

Correction - DS n°8bis (CCS-Mines)  
Thermodynamique - Courbes intensité-potentiel - Mécanique quantique  
(Samedi 8 avril 2023 – Durée 4 h)

## 1 Centrale - MP - 2016

### II Confinement d'objets quantiques

#### II.A Confinement dans une boîte quantique

- II.A.1. (a) Confinement au voisinage d'un minimum de potentiel : oscillateur harmonique  
 $E_m = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2x^2 = \text{cte}$  d'où en dérivant par rapport au temps  $\ddot{x} + \omega^2x = 0$  ; conversion d'énergie cinétique en énergie potentielle et réciproquement.

Circuit électrique LC :  $E = \frac{q^2}{2C} + \frac{1}{2}L i^2 = \text{cte}$  où  $i = \frac{dq}{dt}$  ;  $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  ; mêmes calculs (analogie méca-élec) ; conversion d'énergie électrique stockée dans le condensateur en énergie magnétique stockée dans la bobine et réciproquement.

(b)  $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) + V(x) \psi(x, t)$  où  $\rho = |\psi|^2$  est la densité de probabilité de présence, c'est à dire que la probabilité  $dP$  de se trouver entre  $x$  et  $x + dx$  à  $t$  est  $dP = |\psi(x, t)|^2 dx$ .

(c)  $g(t) = e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$  où  $E$  est l'énergie de cet état. Cet état est stationnaire car la densité de probabilité de présence  $\rho = |\psi|^2$  est bien indépendante du temps.

(d) C'est un état lié et la fonction d'onde doit être normalisée :  $\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi|^2(x) dx = 1$ .

(e)  $\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x |\psi|^2(x) dx = 0$  (imparité de la fonction ou changement de variable  $x \rightarrow -x$ ). Avec le formulaire on a directement l'extension caractéristique  $\Delta x = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\hbar}{m^* \omega}} = 3,0 \text{ nm}$ .

(f)  $\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2} \Rightarrow \Delta p_x \geq \sqrt{\frac{m^* \hbar \omega}{2}}$ . Et  $\langle p_x \rangle = 0$  donc  $\langle p_x^2 \rangle = (\Delta p_x)^2 \geq \frac{m^* \hbar \omega}{2}$  d'où  $E = \left\langle \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2} m^* \omega^2 x^2 \right\rangle \geq \frac{\hbar \omega}{2}$ . Pour l'OHQ le minimum est atteint et  $E_0 = \frac{\hbar \omega}{2}$ .

Contrairement au cas classique cette énergie minimale n'est pas nulle mais strictement positive. Cette énergie minimale est directement liée au confinement au travers de  $\omega$  et de la relation d'incertitude de Heisenberg (c.f. calcul ci-dessus).

(g) On a toujours  $g(t) = e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$  et en injectant la solution à variables séparées  $\psi(x, y, t) = \varphi(x)\chi(y)e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$  dans l'équation de Schrödinger bidimensionnelle  $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \underbrace{\Delta \psi}_{\text{laplacien}} + V(x, y) \psi$  on a

$-\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \chi + \varphi \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} \right) + (V(x) + V(y)) \varphi \chi = E \varphi \chi$  ; on divise par  $\varphi(x) \chi(y)$  et on sépare les variables pour obtenir  $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\varphi(x)} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) + V(x) = E + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\chi(y)} \left( \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} \right) - V(y) = \text{cte}$  puisque le terme de gauche ne dépend que de  $x$  et celui de droite que de  $y$ .

Ainsi  $\varphi(x)$  est solution de l'équation de Schrödinger stationnaire 1D pour le potentiel harmonique  $V$  d'où une énergie  $E_x = \left(n_x + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega$  et de même pour  $\chi(y)$  avec une énergie  $E_y = \left(n_y + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega$ . En réinjectant dans l'égalité précédente on en déduit que  $E = E_x + E_y = (n_x + n_y + 1) \hbar \omega$  avec  $n_x$  et  $n_y$  entiers positifs.

(h) On obtient  $E_n^{2D} = (n + 1) \hbar \omega$  où  $n$  entier positif de dégénérescence  $g_n^{2D} = n + 1$  (nombre de paires d'entiers positifs  $n_x$  et  $n_y$  tels que  $n_x + n_y = n$ ). Le fondamental d'énergie  $E_0^{2D} = \hbar \omega$  est non dégénéré.

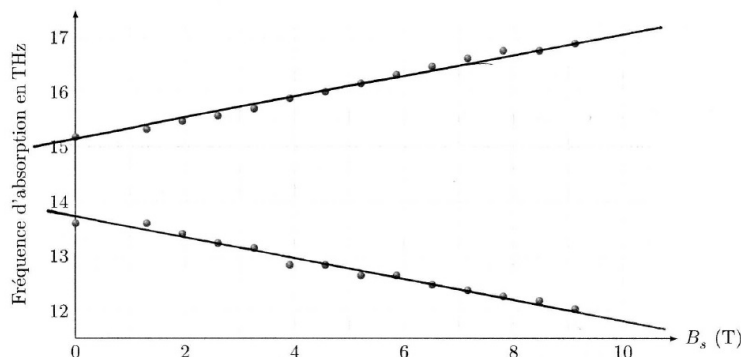
II.A.2. (a) On peut citer les diodes laser qui émettent principalement dans l'infrarouge.

(b) On éclaire l'échantillon par une source de fréquence réglable (IR/visible/UV) et on mesure l'absorbance en fonction de la fréquence ; des pics de résonance se présentent à certaines pulsations de résonance  $\omega_{n,p}$  liée aux niveaux d'énergie par  $\hbar \omega_{n,p} = E_n - E_p$ .

