

Correction - DS n°8bis (CCS-Mines)
Thermodynamique - Courbes intensité-potentiel - Mécanique quantique
(Samedi 8 avril 2023 – Durée 4 h)

1 Centrale - MP - 2016

II Confinement d'objets quantiques

II.A Confinement dans une boîte quantique

- II.A.1. (a) Confinement au voisinage d'un minimum de potentiel : oscillateur harmonique
 $E_m = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2x^2 = \text{cte}$ d'où en dérivant par rapport au temps $\ddot{x} + \omega^2x = 0$; conversion d'énergie cinétique en énergie potentielle et réciproquement.

Circuit électrique LC : $E = \frac{q^2}{2C} + \frac{1}{2}L i^2 = \text{cte}$ où $i = \frac{dq}{dt}$; $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$; mêmes calculs (analogie méca-élec) ; conversion d'énergie électrique stockée dans le condensateur en énergie magnétique stockée dans la bobine et réciproquement.

(b) $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) + V(x) \psi(x, t)$ où $\rho = |\psi|^2$ est la densité de probabilité de présence, c'est à dire que la probabilité dP de se trouver entre x et $x + dx$ à t est $dP = |\psi(x, t)|^2 dx$.

(c) $g(t) = e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$ où E est l'énergie de cet état. Cet état est stationnaire car la densité de probabilité de présence $\rho = |\psi|^2$ est bien indépendante du temps.

(d) C'est un état lié et la fonction d'onde doit être normalisée : $\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi|^2(x) dx = 1$.

(e) $\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x |\psi|^2(x) dx = 0$ (imparité de la fonction ou changement de variable $x \rightarrow -x$). Avec le formulaire on a directement l'extension caractéristique $\Delta x = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\hbar}{m^* \omega}} = 3,0 \text{ nm}$.

(f) $\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2} \Rightarrow \Delta p_x \geq \sqrt{\frac{m^* \hbar \omega}{2}}$. Et $\langle p_x \rangle = 0$ donc $\langle p_x^2 \rangle = (\Delta p_x)^2 \geq \frac{m^* \hbar \omega}{2}$ d'où $E = \left\langle \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2} m^* \omega^2 x^2 \right\rangle \geq \frac{\hbar \omega}{2}$. Pour l'OHQ le minimum est atteint et $E_0 = \frac{\hbar \omega}{2}$.

Contrairement au cas classique cette énergie minimale n'est pas nulle mais strictement positive. Cette énergie minimale est directement liée au confinement au travers de ω et de la relation d'incertitude de Heisenberg (c.f. calcul ci-dessus).

(g) On a toujours $g(t) = e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$ et en injectant la solution à variables séparées $\psi(x, y, t) = \varphi(x)\chi(y)e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$ dans l'équation de Schrödinger bidimensionnelle $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \underbrace{\Delta \psi}_{\text{laplacien}} + V(x, y) \psi$ on a

$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \chi + \varphi \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} \right) + (V(x) + V(y)) \varphi \chi = E \varphi \chi$; on divise par $\varphi(x) \chi(y)$ et on sépare les variables pour obtenir $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\varphi(x)} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) + V(x) = E + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\chi(y)} \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} \right) - V(y) = \text{cte}$ puisque le terme de gauche ne dépend que de x et celui de droite que de y .

Ainsi $\varphi(x)$ est solution de l'équation de Schrödinger stationnaire 1D pour le potentiel harmonique V d'où une énergie $E_x = \left(n_x + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega$ et de même pour $\chi(y)$ avec une énergie $E_y = \left(n_y + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega$. En réinjectant dans l'égalité précédente on en déduit que $E = E_x + E_y = (n_x + n_y + 1) \hbar \omega$ avec n_x et n_y entiers positifs.

(h) On obtient $E_n^{2D} = (n + 1) \hbar \omega$ où n entier positif de dégénérescence $g_n^{2D} = n + 1$ (nombre de paires d'entiers positifs n_x et n_y tels que $n_x + n_y = n$). Le fondamental d'énergie $E_0^{2D} = \hbar \omega$ est non dégénéré.

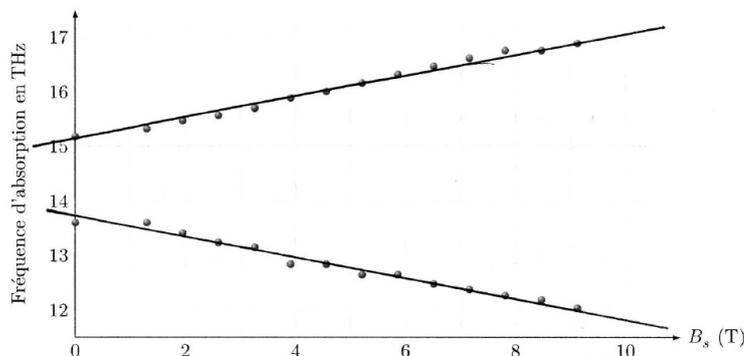
II.A.2. (a) On peut citer les diodes laser qui émettent principalement dans l'infrarouge.

(b) On éclaire l'échantillon par une source de fréquence réglable (IR/visible/UV) et on mesure l'absorbance en fonction de la fréquence ; des pics de résonance se présentent à certaines pulsations de résonance $\omega_{n,p}$ liée aux niveaux d'énergie par $\hbar \omega_{n,p} = E_n - E_p$.

