + \vec{j}_{\text{cations}} = (-e) \vec{v}_e + (+e) \vec{v}_c \\ &= -n_e e \vec{v}_e + n_c e \vec{v}_c \\ &= -n_e e (\vec{v}_e - \vec{v}_c) \approx -n_e e \vec{v}_e \text{ car } \|\vec{v}_e\| \ll \|\vec{v}_c\| \end{aligned}$$

D'où
$$\vec{j} = \frac{+n_e e^2}{m_e i \omega} \vec{E} = \underbrace{-i \frac{n_e e^2}{m \omega}}_{\gamma} \vec{E}$$

Q 22. Calculer la puissance volumique moyenne fournie par le champ électromagnétique aux électrons libres. Commenter.

$$\begin{aligned} \langle p_v \rangle &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\vec{j} \cdot \vec{E}^*) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\gamma \vec{E} \vec{E}^*) \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\underbrace{\|\vec{E}\|^2}_{\in \mathbb{R}} * \underbrace{\gamma}_{\text{imaginaire pur}}) = 0 \end{aligned}$$

$\langle p_v \rangle = 0$
 Aucune puissance n'est dissipée dans le plasma.
 Cela est dû au fait que les charges vibrent en quadrature par rapport au champ électrique (comme dans une inductance ou une capacité).

Q 23. Établir l'équation de propagation du champ $\vec{E}(M, t)$ dans le plasma.

MG: $\operatorname{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$ *plasma neutre.*
 MT: $\operatorname{div}(\vec{B}) = 0$
 MF: $\operatorname{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
 MA: $\operatorname{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \gamma \vec{E} + \mu_0 \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$
 rot(MF): $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{E}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E}$
 $\operatorname{rot}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{B} = -\mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu_0 \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$
 D'où
$$\Delta \vec{E} = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Q 24. En déduire l'expression de k^2 dans le plasma. Mettre en évidence une pulsation caractéristique, dite pulsation plasma, notée ω_p , dont on fournira l'expression en fonction des grandeurs utiles parmi e , ϵ , ϵ_0 , m_e et n_e .

$$\vec{E} = E_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \vec{y}$$

d'où
$$\Delta \vec{E} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^i} = -k^2 \vec{E}$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = i \omega \vec{E} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 \vec{E}$$

L'équation ci-dessus se simplifie alors

$$-k^2 \vec{E} = \mu_0 \left(\frac{\rho_e}{m_e} \right) i\omega \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \omega^2 \vec{E}$$

\uparrow
 $-i \frac{\rho_e c^2}{m_e \omega}$

Donc $-k^2 = \mu_0 \frac{\rho_e c^2}{m_e} - \mu_0 \epsilon_0 \omega^2$

soit $k^2 = \frac{\mu_0 \epsilon_0}{c^2} \left(\omega^2 - \frac{\rho_e c^2}{\epsilon_0 m_e} \right)$ donc $k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$

avec $\omega_p = \sqrt{\frac{\rho_e c^2}{m_e \epsilon_0}}$

Q 25. Expliciter l'expression de k et en déduire les expressions des champs réels $\vec{E}(M,t)$ et $\vec{B}(M,t)$. On fera apparaître une épaisseur caractéristique δ , que l'on définira et que l'on exprimera en fonction de ω , ω_p et c .

ici $\omega < \omega_p$ donc $k^2 < 0$ donc $k = \pm i \frac{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}{c}$

donc $\vec{E} = E_0 e^{i(\omega t \mp i \frac{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}{c} x)} \vec{u}_y$

$= E_0 e^{\pm \frac{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}{c} x} e^{i\omega t} \vec{u}_y$

$k = +i \frac{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}{c}$ même chose à un champ \vec{E} qui diverge lorsque $x \rightarrow \infty$, ce qui est une solution non physiquement acceptable.

on garde donc $k = -i \frac{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}{c}$ (NB le signe de $\text{Im}(k)$ est de plus important pour l'énoncé : la justification n'était donc pas nécessaire)

on déduit $\vec{E} = \text{Re}(\vec{E}) = E_0 e^{-\frac{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}{c} x} \cos(\omega t) \vec{u}_y$