(c)  $\omega_c = \frac{eB_s}{m^*} < \frac{\omega}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow B_s < B_{\max} = \frac{m^* \omega}{e\sqrt{2}} = 25,6 \text{ T ok!}$

(d)  $k_B T \sim 10^{-22} \text{ J} \ll \hbar \omega \sim 10^{-20} \text{ J}$  donc l'agitation thermique est négligeable et la – quasi – totalité des électrons se trouve dans l'état fondamental d'énergie  $E'_0$  qui est donc le seul à contribuer à l'absorbance.

(e) On effectue une modélisation linéaire très satisfaisante des courbes  $f_{\text{abs}}(B_s)$ .



**Interprétation :** on a  $B_s < 9 \text{ T} \sim \frac{B_{\text{max}}}{3}$  donc  $\frac{\omega_c^2}{4} < \frac{\omega^2}{3^2 * 4 * 2} \ll \omega^2$ ; on peut donc considérer que  $\Omega \simeq \omega$ .

Les fréquences d'absorption s'expriment alors  $f_1 = \frac{E_- - E'_0}{h} \simeq \frac{\omega}{2\pi} - \frac{e}{4\pi m^*} B_s$  et  $f_2 = \frac{E_+ - E'_0}{h} \simeq \frac{\omega}{2\pi} + \frac{e}{4\pi m^*} B_s$ .

Cela correspond bien aux variations affines symétriques observées.

**Aspect quantitatif :** pente mesurée  $\pm 2,0 \cdot 10^{11} \text{ Hz} \cdot \text{T}^{-1}$  pour une pente théorique  $\pm \frac{e}{4\pi m^*} = \pm 2,0 \cdot 10^{11} \text{ Hz} \cdot \text{T}^{-1}$ ; l'accord est excellent !

Il y a par contre un problème car les deux droites devraient se croiser sur l'axe des ordonnées à  $\frac{\omega}{2\pi} = 14,5 \text{ THz}$  ce qui n'est pas le cas (la question suivante va apporter l'explication).

II.A.3. On se place à  $B = 0$  et l'anisotropie lève la dégénérescence sur le premier niveau excité  $E'_1 = 2\hbar\omega$  :

en effet on a  $E_x = \left(n_x + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)$  (DL au premier ordre en  $\varepsilon$ ),  $E_y = \left(n_y + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)$  et  $E = E_x + E_y$ .

Le fondamental  $(n_x, n_y) = (0, 0)$  est d'énergie inchangée  $\hbar\omega$  mais les couples  $(1, 0)$  et  $(0, 1)$  correspondent désormais à des niveaux d'énergie différents :

$E_{(0,1)} = \left(2 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \hbar\omega$  premier niveau excité et  $E_{(1,0)} = \left(2 + \frac{\varepsilon}{2}\right) \hbar\omega$  deuxième niveau excité. C'est bien ce qui est observé à  $B = 0$  sur la figure 5 avec  $f_{(0,1)} = \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \frac{\omega}{2\pi} \simeq 13,75 \text{ THz}$  et  $f_{(1,0)} = \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) \frac{\omega}{2\pi} \simeq 15,15 \text{ THz}$ . On note que l'on a bien une moyenne de  $14,45 \text{ THz}$  égale à la valeur attendue de  $14,5 \text{ THz}$  aux incertitudes de lecture près.

On obtient une anisotropie  $\varepsilon = \frac{f_{(1,0)} - f_{(0,1)}}{f_{\text{moy}}} = \frac{15,15 - 13,75}{14,45} \simeq 0,1$ . On note qu'on a bien  $\varepsilon \ll 1$ .

II.A.4. (a) C'est le cours sur le puits infini de largeur  $D$  :  $E_z = \frac{n_z^2 \hbar^2 \pi^2}{2m^* D^2}$  où  $n_z \in \mathbb{N}^*$ .

(b) On pourra considérer que le mvt de l'électron selon  $z$  est « gelé » si  $|E_{z,2} - E_{z,1}| \gg \hbar\omega$  soit  $D \ll \sqrt{\frac{3}{2}} \pi \sqrt{\frac{\hbar}{m^* \omega}}$  (voir paragraphe B ci-après pour la justification).

(c) L'inégalité ci dessus se réécrit  $D \ll \pi \sqrt{3} \Delta x$  alors que sur la figure on a  $\Delta z \sim \Delta x$  donc l'échelle verticale a été dilatée.

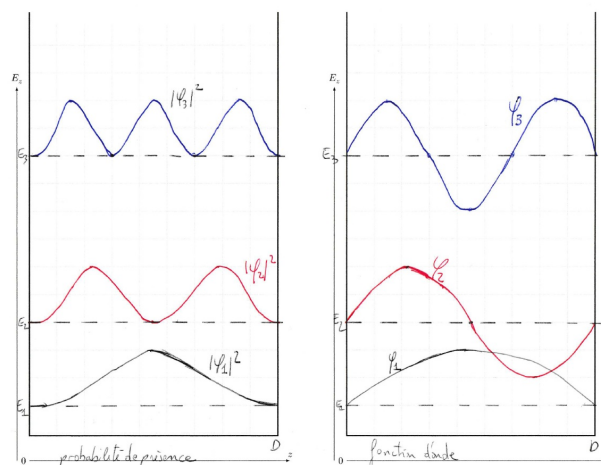
(d) cf. cours, avec la condition de normalisation ( $z \in [0; D]$ ),  $\varphi_n(z) = \sqrt{\frac{2}{D}} \sin\left(\frac{n\pi z}{D}\right)$ .

(e) Dans les deux cas les états stationnaires correspondent à  $D = n \frac{\lambda}{2}$  mais la corde de Melde correspond à une onde mécanique classique alors que le puits quantique est justement quantique avec des aspects à la fois ondulatoires et corpusculaires où  $|\varphi|^2$  est une probabilité de présence; pour le puits quantique l'énergie est quantifiée, contrairement à la corde de Melde où elle ne l'est pas.

