

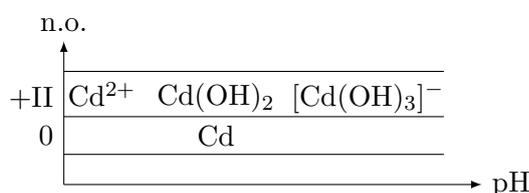
Correction - DS n°7bis (CCS-Mines)  
(Samedi 11 mars 2023 – Durée 4 h)

## 1 Diagramme potentiel-pH du cadmium

1) On commence par calculer les nombres d'oxydation de Cd dans chacune des espèces.

Espèces	Cd	Cd <sup>2+</sup>	Cd(OH) <sub>2</sub>	[Cd(OH) <sub>3</sub> ] <sup>-</sup>
n.o.	0	+II	+II	+II

On constate ensuite que Cd(OH)<sub>2</sub> contient plus de OH<sup>-</sup> que Cd<sup>2+</sup> et que [Cd(OH)<sub>3</sub>]<sup>-</sup> contient plus de OH<sup>-</sup> que Cd(OH)<sub>2</sub>. On en déduit la répartition suivante :



d'où : A = Cd<sup>2+</sup> ; B = Cd(OH)<sub>2</sub> ; C = [Cd(OH)<sub>3</sub>]<sup>-</sup> et D = Cd

2) Cd<sup>2+</sup> + 2e<sup>-</sup> = Cd

$E = E^0 + 0,03 \log \left( \frac{[\text{Cd}^{2+}]}{C^0} \right)$ . Sur la frontière [Cd<sup>2+</sup>] = C<sub>tra</sub> et donc :

$$E_{\text{front}} = E^0 + 0,03 \log \left( \frac{C_{\text{tra}}}{C^0} \right) = -0,46 \text{ V} \quad \text{d'où} \quad \boxed{E^0 = -0,40 \text{ V}}$$

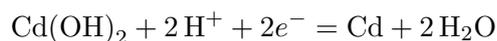
3) Cd(OH)<sub>2</sub> + OH<sup>-</sup> = [Cd(OH)<sub>3</sub>]<sup>-</sup>

$$K^0 = \frac{[\text{Cd(OH)}_3^-]}{[\text{OH}^-]} = \frac{[\text{Cd(OH)}_3^-][\text{H}_3\text{O}^+]}{K_e (C^0)^2}$$

On se place sur la frontière verticale où pH = 8,1 donc [H<sub>3</sub>O<sup>+</sup>] = 10<sup>-pH</sup> = 7,94.10<sup>-9</sup> mol.L<sup>-1</sup> et [Cd(OH)<sub>3</sub>]<sup>-</sup> = C<sub>tra</sub>. On en déduit :

$$\boxed{K^0 = \frac{10^{-2} \times 7,94.10^{-9}}{10^{-14}} = 7,94.10^3}$$

4) Le segment 1 est la frontière entre Cd et Cd(OH)<sub>2</sub>. Le demi-équation électronique de ce couple s'écrit :



Nernst :