(NB) onde stationnaire spatialement amortie \rightarrow "onde évanescente"

$e^{-x/\delta}$ avec $\delta = \frac{c}{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}$

$\vec{E} = E_0 e^{i(\omega t - kx)} \vec{u}_y$ étant une pseudo-OPM ($k \in \mathbb{R}$), on peut utiliser la relation de structure dans \mathbb{E} :

$\vec{B} = \frac{k}{\omega} \vec{u}_z \wedge \vec{E} = -\frac{i/\delta}{\omega} \vec{u}_z \wedge E_0 e^{-x/\delta} e^{i\omega t} \vec{u}_y$

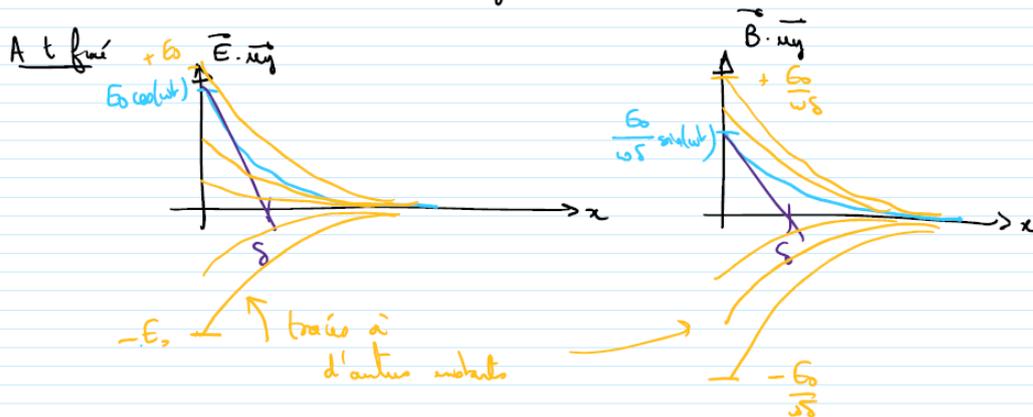
$\vec{B} = \frac{-i}{\omega \delta} E_0 e^{-x/\delta} e^{i\omega t} \vec{u}_z = \frac{E_0}{\omega \delta} e^{-x/\delta} e^{i(\omega t - \pi/2)} \vec{u}_z$

d'où $\vec{B} = \text{Re}(\vec{B}) = \frac{E_0}{\omega \delta} e^{-x/\delta} \cos(\omega t - \pi/2) \vec{u}_z$

$$\vec{B} = \frac{E_0}{\omega \delta} e^{-x/\delta} \sin(\omega t) \vec{u}_y$$

Q 26. Représenter l'évolution spatiale à un instant quelconque des profils des champs électrique et magnétique de l'onde et décrire leur évolution temporelle.

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t) e^{-x/\delta} \vec{u}_y$$



En un point donné, \vec{E} et \vec{B} vibrent sinusoidalement, en quadrature.

Q 27. Calculer la valeur moyenne du vecteur de Poynting associé à cette onde. Caractériser l'onde obtenue.

$$\langle \vec{\pi} \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}^*}{\mu_0} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{E_0 e^{-x/\delta} e^{i\omega t} \vec{u}_y \wedge \frac{E_0}{\omega \delta} e^{-x/\delta} e^{-i(\omega t - \pi/2)} \vec{u}_y}{\mu_0} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{E_0^2}{\mu_0 \omega \delta} e^{-2x/\delta} \underbrace{e^{i\pi/2}}_{=i} \vec{u}_z \right) = 0 = \langle \vec{\pi} \rangle$$

intégrer par

Pas de déplacement de puissance dans le milieu (on retrouve le caractère stationnaire de l'onde évanescente).