(f) Voir tracés ci-contre.

La fonction d'onde  $\varphi_n$  et la probabilité de présence  $|\varphi_n|^2$  s'annulent sur les bords, et présentent  $n$  maxima (ventres) entre 0 et  $D$  et  $n - 1$  annulations (nœuds) à l'intérieur.

(g) Pour les énergies élevées, la distance entre les nœuds et les ventres devient très faible : on tend vers une probabilité de présence uniforme qui est le comportement classique attendu.



## II.B OHQ en équilibre thermique

II.B.1.  $P_n = \frac{1}{Z} e^{-\frac{E_n}{k_B T}}$  où  $Z = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\frac{E_n}{k_B T}} = e^{-\frac{E_0}{k_B T}} \sum_{n=0}^{+\infty} \left( e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}} \right)^n = \frac{e^{-\frac{\hbar\omega}{2k_B T}}}{1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}}} = \frac{1}{2 \operatorname{sh} \frac{\hbar\omega}{2k_B T}}$  est la fonction de partition.

II.B.2.  $r = \frac{P_{n+1}}{P_n} = e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}} < 1$ .

Si  $\hbar\omega \ll k_B T$  alors l'agitation thermique domine et  $P_{n+1} \simeq P_n$ ; les états sont sensiblement équiprobables.

Si  $\hbar\omega \gg k_B T$  alors  $P_{n+1} \ll P_n$ . On peut dire que l'OHQ est « gelé » dans son état fondamental où se trouvent l'immense majorité des particules.

II.B.3.  $\langle E \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n E_n$ . On pose  $\beta = \frac{1}{k_B T}$  et on constate que  $\langle E \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{n=0}^{+\infty} E_n e^{-\beta E_n} = -\frac{1}{Z} \frac{dZ}{d\beta}$ .

Du calcul de  $Z$  au 1) on déduit  $\langle E \rangle = \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1} = \frac{\hbar\omega}{2 \tanh\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right)}$

II.B.4. On déduit que pour l'OHQ en équilibre thermique :

- Si  $\hbar\omega \ll k_B T$  alors  $\tanh\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right) \simeq \frac{\hbar\omega}{2k_B T}$  et  $\langle E \rangle = k_B T$ ; on retrouve le résultat classique correspondant au théorème d'équipartition de l'énergie : 2 degrés de liberté (DL) quadratiques et  $\frac{k_B T}{2}$  par DL quadratique classique.

- Si  $\hbar\omega \gg k_B T$ , l'OHQ est « gelé » dans son état fondamental et  $\langle E \rangle = E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$  (ok car  $\tanh u \rightarrow 1$  si  $u \rightarrow +\infty$ ).

La courbe en trait plein correspond donc à l'OHQ et celle en pointillés à l'OH classique.

## 2 Les bouées houlographiques *Waverider* (d'après CCS - MP - 2022)

### I Prévention de la corrosion

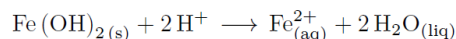
#### I.A Thermodynamique de la corrosion du fer

- Q1. — Caractère oxydant ou réducteur :** On sait que la somme des nombres d'oxydation est égale à la charge de l'ion ou de la molécule. Le nombre d'oxydation du fer dans  $\text{Fe}_{(s)}$  est donc  $\boxed{0}$ , il est de  $\boxed{+II}$  dans  $\text{Fe}_{(aq)}^{2+}$  et de  $\boxed{+III}$  dans  $\text{Fe}_{(aq)}^{3+}$ . Dans  $\text{Fe}(\text{OH})_{2(s)}$  :

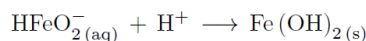
$$\text{n.o.}(\text{Fe}) + 2 \times \text{n.o.}(\text{O}) + 2 \times \text{n.o.}(\text{H}) = 0$$

le nombre d'oxydation de l'oxygène est -II et celui de l'hydrogène est +I donc celui du fer est  $\boxed{+II}$ . Par le même raisonnement, le nombre d'oxydation du fer dans  $\text{FeOOH}_{(s)}$  est  $\boxed{+III}$ , dans  $\text{HFeO}_2^-_{(aq)}$ , il est de  $\boxed{+II}$ .

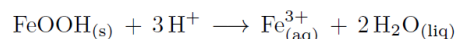
- **Caractère acido-basique :** On remarque que  $\text{Fe}(\text{OH})_{2(s)}$  peut être vu comme basique par rapport à  $\text{Fe}_{(aq)}^{2+}$  :



et acide par rapport à  $\text{HFeO}_2^-_{(aq)}$  :



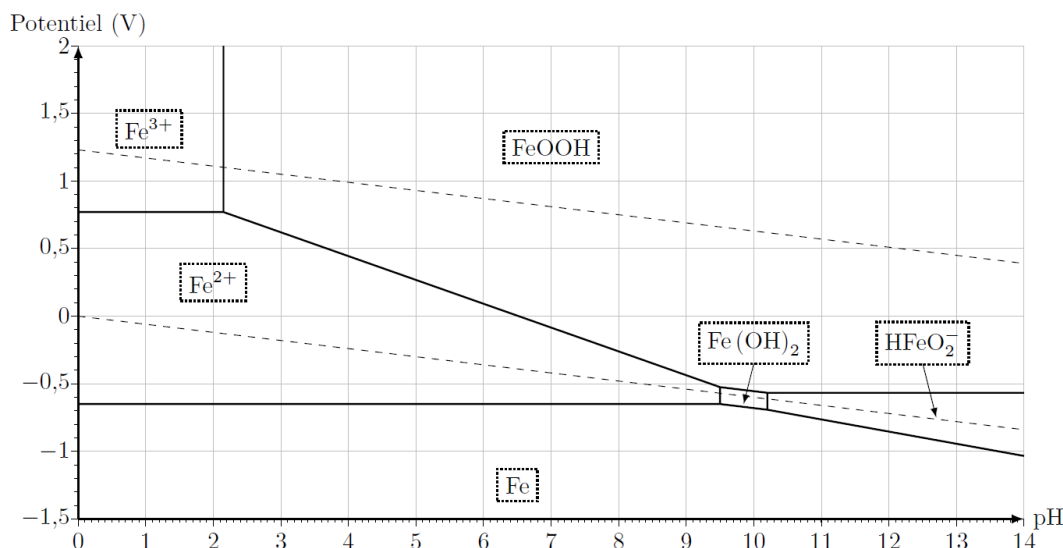
De même  $\text{FeOOH}_{(s)}$  est basique par rapport à  $\text{Fe}_{(aq)}^{3+}$  :



