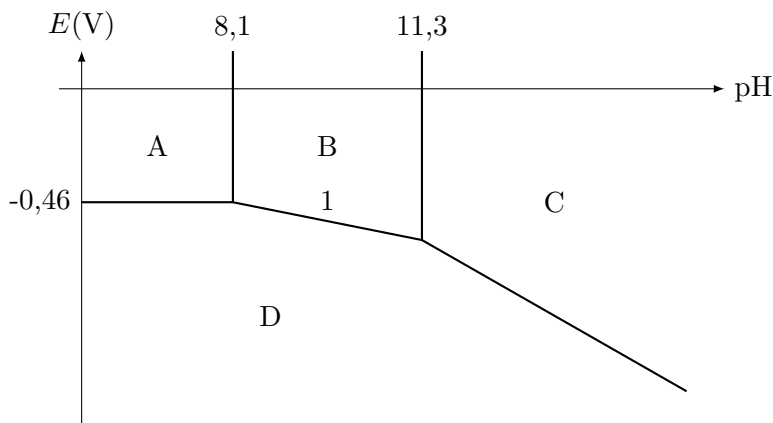


DS n°7bis (CCS-Mines)
(Samedi 11 mars 2023 – Durée 4 h)

1 Diagramme potentiel-pH du cadmium

Le diagramme ci dessous donne le diagramme potentiel-pH de l'élément cadmium à 25°C pour une concentration de tracé $C_{\text{tra}} = 1,0 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$. Les espèces utilisées pour construire ce diagramme sont : $\text{Cd}_{(s)}$, $\text{Cd}(\text{OH})_{2(s)}$, $\text{Cd}_{(aq)}^{2+}$ et $[\text{Cd}(\text{OH})_3]_{(aq)}^-$.



- 1) Identifier les espèces A, B, C, et D du diagramme.
- 2) Déterminer le potentiel standard $E^0(\text{Cd}^{2+}/\text{Cd})$.
- 3) Écrire l'équation - bilan de la réaction reliant $\text{Cd}(\text{OH})_{2(s)}$ et $[\text{Cd}(\text{OH})_3]_{(aq)}^-$ que l'on équilibrera avec des OH^- . Déterminer à l'aide du diagramme sa constante d'équilibre.
- 4) Déterminer la pente du segment 1.
- 5) Tracer sur le diagramme les deux droites délimitant la zone de stabilité de l'eau. Le cadmium est-il stable en solution aqueuse ?

Données générales :

Constante des gaz parfaits : $R = 8,314 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$

Constante de Faraday : $\mathcal{F} = 96\,500 \text{ C.mol}^{-1}$

Constante d'Avogadro : $N_A = 6,023 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

On prendra : $\frac{RT}{\mathcal{F}} \ln 10 = 0,06 \text{ V}$ à 25 °C

$T(\text{K}) = T(^{\circ}\text{C}) + 273,15$

Grandeurs de référence :

Pression standard : $P^0 = 1 \text{ bar} = 1,0 \cdot 10^5 \text{ Pa}$

Concentration standard : $C^0 = 1,0 \text{ mol.L}^{-1}$

Potentieux standard à 25°C

$$E^0(\text{O}_{2(g)}/\text{H}_2\text{O}) = 1,23 \text{ V} \quad \text{et} \quad E^0(\text{H}_3\text{O}_{(aq)}^+/\text{H}_{2(g)}) = 0 \text{ V}$$

Produit ionique de l'eau à 25°C : $K_e = 10^{-14}$

2 Mesures optiques de propriétés mécaniques

Ce sujet comporte deux parties indépendantes présentant des méthodes de mesures fines utilisant divers dispositifs optiques. La partie **I** décrit une structure courante de l'univers, les étoiles binaires, avant de présenter une méthode interférométrique pour mesurer leur écart angulaire. La partie **II** s'intéresse à la structure fine des raies d'émission de l'atome d'hydrogène et à leur mesure interférométrique. Les deux méthodes optiques présentées ici ont en commun leur premier auteur, le physicien américain ALBERT MICHELSON.

Pour toutes les applications numériques, on se contentera de deux chiffres significatifs. Les données nécessaires, accompagnées d'un formulaire utile à la simplification des relations trigonométriques, sont regroupées en fin d'énoncé.