Q 28. De la même façon que pour le premier cas, expliciter l'expression de k . En déduire les expressions des champs réels $\vec{E}(M, t)$ et $\vec{B}(M, t)$, puis établir l'expression de la valeur moyenne du vecteur de Poynting.

$$k^2 = \frac{\omega^2 - v_p^2}{c^2} > 0 \rightarrow k = \pm \sqrt{\frac{\omega^2 - v_p^2}{c^2}}$$

On s'intéresse à une onde se propageant dans le sens des x ↑
alors on garde $k > 0$ (car $v_p = \frac{\omega}{k} > 0$)

$$\text{d'où } k = \frac{\sqrt{\omega^2 - v_p^2}}{c}$$

$$\text{Donc } \vec{E} = E_0 e^{i(\omega t - \frac{\sqrt{\omega^2 - v_p^2}}{c} x)} \vec{u}_y$$

$$\vec{E} = E_0 \cos\left(\omega t - \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c} z\right) \vec{u}_y$$

OPPH $\Rightarrow \vec{B} = \frac{R \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{\omega c} \vec{u}_x \wedge E_0 \cos\left(\omega t - \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c} z\right) \vec{u}_y$

$$\vec{B} = \frac{E_0 \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{\omega c} \cos\left(\omega t - \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c} z\right) \vec{u}_z$$

$$\vec{\pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0^2 \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{\mu_0 \omega c} \cos^2\left(\omega t - \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c} z\right) \vec{u}_x$$

d'où $\langle \vec{\pi} \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 \omega c} \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2} \vec{u}_x$

Q 29. Déterminer l'expression de la vitesse de phase v_p ainsi que celle de la vitesse de groupe v_g en fonction de ω_p , ω et c . Tracer v_g et v_p en fonction de ω . Le milieu est-il dispersif ? Comparer ces vitesses à c et commenter.

$v_p \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\omega}{k} = \frac{\omega c}{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}$ dépend de $\omega \rightarrow$ milieu dispersif.

$v_g = \frac{d\omega}{dk}$ or $k = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c}$ donc $k^2 c^2 = \omega^2 - \omega_p^2$
 \downarrow différentions.

~~$2k dk c^2 = 2\omega d\omega$~~

d'où $\frac{d\omega}{dk} = \frac{k}{\omega} c^2 = \frac{c^2}{v_p}$

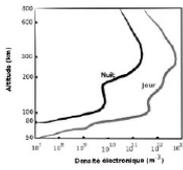
$$v_g = \frac{c^2}{v_p} = \frac{c \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{\omega}$$

on a donc $v_g v_p = c^2$ or $v_p > c$
 $v_g < c$



v_p étant la vitesse d'une OPPH, et celle-ci n'ayant pas de réalité physique (extensions temporelle et spatiale ∞), il n'est pas gênant d'avoir $v_p > c$. La vitesse de groupe, qui correspond à la vitesse d'un paquet d'onde, est bien inférieure à c .

Q 30. Calculer la valeur numérique de la fréquence minimale que doit posséder l'onde pour atteindre un satellite relais géostationnaire à partir de la surface de la Terre. À quel domaine du spectre électromagnétique appartient cette fréquence ?



- l'orbite géostationnaire est à une altitude de 36000 km (extraire article "Le Monde"). (et résultat dans que d'examen)
- or ω dépend de l'altitude donc ω_p dépend de l'altitude.

Pour communiquer avec le satellite, il faut traverser la ionosphère \forall altitude $h \leq 36000$ km

donc il faut que la pulsation ω de l'onde vérifie

$$\omega > \omega_p(h) \quad \forall h \leq 36000 \text{ km.}$$

soit

$$\omega > \omega_p^{\max} = \sqrt{\frac{n_{e,\max} e^2}{m_e \epsilon_0}}$$

avec $n_{e,\max} \approx 0,8 \cdot 10^{17} \text{ m}^{-3}$ (300 km le jour sur figure 6)

AN

$$\omega > 0,2 \cdot 10^9 \text{ rad/s}$$

$$\text{soit } f > 0,03 \text{ GHz.}$$

cohérent (radio AM \neq 160 kHz
 ne traverse pas ionosphère
 FM \neq 100 MHz traverse)

2 Principe d'un radar à effet Doppler (d'après e3a-MP-2018)

C. Généralités sur les ondes électromagnétiques

C1 $\lambda = \frac{c}{f}$ A.N. $\lambda = \frac{3 \cdot 10^8}{10^9} = 0,3 \text{ m}$. Onde radio ou hertzienne.