- **Conclusion :**

- À bas potentiel, on trouvera  $\text{Fe}_{(s)}$  ; puis  $\text{Fe}_{(aq)}^{2+}$ ,  $\text{Fe}(\text{OH})_{2(s)}$  et  $\text{HFeO}_2^-_{(aq)}$  et enfin à haut potentiel,  $\text{Fe}_{(aq)}^{3+}$  et  $\text{FeOOH}_{(s)}$ .
- À bas pH, on trouvera  $\text{Fe}_{(aq)}^{2+}$  puis à pH intermédiaire  $\text{Fe}(\text{OH})_{2(s)}$  et enfin  $\text{HFeO}_2^-_{(aq)}$ . De même on retrouve  $\text{Fe}_{(aq)}^{3+}$  à bas pH et  $\text{FeOOH}_{(s)}$  à haut pH.

D'où le placement des espèces sur le diagramme.



**Q2.** On doit considérer le couple  $\text{Fe}_{(\text{aq})}^{2+}/\text{Fe}_{(\text{s})}$  donc la frontière entre les deux espèces. La formule de Nerst est :

$$E = E^0 (\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}) + \frac{0,06}{2} \log ([\text{Fe}^{2+}])$$

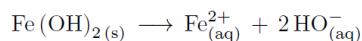
À la frontière entre le domaine du fer solide ( $\text{Fe}_{(\text{s})}$ ) et celui de l'ion fer II en solution ( $\text{Fe}_{(\text{aq})}^{2+}$ ) :

$$[\text{Fe}^{2+}] = C_{\text{tra}} \quad \text{et on lit} \quad E_{\text{frontière}} = -0,65 \text{ V}$$

Donc :

$$E^0 (\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}) = -0,65 - 0,03 \times (-6) = -0,47 \text{ V}$$

Le produit de solubilité est la constante de la réaction de dissolution :



Soit :

$$K_s = [\text{Fe}^{2+}] \times [\text{HO}^{-}]^2$$

À la frontière entre le domaine d'existence du solide ( $\text{Fe}(\text{OH})_{2(\text{s})}$ ) et celui de l'ion fer (II) en solution ( $\text{Fe}_{(\text{aq})}^{2+}$ ) :

$$[\text{Fe}^{2+}] = C_{\text{tra}} \quad (\text{définition de la convention de tracé})$$

Nous relevons aussi graphiquement :

$$\text{pH}_{\text{fr}} = 9,5$$

Donc :

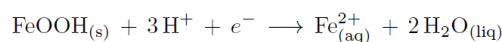
$$[\text{HO}^{-}]_{\text{fr}} = 10^{-14+9,5} = 10^{-4,5} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

Ainsi :

$$K_s = 10^{-6} \times (10^{-4,5})^2$$

$$K_s = 10^{-15}$$

**Q3.** On écrit la demi-équation du couple  $\text{FeOOH}_{(\text{s})}/\text{Fe}_{(\text{aq})}^{2+}$  :



La formule de Nerst correspondante est :

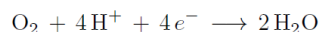
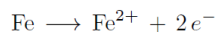
$$E = E^0 (\text{FeOOH}/\text{Fe}^{2+}) + \frac{0,06}{1} \log \left( \frac{[\text{H}^{+}]^3}{[\text{Fe}^{2+}]} \right)$$

À la frontière entre le domaine du solide et de celui de l'ion en solution ( $\text{Fe}_{(\text{aq})}^{2+}$ ) :  $[\text{Fe}^{2+}] = C_{\text{tra}}$ . Ainsi :

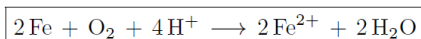
$$E_{\text{fr}} = E^0 (\text{FeOOH}/\text{Fe}^{2+}) - 0,18 \text{ pH} - 0,06 \log (C_{\text{tra}})$$

$$\text{La pente de la frontière séparant } \text{FeOOH}_{(\text{s})} \text{ et } \text{Fe}_{(\text{aq})}^{2+} \text{ est } -0,18 \text{ V.}$$

**Q4.** Le dioxygène et le fer n'ont pas de domaine commun : le fer solide est oxydé (en  $\text{Fe}^{2+}$  à pH 7) et le dioxygène est réduit en eau.

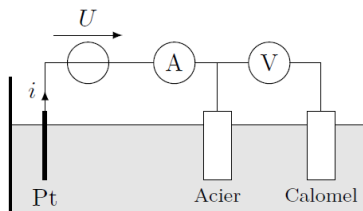


Le bilan est :

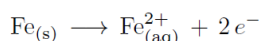


### I.B Cinétique de la corrosion de l'acier

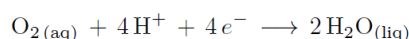
**Q5.** Schéma : une tension est imposée entre l'électrode de platine et l'acier, un courant circule; tandis que l'on mesure la tension entre l'acier et l'électrode au calomel saturé.