(c) $\omega_c = \frac{eB_s}{m^*} < \frac{\omega}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow B_s < B_{\max} = \frac{m^* \omega}{e\sqrt{2}} = 25,6 \text{ T ok!}$

(d) $k_B T \sim 10^{-22} \text{ J} \ll \hbar \omega \sim 10^{-20} \text{ J}$ donc l'agitation thermique est négligeable et la – quasi – totalité des électrons se trouve dans l'état fondamental d'énergie E'_0 qui est donc le seul à contribuer à l'absorbance.

(e) On effectue une modélisation linéaire très satisfaisante des courbes $f_{\text{abs}}(B_s)$.



Interprétation : on a $B_s < 9 \text{ T} \sim \frac{B_{\text{max}}}{3}$ donc $\frac{\omega_c^2}{4} < \frac{\omega^2}{3^2 * 4 * 2} \ll \omega^2$; on peut donc considérer que $\Omega \simeq \omega$.

Les fréquences d'absorption s'expriment alors $f_1 = \frac{E_- - E'_0}{h} \simeq \frac{\omega}{2\pi} - \frac{e}{4\pi m^*} B_s$ et $f_2 = \frac{E_+ - E'_0}{h} \simeq \frac{\omega}{2\pi} + \frac{e}{4\pi m^*} B_s$.

Cela correspond bien aux variations affines symétriques observées.

Aspect quantitatif : pente mesurée $\pm 2,0 \cdot 10^{11} \text{ Hz} \cdot \text{T}^{-1}$ pour une pente théorique $\pm \frac{e}{4\pi m^*} = \pm 2,0 \cdot 10^{11} \text{ Hz} \cdot \text{T}^{-1}$; l'accord est excellent !

Il y a par contre un problème car les deux droites devraient se croiser sur l'axe des ordonnées à $\frac{\omega}{2\pi} = 14,5 \text{ THz}$ ce qui n'est pas le cas (la question suivante va apporter l'explication).

II.A.3. On se place à $B = 0$ et l'anisotropie lève la dégénérescence sur le premier niveau excité $E'_1 = 2\hbar\omega$:

en effet on a $E_x = \left(n_x + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)$ (DL au premier ordre en ε), $E_y = \left(n_y + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)$ et $E = E_x + E_y$.

Le fondamental $(n_x, n_y) = (0, 0)$ est d'énergie inchangée $\hbar\omega$ mais les couples $(1, 0)$ et $(0, 1)$ correspondent désormais à des niveaux d'énergie différents :

$E_{(0,1)} = \left(2 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \hbar\omega$ premier niveau excité et $E_{(1,0)} = \left(2 + \frac{\varepsilon}{2}\right) \hbar\omega$ deuxième niveau excité. C'est bien ce qui est observé à $B = 0$ sur la figure 5 avec $f_{(0,1)} = \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \frac{\omega}{2\pi} \simeq 13,75 \text{ THz}$ et $f_{(1,0)} = \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) \frac{\omega}{2\pi} \simeq 15,15 \text{ THz}$. On note que l'on a bien une moyenne de $14,45 \text{ THz}$ égale à la valeur attendue de $14,5 \text{ THz}$ aux incertitudes de lecture près.

On obtient une anisotropie $\varepsilon = \frac{f_{(1,0)} - f_{(0,1)}}{f_{\text{moy}}} = \frac{15,15 - 13,75}{14,45} \simeq 0,1$. On note qu'on a bien $\varepsilon \ll 1$.

II.A.4. (a) C'est le cours sur le puits infini de largeur D : $E_z = \frac{n_z^2 \hbar^2 \pi^2}{2m^* D^2}$ où $n_z \in \mathbb{N}^*$.

(b) On pourra considérer que le mvt de l'électron selon z est « gelé » si $|E_{z,2} - E_{z,1}| \gg \hbar\omega$ soit $D \ll \sqrt{\frac{3}{2}} \pi \sqrt{\frac{\hbar}{m^* \omega}}$ (voir paragraphe B ci-après pour la justification).

(c) L'inégalité ci dessus se réécrit $D \ll \pi \sqrt{3} \Delta x$ alors que sur la figure on a $\Delta z \sim \Delta x$ donc l'échelle verticale a été dilatée.

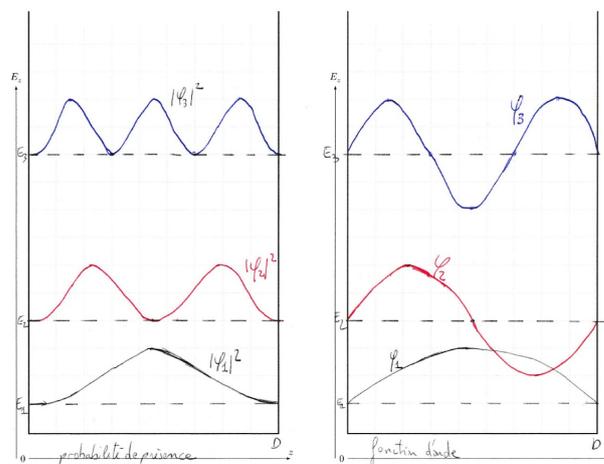
(d) cf. cours, avec la condition de normalisation ($z \in [0; D]$), $\varphi_n(z) = \sqrt{\frac{2}{D}} \sin\left(\frac{n\pi z}{D}\right)$.