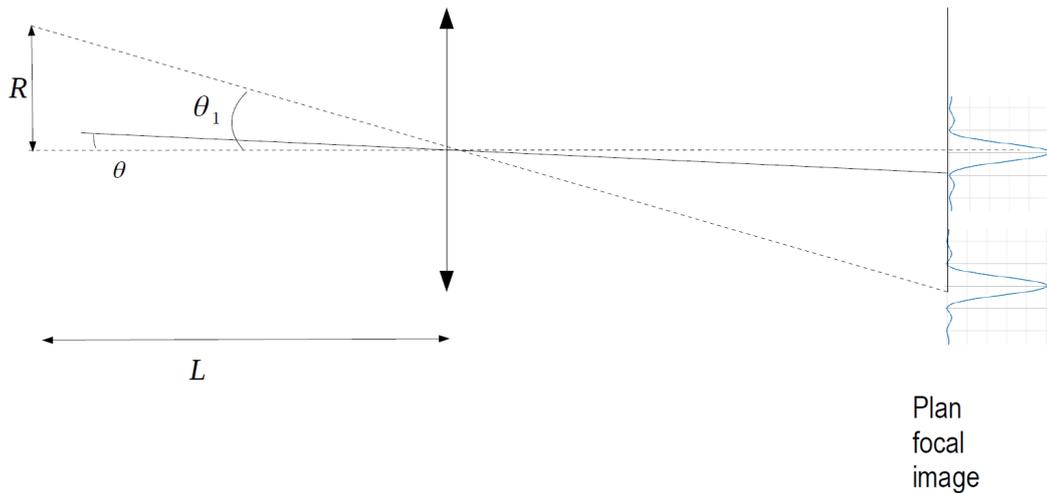
$$E = E^0 + 0,03 \log \left( \frac{[\text{H}^+]^2}{(C^0)^2} \right) = E^0 - 0,06 \text{ pH}$$

La pente de ce segment est donc de - 0,06 V/pH

5) Les deux droites de l'eau sont 1,23-0,06 pH et -0,06 pH. On remarque que le domaine d'existence de Cd est situé en dehors de la zone de stabilité de l'eau et donc que Cd n'est pas stable en solution aqueuse.

## 2 Mesures optiques de propriétés mécaniques (d'après Mines-PC-2022)

8) Pour que les deux images soient séparées, il faut que la distance entre les centres des tâches de diffraction des deux étoiles soit plus grande que la demi-largeur de chacune des taches (critère de Rayleigh):