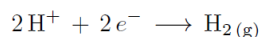
**Q6.** — La zone (a) pour  $i > 0$  correspond à l'oxydation du fer solide en  $\text{Fe}^{2+}$  (car à  $\text{pH} = 8,2$ , c'est l'ion  $\text{Fe}^{2+}$  qui prédomine).



— Le premier plateau (b) observé pour  $i < 0$  et proche de 0 correspond à la réduction du dioxygène en eau. Le plateau est un palier de diffusion de l'oxygène dissout.



— Le mur du solvant (c) observé pour  $i < 0$  ( $\Delta E \approx -0,95\text{ V}$ ) correspond à la réduction de l'eau en dihydrogène gazeux.



**Q7.** En prolongeant le mur du solvant jusqu'à l'axe des abscisses, on relève  $\Delta E \approx -0,94\text{ V}$  pour un courant nul. Soit, comme  $E_{\text{calomel}} = 0,25\text{ V}$  :

$$E_{\text{acier}} = -0,69\text{ V}$$

or le potentiel de Nernst de ce couple est :

$$E_{\text{Nernst}} = -0,06\text{ pH} = -0,06 \times 8,2 = -0,49\text{ V}$$

On en déduit la valeur de la surtension cathodique :

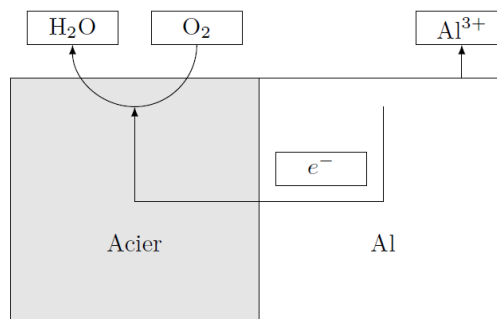
$$\boxed{\eta_C = -0,20\text{ V}}$$

**Q8.** Il correspond au plateau à vitesse nulle, et à la zone linéaire lorsque la vitesse du courant d'eau est non nulle.

**Q9.** Le renouvellement du dioxygène dissout par le mouvement de fluide fait que la diffusion n'a à se faire sur une zone de plus en plus réduite au fur et à mesure que la vitesse du fluide augmente, et devient ainsi de moins en moins limitante.

### I.C Protection par anode sacrificielle

**Q10.** Schéma complété :



**Q11.** On repère le potentiel mixte correspondant à la courbe d'oxydation de l'aluminium et à la réduction des ions fer. Les courants se compensent pour  $\Delta E \approx -0,75\text{ V}$  et on relève :

$$\boxed{j_{\text{corr}} = 1,5 \times 10^{-5}\text{ A} \cdot \text{cm}^{-2} = 1,5 \times 10^{-1}\text{ A} \cdot \text{m}^{-2}}$$

**Q12.** À cette densité de courant est associé un courant  $j_{\text{corr}}S = j_{\text{corr}}\pi d^2$  soit, sur un intervalle de temps  $\Delta t$ , une quantité de matière d'électrons égale à :

$$n_{e^{-}} = \frac{j_{\text{corr}}\pi d^2 \Delta t}{\mathcal{F}}$$

La quantité de matière d'aluminium est  $n_{e^-}/3$  donc la masse d'aluminium est :

$$\Delta m_{\text{Al}} = \frac{j_{\text{corr}} \pi d^2 M(\text{Al}) \Delta t}{3\mathcal{F}}$$

On a  $\Delta m_{\text{Al}} = \Delta e_{\text{Al}} \pi d^2 \rho_{\text{Al}}$  ainsi :

$$\boxed{\frac{\Delta e_{\text{Al}}}{\Delta t} = \frac{j_{\text{corr}} M(\text{Al})}{3\mathcal{F} \rho_{\text{Al}}} = 5,14 \times 10^{-12} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$$

Soit pendant 1 an, une épaisseur de  $1,62 \times 10^{-4} \text{ m} = 0,162 \text{ mm}$ .

**Q13.** La valeur obtenue sur trois ans (environ 0,5 mm) semble assez éloignée de l'épaisseur de la pièce...



### 3 Centres de données (d'après CCS - MP - 2022)

Q 1. Énoncer la loi de Fourier relative au vecteur densité de flux thermique  $\vec{j}_Q$  qui caractérise le phénomène de conduction thermique le long de l'axe de l'ailette.

$$\vec{j}_Q = -\lambda \vec{\text{grad}}(T)$$

Q 2. En réalisant un bilan de puissance thermique sur une tranche de longueur  $dx$  de l'ailette, montrer que la température suit l'équation différentielle

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{1}{\delta^2} T = -\frac{1}{\delta^2} T_a \quad \text{avec} \quad \delta = \sqrt{\frac{\lambda a}{2h}} \quad (1.1)$$

soit  $\Sigma$  la portion d'ailette entre  $x$  et  $x+dx$



1<sup>er</sup> principe sur  $\Sigma$  entre  $t$  et  $t+dt$ , en régime permanent :

$$d(\delta Q) = \delta Q + \delta W = \delta Q(x) - \delta Q(x+dx) - \delta Q_{\text{lat}}$$