I Les étoiles binaires et leur mesure

Cette partie comporte deux problèmes **I.A** et **I.B**, qui sont totalement indépendants.

En astronomie, on parle d'étoile double pour une paire d'étoiles qui apparaissent comme proches l'une de l'autre dans le ciel lorsqu'on les observe depuis la Terre. Dans certains cas il s'agit d'un système binaire d'étoiles en orbite mutuelle : elles tournent toutes les deux autour de leur barycentre commun sous la seule action des forces gravitationnelles. Dans d'autres cas, leur alignement est simplement fortuit et ce cas ne nous concerne pas dans ce qui suit.

La partie **I.A** ne sera pas traitée dans ce devoir.

I.B Mesure de l'écartement angulaire des étoiles doubles

Lorsque les deux étoiles sont très proches, elles peuvent être difficiles à distinguer. L'étude menée ici sera faite dans le domaine visible et on prendra pour longueur d'onde $\lambda_0 = 550 \text{ nm}$ d'un éclairage supposé ici monochromatique, avec un télescope constitué d'un miroir parabolique (dont on admettra qu'il est équivalent à une lentille mince, unique et convergente) de distance focale $f' = 33 \text{ m}$ et de diamètre d'ouverture $d = 5 \text{ m}$. On rappelle l'expression $\sin \theta \sim \lambda_0/d$ reliant l'échelle angulaire du phénomène de diffraction et la taille caractéristique de l'ouverture diffractante.

- – 8. En déduire la valeur du pouvoir séparateur (ou résolution angulaire) du télescope utilisé. Montrer qu'un système binaire formé de deux étoiles distantes d'une unité astronomique ne peut pas être séparé s'il est, par rapport à l'observateur, distant de $L > L_{\max}$. Déterminer la valeur de L_{\max} en années-lumière.

Lorsque la distance à laquelle se trouve le système double est trop élevée pour pouvoir en offrir une image bien séparée, on peut utiliser un dispositif interférométrique comme celui installé en 1920 par MICHELSON et PEASE devant le télescope américain *Hooker* (figure 3).

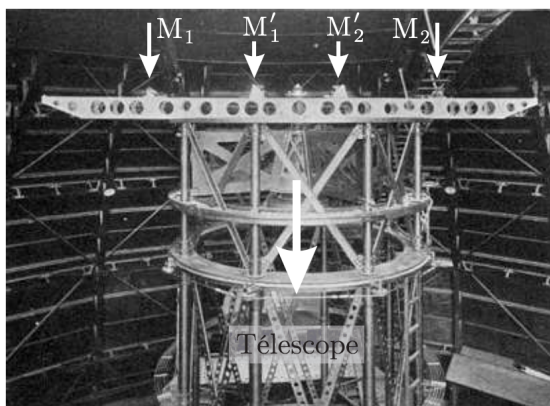


FIGURE 3 – Le dispositif interférométrique réel.

Le schéma décrivant le dispositif est proposé figure 4. On y remarquera que l'axe du télescope y est représenté horizontal pour plus de lisibilité et que ce dernier a été remplacé par une lentille équivalente.

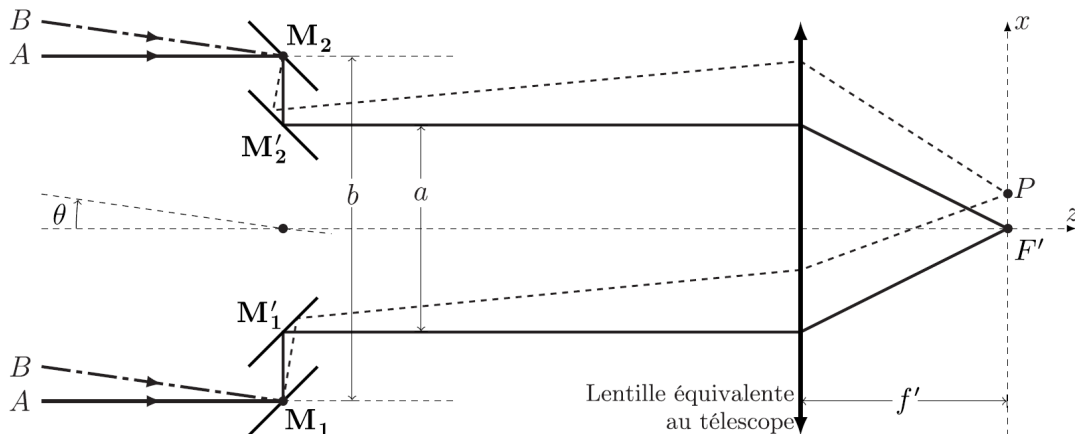


FIGURE 4 – Le schéma équivalent au dispositif interférométrique.