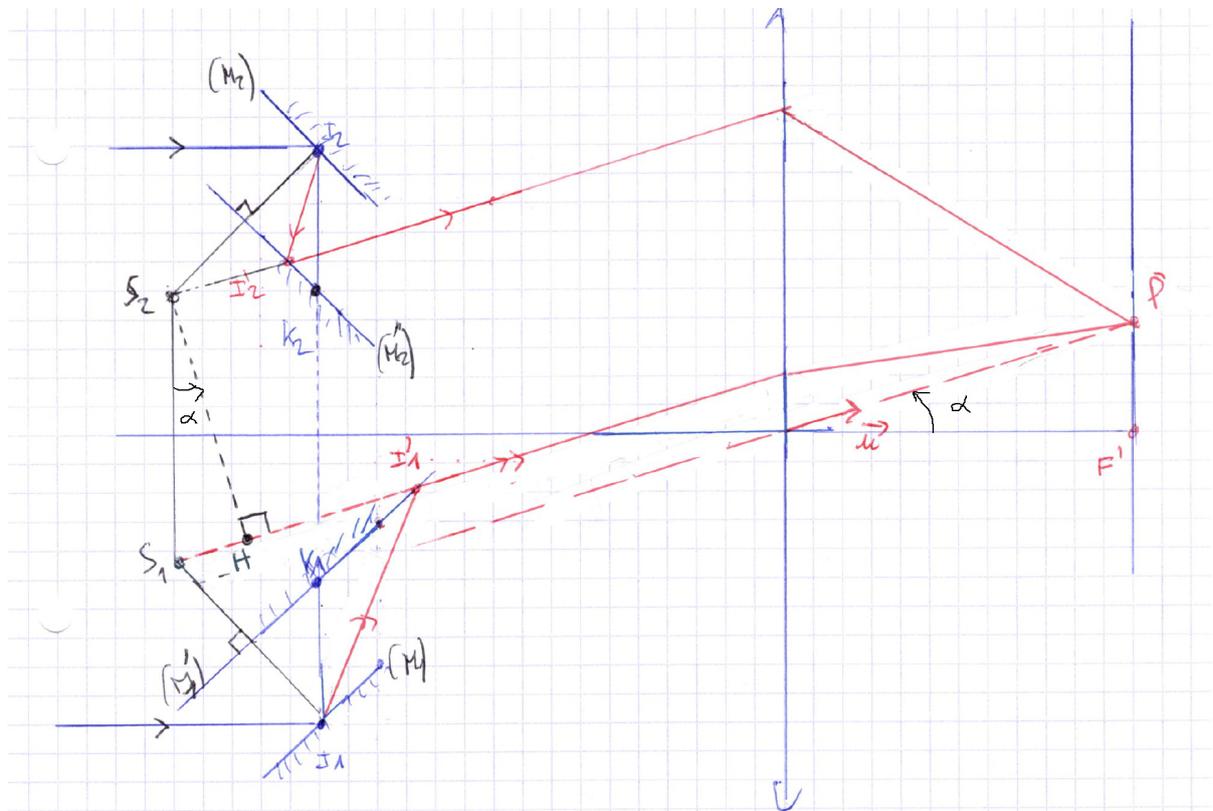


Si on note  $\theta_1$  la distance angulaire entre les deux étoiles, il faut donc que  $\sin \theta_1 > \sin \theta \approx \frac{\lambda_0}{d}$ . Or en supposant les angles petits,  $\sin \theta_1 \approx \tan \theta_1 = \frac{R}{L}$ . Il faut donc que  $\frac{R}{L} > \frac{\lambda_0}{d}$ , soit  $L < L_{max} = \frac{dR}{\lambda_0}$ .

A.N.:  $L_{max} = 143 AL$ .

Critère de Rayleigh pas au programme...

9) - Théorème de Malus: après un nombre quelconque de réflexions et/ou de réfractions (en nombre et nature identiques pour tous les rayons), les surface d'onde issues d'une source ponctuelle sont perpendiculaires aux rayons lumineux.



$S_2$  est l'image de  $I_2$  par réflexion sur  $(M'_2)$ ,  $S_1$  est l'image de  $I_1$  par réflexion sur  $(M'_1)$

Construction effectuée dans l'ordre suivant:

- on choisit arbitrairement  $I'_2$ , point de réflexion sur  $(M'_2)$ ; la direction  $S_2 I'_2$  donne alors la direction des rayons avant traversée de la lentille
- le rayon parallèle à  $(S_2 I'_2)$  (de vecteur unitaire  $\vec{u}$ ) et passant par le centre optique de la lentille, non dévié, donne le point P
- le rayon parallèle à  $(S_2 I'_2)$  et passant par  $S_1$  donne le point  $I'_1$

On a  $I_1 I'_1 = I_1 S_1$  et  $I_2 I'_2 = I_2 S_2$ , ainsi que  $(AI_1) = (AI_2)$ , donc  $\delta_A = (I_1 I'_1 P) - (I_2 I'_2 P) = (S_1 I'_1 P) - (S_2 I'_2 P)$ .

Or d'après le théorème de Malus "à rebours", les rayons  $S_2 I'_2$  et  $S_1 I'_1$  étant parallèles entre eux,  $S_2$  et  $H$  appartiennent à un plan d'onde issu de  $P$ :  $(S_2 P) = (HP)$ .

Donc:  $\delta_A = S_1 H = \overrightarrow{S_1 S_2} \cdot \vec{u} = a \vec{e}_x \cdot \frac{\overrightarrow{O_L P}}{O_L P}$  où  $O_L$  est le centre optique de la lentille. Dans l'approximation

de Gauss,  $O_L P \approx f'$ , donc finalement  $\delta_A = \frac{ax}{f'}$ .

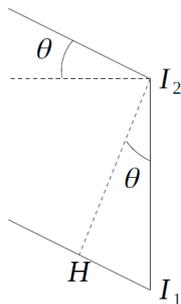
- La frange brillante d'ordre  $p$  a une abscisse  $x_p$  telle que  $\delta_A = p \lambda_0 = \frac{ax_p}{f'}$ , d'où  $x_p = \frac{p \lambda_0 f'}{a}$ .