*0 en régime permanent* (pointing to  $d(\delta Q)$ )  
*0 car transformation isotherme* (pointing to  $\delta W$ )

$$d'au' \quad \phi_{\text{re}}(x) dt - \phi_{\text{re}}(x+dx) dt - \phi_{\text{lat}} dt = 0$$

$$j_Q(x) S dt - j_Q(x+dx) S dt - h(T(x) - T_a) S_{\text{lat}} dt = 0$$

*2T\_a dx* (pointing to  $S_{\text{lat}}$ )  
*surface latérale de  $\Sigma$*

$$- \frac{dj_Q}{dx} dx \pi a^2 - 2T_a dx h (T(x) - T_a) = 0$$

*d'au'  $\vec{j}_Q = -\lambda \frac{dT}{dx}$  en* (pointing to  $\frac{dj_Q}{dx}$ )  
*surface latérale de  $\Sigma$*  (pointing to  $2T_a dx$ )

$$\lambda \frac{dT}{dx^2} a - 2h (T(x) - T_a) = 0$$

$$\frac{dT}{dx^2} - \left( \frac{2h}{\lambda a} \right) T = -\frac{2h}{\lambda a} T_a$$

*1/\delta^2* (pointing to  $\frac{2h}{\lambda a}$ )

Q 3. Vérifier l'homogénéité de l'expression du paramètre  $\delta$  introduit dans la question précédente. Estimer sa valeur numérique dans le cas d'une ailette en silicium de rayon  $a = 1$  mm.

• d'une part, on déduit de  $\frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{T}{\delta^2} = -\frac{T_a}{\delta^2}$

$$\text{que} \quad \left[ \frac{d^2 T}{dx^2} \right] = \left[ \frac{T}{\delta^2} \right]$$

*dimension* //

$$\frac{\text{W}}{\text{L}^2} = \frac{\text{W}}{[\delta]^2} \quad \text{d'au' } \quad [\delta] = \text{L}$$

• d'autre part,  $[\delta] = \sqrt{\frac{[da]}{[2h]}}$

ou  $[\lambda] = \frac{[j_{\text{air}}]}{[g \cdot T]} = \frac{[j_{\text{air}}]}{\text{W} \cdot \text{L}^{-1}}$

$[h] = \frac{[j_{\text{air}}]}{\text{W}}$  car  $j_{\text{air}, \text{tot}} = h(T(x) - T_a)$

donc  $\frac{[\lambda]}{[h]} = L$  d'où  $\frac{[da]}{[2h]} = L^2$  et d'où

$[\delta] = L$

AN  $\delta = 2 \text{ cm}$  pour  $h = "h_c"$  (air cohérent)  
 (NB)  $\delta = 1,6 \text{ cm}$  avec 2,65 renouvelé en présence de ventilateurs

Q 4. Expliciter les conditions aux limites que doit vérifier le champ de température  $T(x)$  en  $x = 0$  et en  $x = b$ .

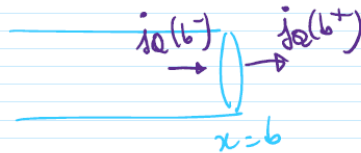
en  $x = 0$ , le contact parfait impose  $T(x=0) = T_d$

en  $x = b$ , l'énoncé est moins explicite sur la modélisation retenue.

• de plus, au regard de "Figure 2" plus bas,  $T(x=b)$  ne semble pas être imposée à  $T_a$  (car on voit que  $T(x=b)$  dépend de  $b/\delta$ ).

→ pas de "contact parfait" entre l'ailette et l'air en  $x=b$

→ utilisons alors la continuité du flux thermique:



car le matériau / dans l'air à  
 → loi de Fourier / ↓ d'interface  
 $j_q(b^-) = j_q(b^+) \Rightarrow$  loi de Newton

$-\lambda \frac{dT}{dx} \Big|_{x=b^-} = h(T(x=b) - T_a)$

Q 5. En précisant les approximations effectuées, obtenir une expression analytique approchée de  $T(x)$  dans le cas où  $b \gg \delta$ . Vérifier la cohérence de cette expression avec la figure 2.

$\delta =$  "distance caractéristique d'atténuation de la température"

si  $b \gg \delta$  alors  $T(x)$  ne varie quasiment plus au voisinage de  $x = b$

d'où  $j_q(x=b^-) = -\lambda \frac{dT}{dx} \Big|_{x=b^-} \rightarrow 0$

d'où  $h(T(x=b) - T_a) \rightarrow 0$

d'où  $T(x=b) = T_a$  si  $b \gg \delta$

Revenons dans le problème :  $\frac{dT}{dx} - \frac{T}{\delta^2} = -\frac{T_a}{\delta^2}$  avec  $\begin{cases} T(0) = T_d \\ T(b) = T_a \end{cases}$

•  $\frac{dT}{dx} - \frac{T}{\delta^2} = 0$  équation homogène associée  
 • équation caractéristique  $r^2 - \frac{1}{\delta^2} = 0$   
 soit  $r = \pm \frac{1}{\delta}$   
 • donc  $T_{HOM} = A e^{-x/\delta} + B e^{x/\delta}$

solution particulière recherchée  $\rightarrow$  forme de cette (car 2<sup>nd</sup> membre est)  
 $\frac{dT_{PART}}{dx^2} - \frac{T_{PART}}{\delta^2} = -\frac{T_a}{\delta^2}$   
 donc  $T_{PART} = T_a$

donc  $T = T_{HOM} + T_{PART} = A e^{-x/\delta} + B e^{x/\delta} + T_a$

$\begin{cases} T(x=0) = A + B + T_a = T_d & \text{condition limite} \\ T(x=b) = A e^{-b/\delta} + B e^{b/\delta} + T_a \approx B e^{b/\delta} + T_a = T_a & b/\delta \gg 1 \end{cases}$

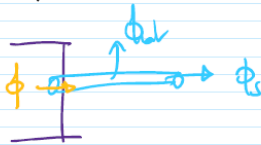
d'où  $B=0$  et  $A = T_d - T_a$

d'où :  $T(x) = (T_d - T_a) e^{-x/\delta} + T_a$

d'où  $\frac{T(x) - T_a}{T_d - T_a} = e^{-x/\delta}$  ; qui semble coïncider avec le tracé de la figure 2 pour  $b/\delta = 10$ .