Le faisceau parallèle issu de l'étoile A parvient dans la direction de l'axe optique sur le système, avant d'être réfléchi et diffracté par les miroirs M_1 et M_2 . Les miroirs auxiliaires M_1' et M_2' renvoient ces faisceaux vers le télescope avant de converger dans son plan focal image, au point F' pour le faisceau non diffracté et en d'autres points P pour le faisceau diffracté.

- – 9. Rappeler l'énoncé du théorème de MALUS (ou de MALUS et DUPIN).
 En déduire l'expression de la différence de marche $\delta_A = (AM_1P) - (AM_2P)$ en fonction de la géométrie du dispositif et d'une coordonnée cartésienne de P .
Application Numérique : On donne $a = 2,50$ m. Calculer et commenter l'interfrange i .

- – 10. Exprimer l'intensité lumineuse (ou éclairement) $I_A(P)$ observée au point P en fonction de λ_0 , a , f' , x et de I_{0A} qui désigne l'intensité totale issue de A et parvenant sur l'un des miroirs M_1 ou M_2 .

On prend en compte maintenant la lumière provenant de l'étoile B , à la même longueur d'onde λ_0 mais décalée d'un angle θ . On note I_{0B} l'intensité totale issue de B . Sur la figure 4 ci-dessus on supposera $\theta > 0$.

On notera que dans ce problème : $I_{0A} \neq I_{0B}$.

- – 11. Les sources A et B sont-elles cohérentes entre elles ?
Calculer $\delta_B = (BM_1P) - (BM_2P)$ en fonction de δ_A , θ et b .
- – 12. Exprimer l'intensité lumineuse totale $I(P)$ en utilisant la formule géométrique affirmée en annexe pour l'exprimer sous la forme :

$$I(P) = K \left[1 + \cos \left(2\pi \frac{x - x_0}{\Delta x} \right) V(\theta) \right]$$

dans laquelle on explicitera uniquement les constantes K et Δx ainsi que la fonction $V(\theta)$ en fonction des données du problème.

- – 13. Quelles sont les significations physiques de x_0 et Δx ? Expliquez comment l'étude des franges permet de mesurer l'écartement angulaire des deux composantes d'une étoile double à l'instant de l'observation.

On notera que les miroirs M_1 , M_2 , M'_1 , et M'_2 sont mobiles sur l'axe horizontal visible sur la photo de la figure 4.

II La raie rouge de l'hydrogène

Cette partie comporte deux problèmes **II.A** et **II.B** qui sont très largement indépendants.

La partie **II.A** ne sera pas traitée dans ce devoir.

II.B Spectrométrie interférentielle

II.B.1 La méthode de Michelson

L'appareil utilisé est constitué (voir la figure 5) d'une lame séparatrice S semi-réfléchissante et d'une lame dite compensatrice C , parallèle à la précédente, de même épaisseur et de même indice optique. Ces deux lames sont toutes deux parallèles au plan (Ouz) où l'axe (Ou) est la première bissectrice des axes (Oy) et (Ox) qui sont orthogonaux aux miroirs plans M_f (fixe) et M_m (mobile le long de (Ox) à la vitesse $\vec{v} = v\vec{e}_x$).

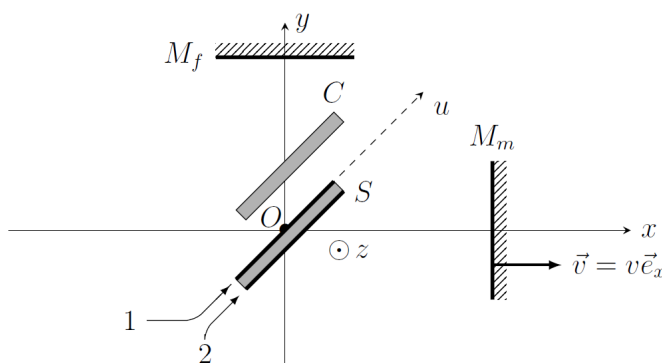


FIGURE 5 – L'interféromètre de Michelson

- – 22. Expliquez, au moyen d'un schéma, le rôle de la lame (C). Précisez en particulier, dans le cas de la figure 5, si la face réfléchissante de la lame (S) est la face supérieure (1) ou la face inférieure (2).
- – 23. L'appareil est éclairé par une source de lumière étendue. Quelle est la nature des franges ? Où peut-on les observer ?