L'interfrange vaut donc  $i = x_{p+1} - x_p = \frac{\lambda_0 f'}{a}$ . A.N.:  $i = 7,3 \mu m$ : non visible à l'œil nu, il faut probablement une loupe pour l'observer.

10) Formule de Fresnel: 
$$I_A(P) = 2I_{0A} \left( 1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{ax}{f'}\right) \right)$$

Résultat discutable: il ne tient pas compte du caractère non isotrope de la diffraction par les miroirs. De plus,  $I_{0A}$  est l'intensité "issue de A et parvenant sur un des miroirs", mais probablement pas celle qui arriverait en F' en occultant une des deux voies de l'interféromètre.

11) - Les deux étoiles sont deux sources distinctes, elles ne sont pas cohérentes entre elles: il faudra donc sommer l'intensité issue de A et celle issue de B.



D'après le théorème de Malus,  $(BI_2) = (BH)$ . On a donc  $(BI_1) - (BI_2) = H I_1 = I_1 I_2 \sin \theta = b \sin \theta$ .

Donc, 
$$\delta_B = \delta_A + b \sin \theta$$

12) On somme les intensités, chacune donnée par la formule de Fresnel:

$$I(P) = 2I_{0A} \left( 1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \delta_A\right) \right) + 2I_{0B} \left( 1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} (\delta_A + b \sin \theta)\right) \right)$$

Avec la formule de l'énoncé, elle se met sous la forme:

$$I(P) = 2(I_{0A} + I_{0B}) + a \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \left(\frac{ax}{f'} + \frac{b}{2} \sin \theta\right) + \varphi\right) \text{ avec } a = 2(I_{0A} + I_{0B}) \sqrt{1 - m^2 \sin^2\left(\frac{\pi b \sin \theta}{\lambda_0}\right)}$$

$$m = 2 \frac{\sqrt{I_{0A} I_{0B}}}{I_{0A} + I_{0B}}$$

On a donc encore:  $I(P) = 2(I_{0A} + I_{0B}) \left( 1 + \sqrt{1 - m^2 \sin^2\left(\frac{\pi b \sin \theta}{\lambda_0}\right)} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \left(\frac{ax}{f'} + \frac{b}{2} \sin \theta\right) + \varphi\right) \right)$ , qui est

bien de la forme  $I(P) = K \left( 1 + \cos\left(2\pi \frac{x - x_0}{\Delta x}\right) V(\theta) \right)$  avec  $K = 2(I_{0A} + I_{0B})$ ,  $\Delta x = \frac{\lambda_0 f'}{a}$  et

$$V(\theta) = \sqrt{1 - m^2 \sin^2\left(\frac{\pi b \sin \theta}{\lambda_0}\right)}$$

13) -  $x_0$  est l'abscisse de la frange centrale,  $\Delta x$  est l'interfrange.  $V(\theta)$  est le facteur de visibilité.

- On part d'une valeur de  $b$  suffisamment faible pour que  $V(\theta) \approx 1$ : les franges sont bien contrastées.

- On augmente progressivement la valeur de  $b$ ,  $V(\theta)$  diminue. Le contraste passe par un minimum pour

$$\sin^2\left(\frac{\pi b \sin \theta}{\lambda_0}\right) = 0, \text{ donc pour } \sin \theta = \frac{\lambda_0}{b}$$

- S'il s'agit d'un vrai système binaire, l'angle  $\theta$  varie au cours du temps. Mais si la période de rotation est très longue, il faut un suivi sur une durée équivalente pour s'en rendre compte...

22) - La face réfléchissante de (S) est la face 1.

- La compensatrice (C) permet d'avoir le même nombre de traversées de lame (ici 3) pour les deux rayons. En son absence, le rayon se réfléchissant sur ( $M_f$ ) effectuerait une traversée de lame, tandis que l'autre en effectuerait 2: il y aurait une différence de marche supplémentaire, fonction en plus de la longueur d'onde si le verre est dispersif.