(e) Dans les deux cas les états stationnaires correspondent à $D = n \frac{\lambda}{2}$ mais la corde de Melde correspond à une onde mécanique classique alors que le puits quantique est justement quantique avec des aspects à la fois ondulatoires et corpusculaires où $|\varphi|^2$ est une probabilité de présence; pour le puits quantique l'énergie est quantifiée, contrairement à la corde de Melde où elle ne l'est pas.

(f) Voir tracés ci-contre.

La fonction d'onde φ_n et la probabilité de présence $|\varphi_n|^2$ s'annulent sur les bords, et présentent n maxima (ventres) entre 0 et D et $n - 1$ annulations (nœuds) à l'intérieur.

(g) Pour les énergies élevées, la distance entre les nœuds et les ventres devient très faible : on tend vers une probabilité de présence uniforme qui est le comportement classique attendu.



II.B OHQ en équilibre thermique

II.B.1. $P_n = \frac{1}{Z} e^{-\frac{E_n}{k_B T}}$ où $Z = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\frac{E_n}{k_B T}} = e^{-\frac{E_0}{k_B T}} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}} \right)^n = \frac{e^{-\frac{\hbar\omega}{2k_B T}}}{1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}}} = \frac{1}{2 \operatorname{sh} \frac{\hbar\omega}{2k_B T}}$ est la fonction de partition.

II.B.2. $r = \frac{P_{n+1}}{P_n} = e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}} < 1$.

Si $\hbar\omega \ll k_B T$ alors l'agitation thermique domine et $P_{n+1} \simeq P_n$; les états sont sensiblement équiprobables.

Si $\hbar\omega \gg k_B T$ alors $P_{n+1} \ll P_n$. On peut dire que l'OHQ est « gelé » dans son état fondamental où se trouvent l'immense majorité des particules.

II.B.3. $\langle E \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n E_n$. On pose $\beta = \frac{1}{k_B T}$ et on constate que $\langle E \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{n=0}^{+\infty} E_n e^{-\beta E_n} = -\frac{1}{Z} \frac{dZ}{d\beta}$.

Du calcul de Z au 1) on déduit $\langle E \rangle = \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1} = \frac{\hbar\omega}{2 \tanh\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right)}$

II.B.4. On déduit que pour l'OHQ en équilibre thermique :

- Si $\hbar\omega \ll k_B T$ alors $\tanh\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right) \simeq \frac{\hbar\omega}{2k_B T}$ et $\langle E \rangle = k_B T$; on retrouve le résultat classique correspondant au théorème d'équipartition de l'énergie : 2 degrés de liberté (DL) quadratiques et $\frac{k_B T}{2}$ par DL quadratique classique.

- Si $\hbar\omega \gg k_B T$, l'OHQ est « gelé » dans son état fondamental et $\langle E \rangle = E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$ (ok car $\tanh u \rightarrow 1$ si $u \rightarrow +\infty$).

La courbe en trait plein correspond donc à l'OHQ et celle en pointillés à l'OH classique.

2 Les bouées houlographiques *Waverider* (d'après CCS - MP - 2022)

I Prévention de la corrosion

I.A Thermodynamique de la corrosion du fer

- Q1. — Caractère oxydant ou réducteur :** On sait que la somme des nombres d'oxydation est égale à la charge de l'ion ou de la molécule. Le nombre d'oxydation du fer dans $\text{Fe}_{(s)}$ est donc $\boxed{0}$, il est de $\boxed{+II}$ dans $\text{Fe}_{(aq)}^{2+}$ et de $\boxed{+III}$ dans $\text{Fe}_{(aq)}^{3+}$. Dans $\text{Fe}(\text{OH})_{2(s)}$:

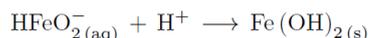
$$\text{n.o.}(\text{Fe}) + 2 \times \text{n.o.}(\text{O}) + 2 \times \text{n.o.}(\text{H}) = 0$$

le nombre d'oxydation de l'oxygène est -II et celui de l'hydrogène est +I donc celui du fer est $\boxed{+II}$. Par le même raisonnement, le nombre d'oxydation du fer dans $\text{FeOOH}_{(s)}$ est $\boxed{+III}$, dans $\text{HFeO}_2^-_{(aq)}$, il est de $\boxed{+II}$.

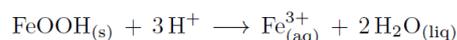
- **Caractère acido-basique :** On remarque que $\text{Fe}(\text{OH})_{2(s)}$ peut être vu comme basique par rapport à $\text{Fe}_{(aq)}^{2+}$:



et acide par rapport à $\text{HFeO}_2^-_{(aq)}$:



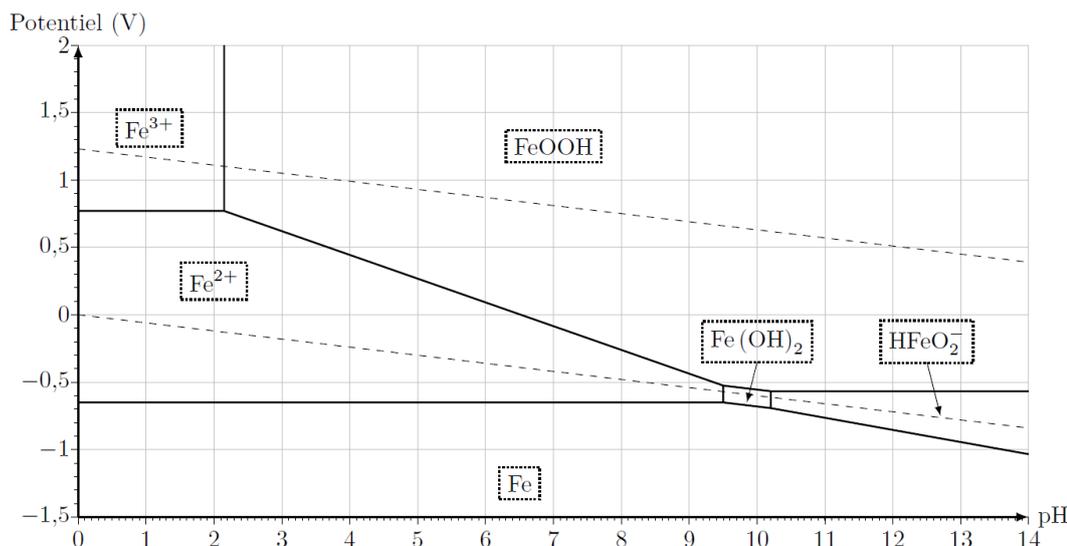
De même $\text{FeOOH}_{(s)}$ est basique par rapport à $\text{Fe}_{(aq)}^{3+}$:



— **Conclusion :**

- À bas potentiel, on trouvera $\text{Fe}_{(s)}$; puis $\text{Fe}_{(aq)}^{2+}$, $\text{Fe}(\text{OH})_{2(s)}$ et $\text{HFeO}_2^-_{(aq)}$ et enfin à haut potentiel, $\text{Fe}_{(aq)}^{3+}$ et $\text{FeOOH}_{(s)}$.
- À bas pH, on trouvera $\text{Fe}_{(aq)}^{2+}$ puis à pH intermédiaire $\text{Fe}(\text{OH})_{2(s)}$ et enfin $\text{HFeO}_2^-_{(aq)}$. De même on retrouve $\text{Fe}_{(aq)}^{3+}$ à bas pH et $\text{FeOOH}_{(s)}$ à haut pH.

D'où le placement des espèces sur le diagramme.



Q2. On doit considérer le couple $\text{Fe}_{(\text{aq})}^{2+}/\text{Fe}_{(\text{s})}$ donc la frontière entre les deux espèces. La formule de Nerst est :

$$E = E^0 (\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}) + \frac{0,06}{2} \log ([\text{Fe}^{2+}])$$

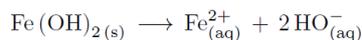
À la frontière entre le domaine du fer solide ($\text{Fe}_{(\text{s})}$) et celui de l'ion fer II en solution ($\text{Fe}_{(\text{aq})}^{2+}$) :

$$[\text{Fe}^{2+}] = C_{\text{tra}} \quad \text{et on lit} \quad E_{\text{frontière}} = -0,65 \text{ V}$$

Donc :

$$E^0 (\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}) = -0,65 - 0,03 \times (-6) = -0,47 \text{ V}$$

Le produit de solubilité est la constante de la réaction de dissolution :



Soit :

$$K_s = [\text{Fe}^{2+}] \times [\text{HO}^{-}]^2$$

À la frontière entre le domaine d'existence du solide ($\text{Fe}(\text{OH})_{2(\text{s})}$) et celui de l'ion fer (II) en solution ($\text{Fe}_{(\text{aq})}^{2+}$) :

$$[\text{Fe}^{2+}] = C_{\text{tra}} \quad (\text{définition de la convention de tracé})$$

Nous relevons aussi graphiquement :

$$\text{pH}_{\text{fr}} = 9,5$$

Donc :

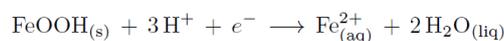
$$[\text{HO}^{-}]_{\text{fr}} = 10^{-14+9,5} = 10^{-4,5} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

Ainsi :

$$K_s = 10^{-6} \times (10^{-4,5})^2$$

$$K_s = 10^{-15}$$

Q3. On écrit la demi-équation du couple $\text{FeOOH}_{(\text{s})}/\text{Fe}_{(\text{aq})}^{2+}$:



La formule de Nerst correspondante est :

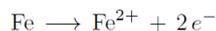
$$E = E^0 (\text{FeOOH}/\text{Fe}^{2+}) + \frac{0,06}{1} \log \left(\frac{[\text{H}^{+}]^3}{[\text{Fe}^{2+}]} \right)$$

À la frontière entre le domaine du solide et de celui de l'ion en solution ($\text{Fe}_{(\text{aq})}^{2+}$) : $[\text{Fe}^{2+}] = C_{\text{tra}}$. Ainsi :

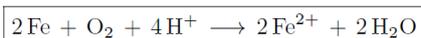
$$E_{\text{fr}} = E^0 (\text{FeOOH}/\text{Fe}^{2+}) - 0,18 \text{ pH} - 0,06 \log (C_{\text{tra}})$$

$$\text{La pente de la frontière séparant } \text{FeOOH}_{(\text{s})} \text{ et } \text{Fe}_{(\text{aq})}^{2+} \text{ est } -0,18 \text{ V.}$$

Q4. Le dioxygène et le fer n'ont pas de domaine commun : le fer solide est oxydé (en Fe^{2+} à pH 7) et le dioxygène est réduit en eau.