- – 24. On utilise une source monochromatique de longueur d'onde λ_0 . On choisit l'instant $t = 0$ au moment du contact optique et on note I_0 l'intensité lumineuse totale en sortie de l'appareil sur l'axe (Oy) lorsqu'un des deux miroirs est obstrué. Exprimer, en fonction de I_0 , λ_0 , v et t , l'intensité $I(t)$ observée sur cet axe lorsque les deux miroirs sont éclairés.

En 1892, MICHELSON installe, au bureau international des poids et mesures (BIPM) de Sèvres, un interféromètre identique à celui décrit ci-dessus pour rechercher parmi les lampes spectrales connues (hydrogène, cadmium, etc.), celle qui présenterait la meilleure monochromaticité et établir ainsi un étalon de longueur optique.

II.B.2 La mesure de la structure fine de la raie rouge

On éclaire maintenant l'appareil décrit ci-dessus au moyen d'une source bichromatique émettant deux raies de longueurs d'onde voisines, de longueurs d'onde $\lambda_1 = \lambda_0$ et $\lambda_2 = \lambda_0 + \Delta\lambda$ et d'intensités I_1 et $I_2 < I_1$.

- – 25. En admettant que $|\Delta\lambda| \ll \lambda_0$, montrer que l'expression du contraste des franges s'écrit de la manière suivante :

$$C(t) = \sqrt{1 - \frac{4I_1I_2}{(I_1 + I_2)^2} \sin^2 \left(2\pi vt \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2} \right)},$$

puis calculer les contrastes maximal et minimal en fonction de I_2 et I_1 .

- – 26. Réalisant la mesure du spectre de cette raie, MICHELSON a observé, en déplaçant le miroir mobile d'une longueur $\Delta x = 8,5$ mm depuis le contact optique, une diminution progressive du contraste qui atteint alors sa valeur minimale $C_{\min} \simeq 15\%$. En déduire I_2/I_1 puis la valeur de $\Delta\lambda/\lambda_0$ puis commenter l'ordre de grandeur obtenu au regard des développements mécaniques qui précèdent.

La structure fine ainsi observée n'a pu être expliquée qu'avec le développement ultérieur de la mécanique quantique pour le calcul du spectre détaillé des niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène.

Données numériques

Année-lumière	$1 \text{ AL} = 9,46 \cdot 10^{15} \text{ m}$
Célérité de la lumière dans le vide	$c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
Charge élémentaire	$e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
Constante de Planck	$h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{Hz}^{-1}$
Constante de la gravitation universelle	$\mathcal{G} = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
Distance Terre-Soleil (unité astronomique)	$d = 1 \text{ UA} = 1,49 \cdot 10^{11} \text{ m}$
Masse de l'électron	$m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
Masse du Soleil	$M_{\odot} = 1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$
Période du mouvement de la Terre (année)	$T_0 = 365,25 \text{ j} = 3,16 \cdot 10^7 \text{ s}$
Permittivité diélectrique du vide	$\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$

$$\sqrt{2} \simeq 1,41, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \simeq 0,71$$

Formulaire

Pour tous $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $\theta_1 \in \mathbb{R}$ et $\theta_2 \in \mathbb{R}$, on peut écrire :

$$a_1 \cos \theta_1 + a_2 \cos \theta_2 = a \cos \left[\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} + \varphi \right],$$

avec respectivement :

$$a = (a_1 + a_2) \sqrt{1 - m^2 \sin^2 \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}} \quad \text{et} \quad m = \frac{2\sqrt{a_1 a_2}}{a_1 + a_2},$$

tandis que $\varphi \in \mathbb{R}$ est donné par :

$$\tan \varphi = \frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2} \tan \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}.$$

3 Proxima du Centaure

Ce problème est une invitation à regarder vers les étoiles, et tout particulièrement l'étoile la plus proche de la planète Terre après le Soleil : Proxima du Centaure aussi appelée *Proxima Centauri*.