23) Michelson réglé en lame d'air, avec source étendue: on obtient des anneaux d'égale inclinaison, localisés à l'infini, et généralement ramenés à distance finie en plaçant l'écran dans le plan focal image d'une lentille convergente.

24) On se place donc au centre des anneaux. La différence de marche vaut donc simplement  $\delta = 2e$  où  $e$  est l'épaisseur de la lame d'air équivalente, qui vaut donc ici  $v \cdot t$ . On a donc  $\delta(t) = 2 \cdot v \cdot t$ .

La formule de Fresnel donne alors  $I(t) = 2I_0(1 + \cos(\frac{2\pi}{\lambda_0} 2 \cdot v \cdot t))$

25) - Les deux raies sont incohérentes entre elles, on somme les intensités:

$$I(t) = 2I_1(1 + \cos(\frac{2\pi}{\lambda_1} 2 \cdot v \cdot t)) + 2I_2(1 + \cos(\frac{2\pi}{\lambda_2} 2 \cdot v \cdot t))$$

On obtient donc avec la formule de l'énoncé:  $I(t) = 2(I_1 + I_2) + a \cos(2\pi v t (\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}) + \varphi)$  avec

$$a = 2(I_1 + I_2) \sqrt{1 - m^2 \sin^2(2\pi v t (\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}))}$$
 et  $m = 2 \frac{\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2}$ . Soit encore

$$I(t) = 2(I_1 + I_2)(1 + C(t) \cos(2\pi v t (\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}) + \varphi))$$
 avec  $C(t) = \sqrt{1 - m^2 \sin^2(2\pi v t (\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}))}$

Or  $\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \approx \frac{\Delta \lambda}{\lambda_0^2}$ . Donc:  $C(t) = \sqrt{1 - \frac{4I_1 I_2}{(I_1 + I_2)^2} \sin^2(2\pi v t \frac{\Delta \lambda}{\lambda_0^2})}$

- On a donc  $C_{max} = 1$  et  $C_{min} = \sqrt{1 - \frac{4I_1 I_2}{(I_1 + I_2)^2}} = \frac{I_1 - I_2}{I_1 + I_2}$ .

26) On a donc  $C_{min} = 0,15 = \frac{1 - I_2/I_1}{1 + I_2/I_1}$ , d'où  $\frac{I_2}{I_1} = \frac{1 - C_{min}}{1 + C_{min}} = 0,74$ .

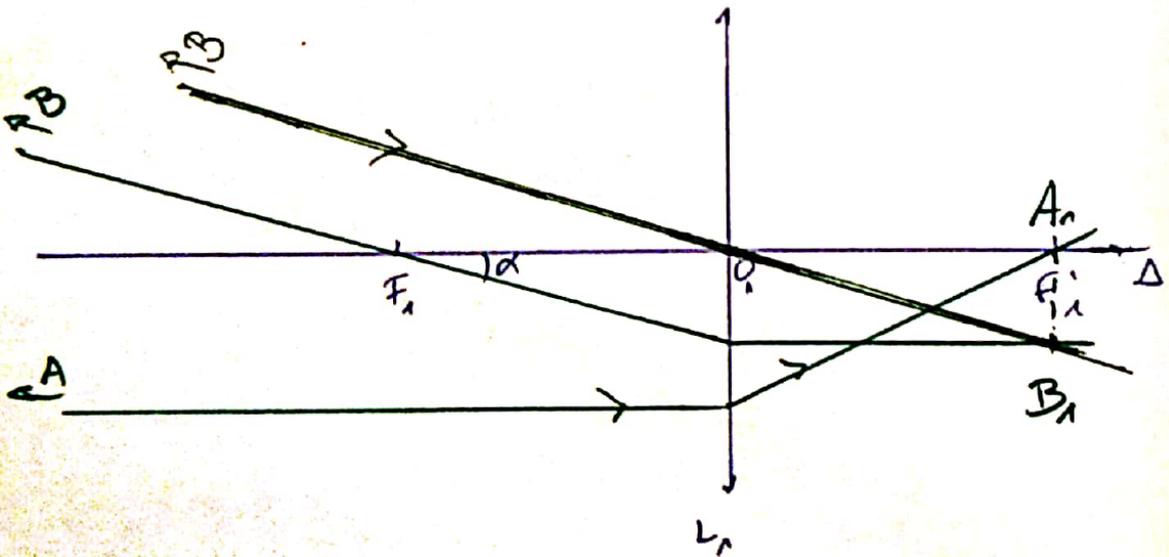
Le premier minimum du contraste se produit lorsque  $2\pi \Delta x \frac{\Delta \lambda}{\lambda_0^2} = \frac{\pi}{2}$ , donc  $\frac{\Delta \lambda}{\lambda_0} = \frac{\lambda_0}{4 \Delta x} = 1,9 \cdot 10^{-5}$ .