C2 $\begin{cases} \text{div } \vec{E} = \rho/\epsilon_0 \\ \text{rot } \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t \end{cases} \quad \begin{cases} \text{div } \vec{B} = 0 \\ \text{rot } \vec{B} = \mu_0 (\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \end{cases}$
 Mais s'il faut comprendre "vide" avec $\rho = 0$ et $\vec{j} = 0$,
 on a alors $\text{div } \vec{E} = 0$ et $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$.

C3 $\text{rot } \text{rot } \vec{E} = \text{grad } \text{div } \vec{E} - \Delta \vec{E}$ soit $-\frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{B} = -\Delta \vec{E}$
 et finalement $\Delta \vec{E} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$.

On pose $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ pour obtenir l'eq de d'Alembert $\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$

C4 Pour une OPPM écrite en complexes, on a $\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 \vec{E}$
 et $\Delta \vec{E} = -k^2 \vec{E}$. Alors on en déduit $k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = 0$ soit $\omega^2 = k^2 c^2$

C3 (suite) il faut aussi faire le travail pour le champ \vec{B} ...

C5 Puisqu'on étudie une OPPM, l'équation de Maxwell-Faraday fournit la relation de structure $\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{k E_0 i}{\omega} e^{j(\omega t - kz)} (\vec{e}_z \wedge \vec{e}_x)$

On en déduit $\vec{B} = B_{0i} e^{j(\omega t - kz)} \vec{e}_y$ avec $B_{0i} = \frac{k E_0}{\omega} = \frac{E_0}{c}$

C7 La conductivité σ d'un conducteur parfait tend vers l'infini. Il en résulte une épaisseur de peau tendant vers zéro, ce qui revient à dire que les champs sont nuls dans le conducteur parfait.

(Je ne peux pas qu'on attende ici la démonstration de l'effet de peau jusqu'à $k^2 \approx j\omega\mu_0\sigma$ et $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\sigma\omega}}$).

C8. $\vec{E}_i(z=0) = E_{0i} e^{j\omega t} \vec{e}_x$, tangentiel.

Mais le champ total, par continuité en $z=0$, doit avoir une composante selon x nulle en $z=0$.

Il existe donc un second champ, notons le \vec{E}_r , tel que $\vec{E}_i(z=0) + \vec{E}_r(z=0) = 0$. \vec{E}_r a donc même pulsation ω que \vec{E}_i .

(Notons que \vec{E}_r n'a pas de composante selon y en $z=0$ par continuité; enfin, si on admet que c'est une OPPM de direction z , dans le vide il n'a pas de composante selon z non plus).

C9 La relation de dispersion s'applique : le vecteur d'onde a même module k , mais il est de sens opposé...

$$\text{Alors } \boxed{\vec{E}_r = E_{0i} e^{j(\omega t + kz)} \vec{e}_x}$$

D. Effet Doppler

D1 La sirène d'une ambulance qui passe devant un piéton (donc s'approche, puis s'éloigne) illustre l'effet Doppler.

D2 On a, en un point z' , $\vec{E}_i(t, z') = E_{0i} e^{j\omega(t - \frac{z'}{c})} \vec{e}_x$.

Or, au niveau de la voiture, $z'_0 = d_0 - vt$.

$$\boxed{\vec{E}_i(t, z'_0(t)) = E_{0i} e^{j\omega[t(1 + \frac{v}{c}) - \frac{d_0}{c}]} \vec{e}_x}$$

D3 L'expression précédente laisse apparaître une pulsation $\omega' = \omega(1 + \frac{v}{c})$. Donc $\boxed{f' = f(1 + \frac{v}{c}) = \frac{\omega'}{2\pi}}$.