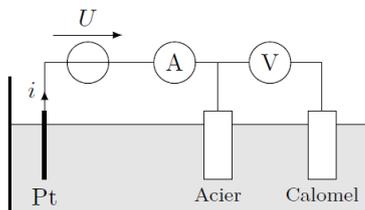


Le bilan est :

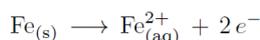


I.B Cinétique de la corrosion de l'acier

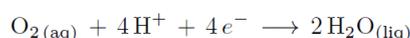
Q5. Schéma : une tension est imposée entre l'électrode de platine et l'acier, un courant circule; tandis que l'on mesure la tension entre l'acier et l'électrode au calomel saturé.



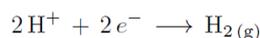
Q6. — La zone (a) pour $i > 0$ correspond à l'oxydation du fer solide en Fe^{2+} (car à $\text{pH} = 8,2$, c'est l'ion Fe^{2+} qui prédomine).



— Le premier plateau (b) observé pour $i < 0$ et proche de 0 correspond à la réduction du dioxygène en eau. Le plateau est un palier de diffusion de l'oxygène dissout.



— Le mur du solvant (c) observé pour $i < 0$ ($\Delta E \approx -0,95 \text{ V}$) correspond à la réduction de l'eau en dihydrogène gazeux.



Q7. En prolongeant le mur du solvant jusqu'à l'axe des abscisses, on relève $\Delta E \approx -0,94 \text{ V}$ pour un courant nul. Soit, comme $E_{\text{calomel}} = 0,25 \text{ V}$:

$$E_{\text{acier}} = -0,69 \text{ V}$$

or le potentiel de Nernst de ce couple est :

$$E_{\text{Nernst}} = -0,06 \text{ pH} = -0,06 \times 8,2 = -0,49 \text{ V}$$

On en déduit la valeur de la surtension cathodique :

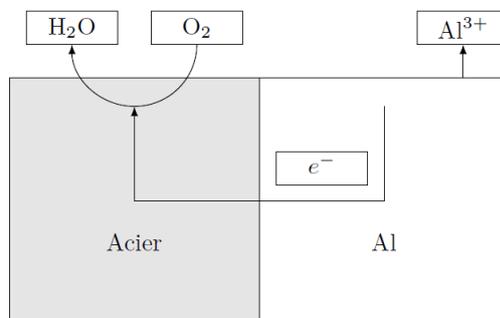
$$\boxed{\eta_C = -0,20 \text{ V}}$$

Q8. Il correspond au plateau à vitesse nulle, et à la zone linéaire lorsque la vitesse du courant d'eau est non nulle.

Q9. Le renouvellement du dioxygène dissout par le mouvement de fluide fait que la diffusion n'a à se faire sur une zone de plus en plus réduite au fur et à mesure que la vitesse du fluide augmente, et devient ainsi de moins en moins limitante.

I.C Protection par anode sacrificielle

Q10. Schéma complété :



Q11. On repère le potentiel mixte correspondant à la courbe d'oxydation de l'aluminium et à la réduction des ions fer. Les courants se compensent pour $\Delta E \approx -0,75 \text{ V}$ et on relève :

$$\boxed{j_{\text{corr}} = 1,5 \times 10^{-5} \text{ A} \cdot \text{cm}^{-2} = 1,5 \times 10^{-1} \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}}$$

Q12. À cette densité de courant est associé un courant $j_{\text{corr}} S = j_{\text{corr}} \pi d^2$ soit, sur un intervalle de temps Δt , une quantité de matière d'électrons égale à :

$$n_{e^-} = \frac{j_{\text{corr}} \pi d^2 \Delta t}{\mathcal{F}}$$

La quantité de matière d'aluminium est $n_{e^-}/3$ donc la masse d'aluminium est :

$$\Delta m_{\text{Al}} = \frac{j_{\text{corr}} \pi d^2 M(\text{Al}) \Delta t}{3\mathcal{F}}$$

On a $\Delta m_{\text{Al}} = \Delta e_{\text{Al}} \pi d^2 \rho_{\text{Al}}$ ainsi :

$$\boxed{\frac{\Delta e_{\text{Al}}}{\Delta t} = \frac{j_{\text{corr}} M(\text{Al})}{3\mathcal{F} \rho_{\text{Al}}} = 5,14 \times 10^{-12} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$$

Soit pendant 1 an, une épaisseur de $1,62 \times 10^{-4} \text{ m} = 0,162 \text{ mm}$.

Q13. La valeur obtenue sur trois ans (environ 0,5 mm) semble assez éloignée de l'épaisseur de la pièce...

3 Centres de données (d'après CCS - MP - 2022)

Q 1. Énoncer la loi de Fourier relative au vecteur densité de flux thermique \vec{j}_Q qui caractérise le phénomène de conduction thermique le long de l'axe de l'ailette.

$$\vec{j}_Q = -\lambda \vec{\text{grad}}(T)$$

Q 2. En réalisant un bilan de puissance thermique sur une tranche de longueur dx de l'ailette, montrer que la température suit l'équation différentielle

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{1}{\delta^2} T = -\frac{1}{\delta^2} T_a \quad \text{avec} \quad \delta = \sqrt{\frac{\lambda a}{2h}} \quad (1.1)$$

soit Σ la portion d'ailette entre x et $x+dx$



1^{er} principe sur Σ entre t et $t+dt$, en régime permanent :

$$d(\mathcal{E}) = \mathcal{S}_Q + \mathcal{S}_W = \mathcal{S}_Q(x) - \mathcal{S}_Q(x+dx) - \mathcal{S}_{\text{lat}} dt$$

0 en régime permanent (pointing to $d(\mathcal{E})$)