### 3 Proxima du Centaure (d'après CCS-MP-2020)

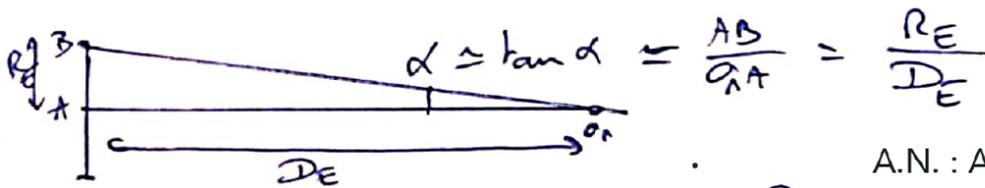
Q13  $D_{TS} = 1,5 \cdot 10^8 \text{ km} \ll D_E = 3,99 \cdot 10^{13} \text{ km}$

Donc la distance T - Proxima du Centaure est donnée par une très bonne approximation par la distance Soleil - Proxima du Centaure

Q14 Etant donnée les échelles de distance mise en jeu, on peut dire que A et B sont à l'infini de  $L_1$ , donc  $A_1 B_1$  est dans le plan focale image de  $L_1$



Q15 Utilisons le schéma précédent.  
Notons  $\alpha$  l'inclinaison d'un rayon incident issu de B par rapport à l'axe optique.  
Remarquons que dans l'approximation des petits angles  $\alpha \approx \tan \alpha = \frac{A_1 B_1}{O_1 A_1} = \frac{A_1 B_1}{f'_1}$   
et d'autre part



A.N. :  $A_1 B_1 = 40 \text{ nm}$   
Ce qui est cohérent pour une étoile aussi lointaine.

Donc  $A_1 B_1 = 2f'_1 \alpha = 2f'_1 \frac{R_E}{D_E}$

Q16 On veut  $|\gamma| = \left| \frac{A'B'}{A_1 B_1} \right| = +4$   
l'image  $A'B'$  est redressée

Pour  $\gamma = \frac{O_2 A'}{O_2 A_1} = +4$  (1)

et  $\frac{1}{O_2 A'} - \frac{1}{O_2 A_2} = \frac{1}{f'_2}$  (2)