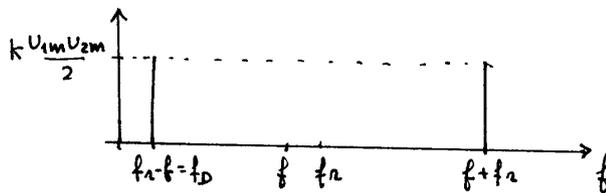
D4 Toujours en notant $z_0(t) = d_0 - vt$ la position de la voiture, le champ réfléchi s'écrit $\vec{E}_r(t, z') = E_{0r} \vec{e}_x e^{j\omega' [t + \frac{z' - z_0(t)}{c}]}$ soit $\vec{E}_r(t, 0) = E_{0r} \vec{e}_x e^{j\omega' [t - \frac{d_0}{c} + \frac{vt}{c}]}$
 On en déduit $\omega_r = \omega' (1 + \frac{v}{c}) = \omega (1 + \frac{v}{c})^2 \approx \omega (1 + 2\frac{v}{c})$
 au 1^{er} ordre en $\frac{v}{c}$. En divisant par 2π : $f_r \approx f + 2\frac{v}{c}f$.

D5 $f = 1\text{GHz}$. $f_D = \frac{2vf}{c} \approx \frac{2 \times 30 \times 10^3}{3 \times 10^8} = 200\text{Hz}$ ($30\text{ms}^{-1} = 108\text{km h}^{-1}$)
 Il faut donc 7 chiffres significatifs pour discriminer f et f_r . Une mesure directe sera trop délicate...

E. Mesure de la fréquence Doppler

E1 $u_{S1}(t) = K u_{1m} u_{2m} \cos(\omega_1 t) \cos(\omega_2 t + \phi)$
 $u_{S1}(t) = K \frac{u_{1m} u_{2m}}{2} [\cos[(\omega_2 - \omega_1)t + \phi] + \cos[(\omega_1 + \omega_2)t + \phi]]$

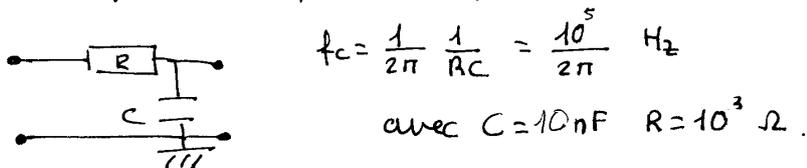
E2



E3 On veut un filtre passe-bas pour éliminer la fréquence $f + f_2$.

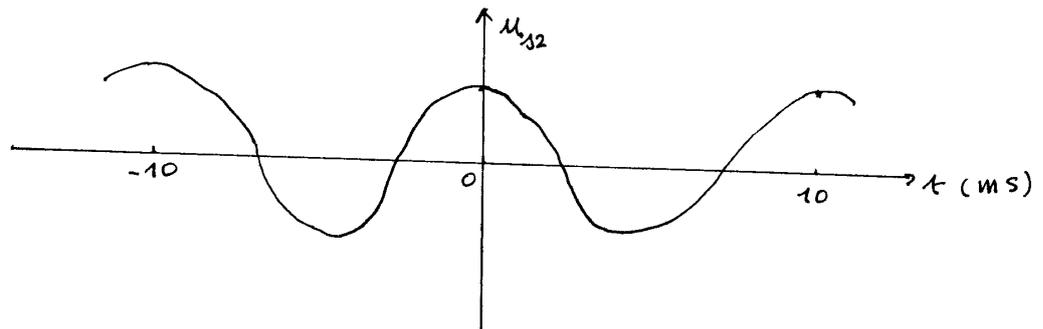
E4 f_D de l'ordre de quelques centaines de Hz. On peut choisir la fréquence de coupure f_c à partir de kHz (mais aussi de MHz : on a de la marge...)

Exemple de choix pour un passe-bas RC du 1^{er} ordre



E5 Le zoom laser a une fréquence rapide $f = \frac{2}{10^{-9}} = 2 \text{ GHz} \approx f_1 + f_2$
 et la courbe une oscillation lente de période $T = 10 \text{ ms}$,
 soit de fréquence $f_D = 100 \text{ Hz}$,
 conformes à l'expression de $u_{s1}(t)$ établie en E1.

E6 En filtrant les oscillations à haute fréquence, on obtient:



E7 $T = 10 \text{ ms} \Rightarrow f_D = 100 \text{ Hz}$

$$v = \frac{c}{2} \frac{\lambda_D}{\lambda}$$

A.N. $v = \frac{3 \cdot 10^8}{2} \cdot \frac{10^2}{10^9}$ $v = 15 \text{ m s}^{-1} = 54 \text{ km h}^{-1}$