0 car transformation isotherme (pointing to \mathcal{S}_W)

$$d'au \quad \Phi_{\text{re}}(x) dt - \Phi_{\text{re}}(x+dx) dt - \Phi_{\text{lat}} dt = 0$$

$$j_Q(x) S dt - j_Q(x+dx) S dt - h(T(x) - T_a) S_{\text{lat}} dt = 0$$

2T dx (pointing to S_{lat})

$$- \frac{dj_Q}{dx} dx \pi a^2 - 2T_a dx h (T(x) - T_a) = 0 \quad (\text{surface latérale de } \Sigma)$$

d'au $j_Q = -\lambda \frac{dT}{dx}$ (pointing to the derivative term)

$$\lambda \frac{dT}{dx^2} a - 2h(T(x) - T_a) = 0$$

$$\frac{dT}{dx^2} - \left(\frac{2h}{\lambda a}\right) T = -\frac{2h}{\lambda a} T_a$$

1/\delta^2 (pointing to the coefficient of T)

Q 3. Vérifier l'homogénéité de l'expression du paramètre δ introduit dans la question précédente. Estimer sa valeur numérique dans le cas d'une ailette en silicium de rayon $a = 1$ mm.

• d'une part, on déduit de $\frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{T}{\delta^2} = -\frac{T_a}{\delta^2}$

$$\text{que} \quad \left[\frac{d^2 T}{dx^2} \right] = \left[\frac{T}{\delta^2} \right]$$

dimension //

$$\frac{\text{W}}{\text{L}^2} = \frac{\text{W}}{[\delta]^2} \quad \text{d'au} \quad [\delta] = \text{L}$$

• d'autre part, $[\delta] = \sqrt{\frac{[da]}{[2h]}}$

ou $[l] = \frac{[j_{\vec{a}}]}{[C_p \vec{a} \cdot \vec{T}]} = \frac{[j_{\vec{a}}]}{\rho \cdot L^{-1}}$

$[h] = \frac{[j_{\vec{a}}]}{\rho}$ car $j_{\vec{a}, \text{tot}} = h(T(x) - T_a)$

donc $\frac{[l]}{[h]} = L$ d'où $\frac{[da]}{[2h]} = L^2$ et d'où

$[\delta] = L$

AN $\delta = 2 \text{ cm}$ pour $h = "h_c"$ (air cohérent)
 (NB) $\delta = 1,6 \text{ cm}$ avec 2.65. renouvelé en présence de ventilateurs

Q 4. Expliciter les conditions aux limites que doit vérifier le champ de température $T(x)$ en $x = 0$ et en $x = b$.

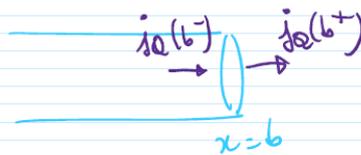
en $x = 0$, le contact parfait impose $T(x=0) = T_d$

en $x = b$, l'énoncé est moins explicite sur la modélisation retenue.

• de plus, au regard de "Figure 2" plus bas, $T(x=b)$ ne semble pas être imposée à T_a (car on voit que $T(x=b)$ dépend de b/δ).

→ pas de "contact parfait" entre l'ailette et l'air en $x=b$

→ utilisons alors la continuité du flux thermique:



→ les flux de Fourier / dans l'air à l'interface
 $j_a(b^-) = j_a(b^+) \Rightarrow$ loi de Newton

$- \lambda \frac{dT}{dx} \Big|_{x=b^-} = h(T(x=b) - T_a)$

Q 5. En précisant les approximations effectuées, obtenir une expression analytique approchée de $T(x)$ dans le cas où $b \gg \delta$. Vérifier la cohérence de cette expression avec la figure 2.

$\delta =$ "distance caractéristique d'atténuation de la température"

si $b \gg \delta$ alors $T(x)$ ne varie quasiment plus au voisinage de $x = b$

d'où $j_a(x=b^-) = - \lambda \frac{dT}{dx} \Big|_{x=b^-} \rightarrow 0$

d'où $h(T(x=b) - T_a) \rightarrow 0$

d'où $T(x=b) = T_a$ si $b \gg \delta$

Revenons dans le problème : $\frac{dT}{dx} - \frac{T}{\delta^2} = -\frac{T_a}{\delta^2}$ avec $\begin{cases} T(0) = T_d \\ T(b) = T_a \end{cases}$

• $\frac{dT}{dx} - \frac{T}{\delta^2} = 0$ (équation homogène associée)
 • $r^2 - \frac{1}{\delta^2} = 0$ (équation caractéristique)
 soit $r = \pm \frac{1}{\delta}$
 donc $T^{HOM} = A e^{-x/\delta} + B e^{x/\delta}$

solution particulière recherchée \rightarrow forme de cette (car 2nd membre est)
 $\frac{dT^{PART}}{dx^2} - \frac{T^{PART}}{\delta^2} = -\frac{T_a}{\delta^2}$
 donc $T^{PART} = T_a$

donc $T = T^{HOM} + T^{PART} = A e^{-x/\delta} + B e^{x/\delta} + T_a$

condition limite
 $\begin{cases} T(x=0) = A + B + T_a = T_d & [**] \\ T(x=b) = A e^{-b/\delta} + B e^{b/\delta} + T_a \approx B e^{b/\delta} + T_a = T_a & [**] \end{cases}$
 $b/\delta \gg 1$

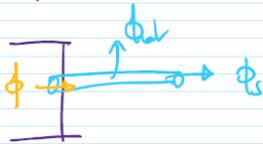
d'où $[**]$ donne $B = 0$ et $[**]$: $A = T_d - T_a$

d'où : $T(x) = (T_d - T_a) e^{-x/\delta} + T_a$

d'où $\frac{T(x) - T_a}{T_d - T_a} = e^{-x/\delta}$; qui semble coïncider avec le tracé de la figure 2 pour $b/\delta = 10$.