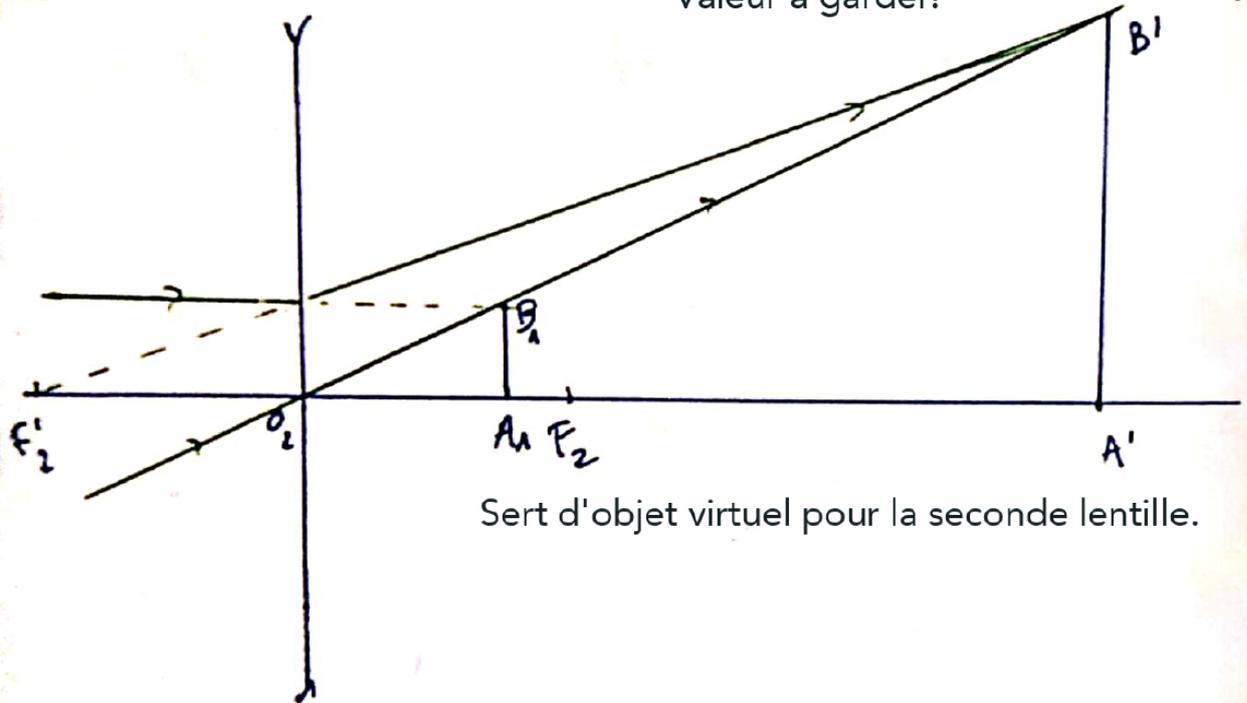
utilisons (1) pour s'affranchir de  $O_2 A'$  dans

(2) :  $O_2 A' = +4 O_2 A_2$

$\frac{1}{+4 O_2 A_2} - \frac{1}{O_2 A_2} = \frac{1}{f'_2} \Rightarrow \frac{1}{O_2 A_2} \left( \frac{1}{4} - 1 \right) = \frac{1}{f'_2}$

$O_2 A_2 \times \left( \frac{-4}{3} \right) = f'_2$  donc  $O_2 A_2 = \left| \frac{-3f'_2}{4} \right| > 0$  car  $f'_2 < 0$ .  
On  $O_2 A_1 = O_2 O_1 + O_1 A_2 = -O_1 O_2 + f'_1$

Donc  $-\frac{3f'_2}{4} = -\overline{O_1O_2} + f'_1$   
 limite à un chiffre significatif. Sans quoi, on aurait  
 Q17  $\overline{O_1O_2} = f'_1 + \frac{3}{4}f'_2 = 7,985 \text{ m}$   
 Valeur à garder!



Sert d'objet virtuel pour la seconde lentille.

Q18 Évaluons  $A_1B_1 = 24 \lambda \frac{R_E}{D_E} = 4 \cdot 10^{-8} \text{ m}$   
 Donc  $|A'B'| = 4|A_1B_1| = 16 \cdot 10^{-8} \text{ m} = 0,16 \mu\text{m}$   
 la taille de l'image est de  $0,16 \mu\text{m}$ , plus  
 petit qu'un cristal de couche d'argent, et  
 apparaît donc ponctuelle.