Il est constitué de 4 parties totalement indépendantes. La première partie étudie une caractéristique de l'atmosphère terrestre qui a permis le développement de la vie sur Terre et peut-être un jour sur une exoplanète. La deuxième partie est relative à l'observation de Proxima du Centaure et à la détermination de sa distance et de sa taille. La troisième partie s'intéresse à un vaisseau capable de rejoindre Proxima du Centaure et d'explorer une exoplanète dont la découverte fait l'objet de la dernière partie.

Certaines questions peu ou pas guidées, demandent de l'initiative de la part du candidat. Leur énoncé est repéré par une barre en marge. Il est alors demandé d'explicitier clairement la démarche, les choix et de les illustrer, le cas échéant, par un schéma. Le barème valorise la prise d'initiative et tient compte du temps nécessaire à la résolution de ces questions.

Certaines données numériques sont regroupées en fin d'énoncé ; d'autres relèvent de l'initiative du candidat.

Seule la partie **II** sera traitée dans ce devoir.

II Découverte de Proxima du Centaure

II.A – Première observation de l'étoile

L'étoile *Proxima Centauri* a été découverte en 1915 par l'astronome britannique Robert Innes, alors directeur de l'observatoire de l'Union à Johannesburg en Afrique du Sud. C'est une étoile de type naine rouge, de masse $M_E = 2,44 \times 10^{29}$ kg et de rayon $R_E = 9,81 \times 10^4$ km. Elle est située à $D_E = 3,99 \times 10^{13}$ km soit 4,22 années-lumière du Soleil.

Dans la suite du sujet, toutes les applications numériques seront faites à la longueur d'onde moyenne du visible $\lambda_{\text{obs}} = 600$ nm.

Q 13. Justifier, par un argument d'ordre de grandeur, que la distance entre la Terre et Proxima du Centaure peut être approximée à 4,22 années-lumière.

Pour voir l'étoile *Proxima Centauri*, un instrument d'optique est utilisé. Il est modélisé dans la suite par deux lentilles :

- une lentille convergente L_1 objectif, de centre optique O_1 , de foyer principal objet F_1 , de foyer principal image F'_1 et de distance focale image $f'_1 = 8$ m ;
- une lentille divergente L_2 de projection, de centre optique O_2 , de foyer principal objet F_2 , de foyer principal image F'_2 et de distance focale image $f'_2 = -0,02$ m.

Si le point objet A et le point image A' sont conjugués par la lentille L de focale f' et de centre O , d'après la Formule de Descartes on a

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$$

et le grandissement transversal est

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}}.$$

L'instrument d'optique est pointé vers l'étoile *Proxima Centauri*.

Q 14. Où est située l'image de l'étoile par la lentille L_1 , appelée image intermédiaire A_1B_1 ? Illustrer cette situation par un schéma.

Q 15. Déterminer l'expression de la taille de cette image intermédiaire A_1B_1 (non algébrique) en fonction du rayon R_E de l'étoile et des caractéristiques de la lentille objectif L_1 .

Q 16. La lentille de projection L_2 , divergente, sert à faire de l'image intermédiaire A_1B_1 une image définitive $A'B'$, réelle, non inversée et agrandie d'un facteur 4. Calculer la distance O_1O_2 pour respecter ces contraintes.

Q 17. Illustrer par un schéma la position de A_1B_1 , de $A'B'$ et de L_2 (sans représenter L_1).

Q 18. En 1915, l'image définitive $A'B'$ de l'étoile se formait sur une plaque photographique de dimension 24 mm \times 36 mm, composée de cristaux de 10 μ m de chlorure d'argent, précipité blanc qui noircit à la lumière. L'image définitive de l'étoile *Proxima Centauri* est-elle vue comme ponctuelle ou étendue sur la plaque photo ?