Q 6. La figure 3 donne une représentation graphique de l'évolution de la résistance thermique d'une ailette cylindrique en fonction du rapport b/δ , pour différents matériaux. Interpréter physiquement l'existence d'une valeur asymptotique de R_{th} , commune aux différents matériaux lorsque $b \ll \delta$; justifier sa valeur numérique.

si $b \ll \delta$, on voit d'après la figure 2 (pour $b/\delta = 0,1$) que T est uniforme dans la barre. Autrement dit le transfert thermique latéral est négligeable devant le transfert thermique à l'extrémité de l'ailette



(car δ est la distance caractéristique d'atténuation de T , due au flux latéral, i.e. $b \ll \delta$: le flux latéral impacte peu le champ de T)

d'où $\phi = \phi_{lat} + \phi_s \approx \phi_s = hS(T(x=b) - T_a) \approx hS(T_d - T_a)$

\uparrow T_a
 \uparrow $T(x)$ uniforme si $b \ll \delta$

D'où $R_{th} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{T_d - T_a}{\phi} = \frac{1}{h_s}$

πa^2
 $T(x)$ uniforme si $b \ll \delta$

si la me dépend peu de la nature du métal / semi-conducteur (Si); ce que semblent suggérer les données à la fin de l'enoncé, alors on a bien R_{th} indépendant du matériau lorsque $b \ll \delta$

AO avec unilatérale ($h = "h_s"$)

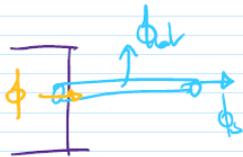
$R_{th} = \frac{1}{h_s \pi a^2} = 1 \cdot 10^3 \text{ K.W}^{-1}$
 on retrouve la valeur du graphique.

a bien R_{th} indépendant du matériau lorsque $b \ll \delta$

Q 7. Retrouver, par le calcul, la valeur asymptotique de la résistance thermique R_{th} de l'ailette en silicium dans le cas où $b \gg \delta$.

si $b \gg \delta$, on a $T(x) = (T_d - T_a) e^{-x/\delta} + T_a$

à $\phi = \phi(x=0) = -\lambda \frac{dT}{dx} \Big|_{x=0} = \frac{\lambda}{\delta} (T_d - T_a) S$



loi de Fourier

D'où $R_{th} = \frac{\delta}{\lambda S} = 0,03 \cdot 10^3 \text{ K.W}^{-1}$

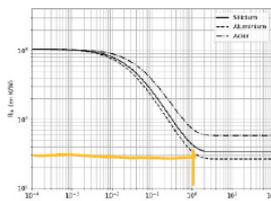
cohérent avec figure 3 quand $b \gg \delta$
 $= 3,4 \cdot 10^1 \text{ K.W}^{-1}$ avec 2CS.

Q 8. En pratique, les ailettes sont réalisées en aluminium et leur longueur est fixée à $b = 2 \text{ cm}$. En vous appuyant sur la figure 3, justifier ces choix, puis estimer le nombre d'ailettes (de rayon $a = 1 \text{ mm}$) à associer à un microprocesseur dissipant une puissance thermique de 200 W pour que la température de ce dernier n'exécède par 60 °C en régime stationnaire de fonctionnement. Commenter.

Pour l'Aluminium, on trouve $\delta = 2 \text{ cm}$

et donc $\frac{b}{\delta} = 1$

La figure 3 nous indique alors que



$R_{th} \approx 30 \text{ K/W} = \frac{T_d - T_a}{P}$

où P est la puissance évacuée par 1 ailette.

Eni, avec N ailettes et une puissance totale à évacuer

$P_{tot} = 200 \text{ W}$; on a

$P_{tot} = N P = N \cdot \frac{T_d - T_a}{R_{th}}$

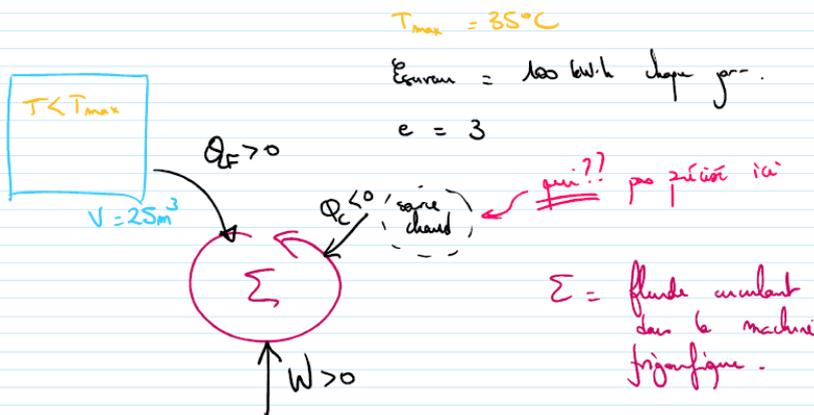
Si $T_d < 60^\circ\text{C}$, et en supposant $T_a = 20^\circ\text{C}$

$$N = \frac{P_{\text{ext}} R_{\text{th}}}{T_d - T_a} > \frac{200 \times 30}{40} = 150$$

150 ailettes paraissent nécessaires, ce qui semble être. Mais leur rayon étant de 1mm, c'est envisageable -

NB je suis obligé de mettre 3 CS ici alors que depuis le début, on a = 1mm je travaillais avec 1 CS. On pourrait travailler avec 265 depuis le début non, ce qui serait un meilleur compromis...