Q19 Évaluons la dimension d'un pixel  
d'aire  $A = \frac{26 \times 36 \cdot 10^{-6}}{100 \cdot 10^6} = 8,6 \cdot 10^{-12} \text{ m}^2$

c'est un côté de côté  $d = \sqrt{A} = 3 \mu\text{m}$

L'image est ici encore de dimension inférieure à la taille d'un capteur, et apparaît donc ponctuelle

Q20 On suppose que la puissance  $P$  de maxima de Centre est la même que celle du Soleil à une distance  $d$  de l'étoile, la puissance surfacique s'exprime comme

$$P_{\text{surf}} = \frac{P}{4\pi d^2} \text{ donc } P_{\text{surf}}^{\text{Soleil}} = \frac{P}{4\pi D_{\text{TS}}^2} \text{ et } P_{\text{surf}}^{\text{maxima}} = \frac{P}{4\pi D_{\text{E}}^2}$$

Donc  $P_{\text{surf}}^{\text{maxima}} = P_{\text{surf}}^{\text{Soleil}} \frac{4\pi D_{\text{TS}}^2}{4\pi D_{\text{E}}^2} = 8,48 \cdot 10^{-9} \text{ W/m}^2$

la puissance reçue par le télescope est

$$P_{\text{surf}}^{\text{maxima}} \times 4 \left(\frac{D_1}{2}\right)^2 = 8,3 \times 10^{-6} \text{ W}$$

L'énergie reçue pendant  $\Delta t = 12 \text{ min} = 720 \text{ s}$  est

$$E = P \times \Delta t = 6,0 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

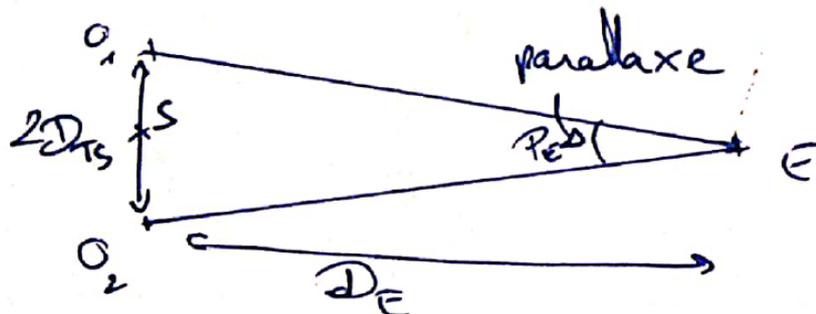
Soit un nombre de photons  $N_{\text{ph}} = \frac{E}{h\nu} = \frac{E\lambda}{hc}$

$$N_{\text{ph}} = 1,8 \cdot 10^{16} \text{ photons}$$

30% des photons induisent un électron dans le capteur  $N_{e^-} = 5,4 \cdot 10^{15}$  électrons, soit une charge  $Q = N_{e^-} \times (-e) = -8,7 \cdot 10^{-4} \text{ C}$

Q21 la largeur angulaire du faisceau diffracté par la lentille est  $\frac{\lambda}{D_1} = 2,6 \cdot 10^{-6} \text{ rad}$ . la largeur de la tâche sur le capteur est  $\frac{\lambda}{D_1} \times f_1 = 2,6 \cdot 10^{-5} = 26 \mu\text{m}$  très supérieure à  $0,8 \mu\text{m}$  : la diffraction est gênante.

Q22



Remarquons que  $\tan \frac{P_E}{2} = \frac{D_{TS}}{D_E}$   
 $\approx \frac{P_E}{2}$  dans l'approximation des  
 petits angles  
 (avec  $P_E$  en radian !)

donc  $D_E = \frac{2D_{TS}}{P_E} = 4,01 \times 10^{13}$  km

La valeur est proche de celle proposée par l'énoncé. Pour la critiquer, il faudrait connaître l'incertitude sur la parallaxe mesurée.

Q23 Question bizarre. Sans doute est-il attendu une réponse rappelant que la Terre décrit en réalité une ellipse dont le Soleil est un des foyers, et pas un cercle.