Q 6. La figure 3 donne une représentation graphique de l'évolution de la résistance thermique d'une ailette cylindrique en fonction du rapport  $b/\delta$ , pour différents matériaux. Interpréter physiquement l'existence d'une valeur asymptotique de  $R_{th}$ , commune aux différents matériaux lorsque  $b \ll \delta$  ; justifier sa valeur numérique.

si  $b \ll \delta$ , on voit d'après la figure 2 (pour  $b/\delta = 0,1$ ) que  $T$  est uniforme dans la base. Autrement dit le transfert thermique latéral est négligeable devant le transfert thermique à l'extrémité de l'ailette



(car  $\delta$  est la distance caractéristique d'atténuation de  $T$ , due au flux latéral, i.e.  $b \ll \delta$  : le flux latéral impacte peu le champ de  $T$ )

d'où  $\phi = \phi_{lat} + \phi_b \approx \phi_b = hS (T(x=b) - T_a) \approx hS (T_d - T_a)$

$\uparrow$   $T_a$   $\uparrow$   $T(x)$  uniforme si  $b \ll \delta$

D'où  $R_{th} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{T_d - T_a}{\phi} = \frac{1}{h_s}$

$\phi = \mathcal{P}$

$\pi a^2$   $T(x)$  uniforme si  $b \ll \delta$

si la me dépend peu de la nature du métal / semi-conducteur (Si); ce que semblent suggérer les données à la fin de l'enoncé, alors on

AV avec unilatérale ( $h = "h_s"$ )

$R_{th} = \frac{1}{h_s \pi a^2} = 1 \cdot 10^3 \text{ K.W}^{-1}$

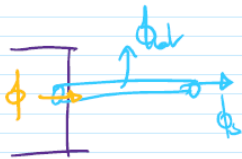
on retrouve la valeur du graphique.

a bien  $R_{th}$  indépendant du matériau lorsque  $b \ll \delta$

Q 7. Retrouver, par le calcul, la valeur asymptotique de la résistance thermique  $R_{th}$  de l'ailette en silicium dans le cas où  $b \gg \delta$ .

si  $b \gg \delta$ , on a  $T(x) = (T_d - T_a) e^{-x/\delta} + T_a$

à  $\phi = \phi(x=0) = -\lambda \frac{dT}{dx} \Big|_{x=0} = \frac{\lambda}{\delta} (T_d - T_a) S$



loi de Fourier

D'où  $R_{th} = \frac{\delta}{\lambda S} = 0,03 \cdot 10^3 \text{ K.W}^{-1}$

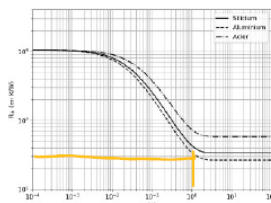
cohérent avec figure 3 quand  $b \gg \delta$   
 $= 3,4 \cdot 10^1 \text{ K.W}^{-1}$  avec 2CS.

Q 8. En pratique, les ailettes sont réalisées en aluminium et leur longueur est fixée à  $b = 2 \text{ cm}$ . En vous appuyant sur la figure 3, justifier ces choix, puis estimer le nombre d'ailettes (de rayon  $a = 1 \text{ mm}$ ) à associer à un microprocesseur dissipant une puissance thermique de  $200 \text{ W}$  pour que la température de ce dernier n'exécède par  $60^\circ\text{C}$  en régime stationnaire de fonctionnement. Commenter.

Pour l'Aluminium, on trouve  $\delta = 2 \text{ cm}$

et donc  $\frac{b}{\delta} = 1$

La figure 3 nous indique alors que



$R_{th} \approx 3,4 \text{ K/W} = \frac{T_d - T_a}{\mathcal{P}}$

où  $\mathcal{P}$  est la puissance évacuée par 1 ailette.

Eni, avec  $N$  ailettes et une puissance totale à évacuer

$\mathcal{P}_{tot} = 200 \text{ W}$ ; on a

$\mathcal{P}_{tot} = N \mathcal{P} = N \cdot \frac{T_d - T_a}{R_{th}}$

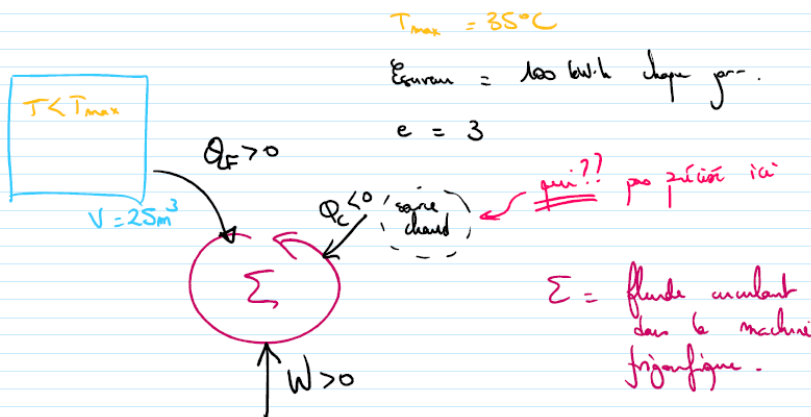
Si  $T_d < 60^\circ\text{C}$ , et en supposant  $T_a = 20^\circ\text{C}$

$$n = \frac{P_{\text{ref}} R_{\text{th}}}{T_d - T_a} > \frac{200 \times 30}{40} = 150$$

150 ailettes paraissent nécessaires, ce qui semble être. Mais leur rayon étant de 1mm, c'est envisageable -

*NB je suis obligé de mettre 3 CS ici alors que depuis le début, on a = 1mm je travaillais avec 1 CS. On pourrait travailler avec 265 depuis le début non, ce qui serait un meilleur compromis ...*

Q 9. La solution première de refroidissement de la salle repose sur l'utilisation d'un système de conditionnement d'air (parfois désigné « climatiseur » par abus de langage). Estimer le coût annuel, en euros, de cette solution en considérant que le système de conditionnement d'air fonctionne en permanence et que son efficacité — ou COP (Coefficient de Performance) — est égale à 3.