Q 19. À l'occasion du centenaire de la découverte de Proxima du Centaure, en 2015, la photo de l'étoile a été reprise avec l'instrument d'optique de l'époque mais la plaque photographique a été remplacée par un capteur CCD (Charge Coupled Device) de 100 millions de pixels, de taille identique à la plaque photo originelle. L'image définitive de l'étoile *Proxima Centauri* est-elle vue comme ponctuelle ou étendue sur le capteur photosensible ? L'efficacité quantique QE d'un capteur CCD donne le taux de transformation de la lumière en charge, soit la probabilité qu'un photon incident donne « naissance » à un électron dans le capteur. Pour la longueur d'onde étudiée, cette sensibilité quantique QE est de 30 %.

Q 20. Sachant que la puissance surfacique reçue sur Terre par le Soleil dans le visible est de 600 W·m⁻² et que la lentille d'entrée de l'instrument est de diamètre $D_1 = 50$ cm, de combien d'électrons sera composé le signal résultant de l'étoile pour une exposition de 12 minutes du capteur ? Quelle est la charge produite par le capteur ?

Q 21. La diffraction par la lentille d'entrée L_1 est-elle gênante pour les observations ?

II.B – Mesure de la distance entre la Terre et l'étoile

La parallaxe est l'effet du changement de position de l'observateur sur ce qu'il perçoit.

La parallaxe annuelle est, par définition, l'angle qui mesure le déplacement, au cours de l'année, de la position apparente, perçue depuis la Terre, d'une étoile proche par rapport aux étoiles lointaines (figure 4).

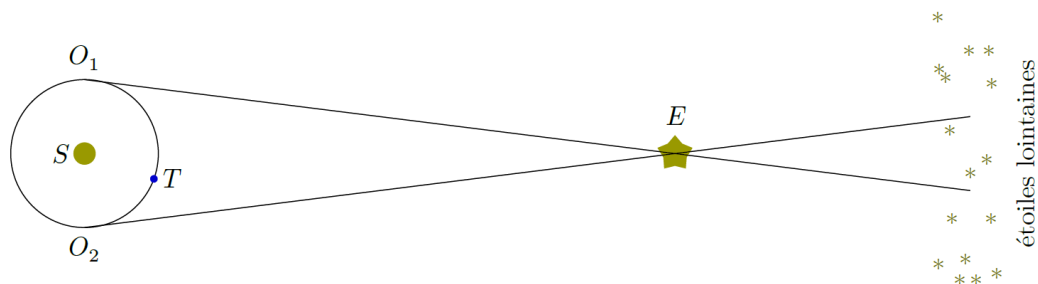


Figure 4 Schéma explicatif de la mesure de parallaxe solaire

Sur la figure 4, deux instants d'observation sont représentés par O_1 et O_2 .

Le satellite Hipparcos (High Precision Parallax Collection Satellite) a mesuré la parallaxe de $P_E = 1545$ millisecondes d'arc pour *Proxima Centauri*.

Q 22. Calculer, à partir de cette valeur de la parallaxe P_E , la distance séparant l'étoile *Proxima Centauri* du système solaire et comparer à la valeur donnée au début de cette partie.

Q 23. Pourquoi la distance entre la Terre et le Soleil varie-t-elle au cours de l'année ?

Données

Perméabilité magnétique du vide

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H}\cdot\text{m}^{-1}$$

Permittivité diélectrique du vide

$$\varepsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12} \text{ F}\cdot\text{m}^{-1}$$

Charge élémentaire

$$e = 1,602 \times 10^{-19} \text{ C}$$

Constante d'Avogadro

$$\mathcal{N}_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

Constante de Boltzmann

$$k_B = 1,381 \times 10^{-23} \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$$

Constante des gaz parfaits

$$R = 8,314 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$$

Constante de Planck

$$h = 6,626 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$$

Vitesse de la lumière dans le vide

$$c = 3,00 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

Constante universelle de la gravitation

$$\mathcal{G} = 6,674 \times 10^{-11} \text{ m}^3\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{s}^{-2}$$

Masse de l'électron

$$m_e = 9,109 \times 10^{-31} \text{ kg}$$

Masse du proton

$$m_p = 1,673 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

Rayon moyen de la Terre

$$R_T = 6,38 \times 10^6 \text{ m}$$

Distance Terre-Soleil

$$D_{TS} = 1,50 \times 10^8 \text{ km}$$

Masse de la Terre

$$M_T = 5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$$

Rayon du Soleil

$$R_S = 6,96 \times 10^8 \text{ m}$$

Masse du Soleil

$$M_S = 1,99 \times 10^{30} \text{ kg}$$