Q 9. La solution première de refroidissement de la salle repose sur l'utilisation d'un système de conditionnement d'air (parfois désigné « climatiseur » par abus de langage). Estimer le coût annuel, en euros, de cette solution en considérant que le système de conditionnement d'air fonctionne en permanence et que son efficacité — ou COP (Coefficient de Performance) — est égale à 3.



La pièce constitue donc ici la source froide de la machine frigorifique représentée ci-dessus.

Par définition $e = \frac{Q_F}{W}$

Sur une année $W^{an} = \frac{Q_F^{an}}{e} = \frac{365 \times E_{salle}/\text{jour}}{e}$ en faisant l'hypothèse qu'il faut évacuer toute l'énergie thermique apportée par les sources (de sorte que la température de la pièce reste constante).

Soit un coût annuel $ca = p \times W^{an} = 0,17 \times \frac{365}{3} \times 100 \text{ €}$

prix kWh en kWh

$ca = 2,1 \text{ k€}$

Q 10. L'air de la pièce est modélisé par un gaz parfait diatomique, à la pression atmosphérique et à la température T_{max} . Exprimer, puis évaluer numériquement, la masse volumique ρ_{air} de l'air dans ces conditions. En déduire le débit de masse d'air D_m , en $\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}$, brassé par le ventilateur dans ces mêmes conditions.

loi des gaz parfait : $PV = nRT = \frac{m}{M} RT$

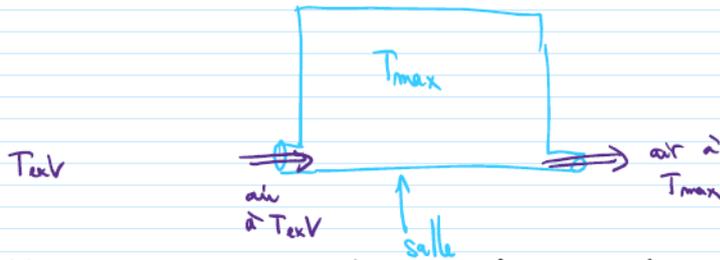
Donc $\rho_{air} = \frac{m}{V} = \frac{PM}{RT} \quad \Rightarrow \quad M = 0,2 M_{O_2} + 0,8 M_{N_2} = 29 \text{ g/mol}$

d'où $\rho_{air} = \frac{1,0135 + 29 \cdot 10^3}{8,31 \cdot (273+25)} \text{ kg/m}^3 = 1,1 \text{ kg/m}^3$

Et plus $\dot{D}_m = \rho_{air} \dot{D}_v = 0,94 \cdot 10^3 \text{ kg/h} = 0,26 \text{ kg/s}$

Q 11. À l'aide d'un modèle simple, estimer la période de l'année sur laquelle le système de free-cooling est fonctionnel. En déduire le gain annuel en euros obtenu grâce à l'installation du système de free-cooling dans cette salle informatique.

Modélisons le système "free-cooling" par de l'air à la température T_{ext} entrant dans la salle (température T_{max}) et sortant à la température T_{max} :



Le 1^{er} principe appliqué sur l'air circulant donne

$\dot{D}_m (\Delta h + \Delta e + \Delta q) = \dot{P}_R + \dot{P}_{utile}$

Δh : néglige si $S_e = S_s$ (séchou en entrée et sortie)
 Δe : néglige si altitude entrée et altitude sortie
 Δq : néglige en l'absence de puces microélectroniques autres que la pompe.
 Conversion \dot{D}_m en RP

d'où $\dot{D}_m c_p (T_{max} - T_{ext}) = \dot{P}_R$

corrs physique caractéristique :
 → chaque degré de liberté quadratique (5 par at d'atome)
 compte pour $R/2$ dans $Cv, molaire$

$\Rightarrow Cv, m = \frac{5R}{2}$

puissance thermique captée par l'air ... et donc évacuée par le free cooling.

$\Rightarrow q = \frac{7}{241} R \text{ (maximale)} = 1,0 \cdot 10^3 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$

or $P_{th} = \frac{100 \text{ kW} \cdot \text{h}}{24 \text{ h}} = 4,2 \text{ kW}$ à évaluer. ($\Rightarrow \exists$ dans hypothèse Puissance réfrigérante ok)

d'où $T_{max} - T_{ext}$ doit être supérieur à $\frac{P_{th}}{Dm \cdot q} = 16^\circ\text{C}$.

soit $T_{ext} < 13^\circ\text{C}$



Donc pendant 8 mois : free cooling $\text{cout} = p + P_v + \Delta t = 0,17 + 0,06 + 8 \cdot 30$
 4 mois : conditionnement $\text{cout} = \frac{2,1 \cdot 10^3}{3} = 700$
 $= 59 \text{ €}$

soit $\text{cout} = 0,8 \text{ k€}$

donc $\frac{\text{cout (avec free cooling)}}{\text{cout (sans free cooling)}} = 0,4$: ça vaut le coup.

gain en euros $\approx 1 \text{ k€}$