La pièce constitue donc ici la source froide de la machine frigorifique représentée ci-dessus.

Par définition  $e = \frac{Q_F}{W}$

Sur une année  $W^{an} = \frac{Q_F^{an}}{e} = \frac{365 \times E_{salle}/\text{jour}}{e}$  en faisant l'hypothèse qu'il faut évacuer toute l'énergie thermique apportée par les sources (de sorte que la température de la pièce reste constante).

Soit un coût annuel  $ca = p \times W^{an} = 0,17 \times \frac{365}{3} \times 100 \text{ €}$

*price kWh en kWh*

**ca = 2,1 k€**

Q 10. L'air de la pièce est modélisé par un gaz parfait diatomique, à la pression atmosphérique et à la température  $T_{\text{max}}$ . Exprimer, puis évaluer numériquement, la masse volumique  $\rho_{\text{air}}$  de l'air dans ces conditions. En déduire le débit de masse d'air  $D_m$ , en  $\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}$ , brassé par le ventilateur dans ces mêmes conditions.

loi des gaz parfait :  $PV = nRT = \frac{m}{M} RT$

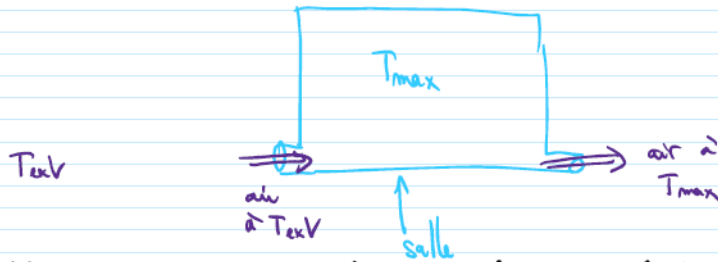
Dans  $\rho_{air} = \frac{m}{V} = \frac{PM}{RT} \Rightarrow M = 0,2 M_{O_2} + 0,8 M_{N_2} = 29 \text{ g/mol}$

d'où  $\rho_{air} = \frac{1,0135 + 29 \cdot 10^3}{8,31 \cdot (273+25)} \text{ kg/m}^3 = 1,1 \text{ kg/m}^3$

De plus  $\dot{D}_m = \rho_{air} \dot{D}_v = 0,94 \cdot 10^3 \text{ kg/h} = 0,26 \text{ kg/s}$

Q 11. À l'aide d'un modèle simple, estimer la période de l'année sur laquelle le système de free-cooling est fonctionnel. En déduire le gain annuel en euros obtenu grâce à l'installation du système de free-cooling dans cette salle informatique.

Modélisons le système "free-cooling" par de l'air à la température  $T_{ext}$  entrant dans la salle (température  $T_{max}$ ) et sortant à la température  $T_{max}$  :



Le 1<sup>er</sup> principe appliqué sur l'air circulant donne

$\dot{D}_m (\Delta h + \Delta e + \Delta q) = \dot{P}_R + \dot{P}_{utile}$

$\Delta h$  : néglige si  $S_e = S_s$  (séchou en entrée et sortie)  
 $\Delta e$  : néglige si altitude entrée et altitude sortie  
 $\Delta q$  : néglige en l'absence de puces microélectroniques autres que la pompe.  
 Conversion  $\dot{D}_m$  en RP

d'où  $\dot{D}_m c_p (T_{max} - T_{ext}) = \dot{P}_R$

corrs physique climatique :  
 → chaque degré de liberté quadratique (5 par atome) compte pour  $R/2$  dans  $Cv, molaire$

$\Rightarrow Cv, m = \frac{5R}{2}$

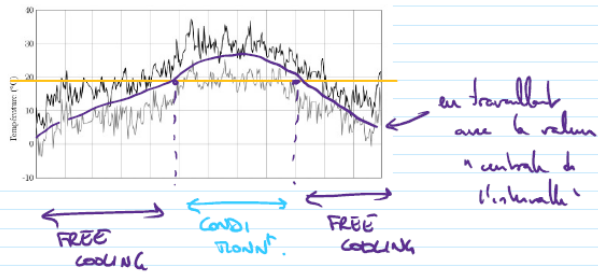
puissance thermique captée par l'air ... et donc évacuée par le free cooling.

$\Rightarrow q = \frac{7}{241} R$  (maximale)  $= 1,0 \cdot 10^3 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$

or  $P_{th} = \frac{100 \text{ kW} \cdot \text{h}}{24 \text{ h}} = 4,2 \text{ kW}$  à évaluer. ( $\Rightarrow \exists$  dans hypothèse Puissance réfrigérante ok)

d'où  $T_{max} - T_{air}$  doit être supérieur à  $\frac{P_{th}}{Dm \cdot q} = 16^\circ\text{C}$ .

soit  $T_{air} < 13^\circ\text{C}$



Donc pendant 8 mois : free cooling       $\text{cout} = p + P_v + \Delta t = 0,17 + 0,06 + 8 \times 30$   
 4 mois : conditionnement       $\text{cout} = \frac{2,1 \cdot 10^3}{3} = 700$   
 $= 59 \text{ €}$

soit  $\text{cout} = 0,8 \text{ k€}$

donc  $\frac{\text{cout (avec free cooling)}}{\text{cout (sans free cooling)}} = 0,4$  : ça vaut le coup.

gain en euros  $\approx 1 \text{ k€}$